Mario Pezzi

Elettrotecnica generale

Elettrostatica Elettromagnetismo

Teoria dei circuiti

Zanichelli Bologna

PREFAZIONE

Scopo del presente volume è quello di fornire le basi di Elettrotecnica a coloro che, direttamente (elettrotecnici) o indirettamente (radioelettronici, tecnici dei controlli, ecc.), se ne debbono occupare con un certo impegno e con indirizzo moderno. Per questo motivo è stata sviluppata assai a fondo, tra l'altro, la teoria dei circuiti elettrici.

Nella stesura dei vari capitoli si è cercato perciò di soddisfare il più possibile le necessità dei diversi indirizzi tecnici; nello stesso tempo sono state tenute presenti le esigenze di una particolare categoria di lettori: quella costituita dagli studenti degli Istituti Industriali.

Per la comprensione di quanto è stato svolto nel libro occorrono naturalmente alcune basi di Matematica e di Fisica generale. Tuttavia di quest' ultima si è ritenuto opportuno riportare quelle parti che riguardano direttamente l' Elettrotecnica, e ciò per raggiungere una maggiore organicità e facilitazione di trattazione.

Il libro si presenta inoltre corredato con più di trecento esercizi, completamente sviluppati e risolti, a volte anche in più modi, una parte dei quali è stata distribuita nel testo, mentre la rimanente parte è stata raccolta alla fine di ogni capitolo, e con ottantadue esercizi da svolgere, riportati in appendice alla fine del libro. In questo modo il lettore dovrebbe superare quelle tipiche difficoltà che sono sempre presenti in una trattazione teorica. Gli esercizi risultano d'altronde, nella loro grande maggioranza, numerici: i relativi calcoli, da svilupparsi mediante il regolo calcolatore ove possibile, appaiono con approssimazione migliore dell' 1 %. Per alcune osservazioni sul calcolo numerico si legga quanto è stato riportato nelle seguenti pagine.

Bologna, Luglio 1965

AVVERTENZA

I termini e i simboli matematici impiegati nel libro sono quelli di uso corrente. Tuttavia si desidera richiamare qui queste brevi precisazioni.

Quantità piccola

Viene indicata premettendo una Δ al simbolo della grandezza assegnata. Ad esempio ΔS indica una piccola superficie (questa potrebbe anche essere una piccola parte di un'area S).

Quantità infinitesima

Viene indicata premettendo una d al simbolo della grandezza usata. Ad esempio con dS si indica una superficie infinitesima (questa naturalmente potrebbe far parte della superficie S). A differenza della quantità piccola, che è una quantità essenzialmente costante, la quantità infinitesima tende a zero.

Naturalmente il prodotto fra una quantità finita ed una infinitesima è ancora una quantità infinitesima. Ad esempio il prodotto fra la forza F e lo spostamento dl, cioè $F \cdot dl$, risulta infinitesimo come lo spostamento.

Sommatoria

Viene indicata col simbolo Σ. Il suo significato è quello di esprimere una somma (di termini *omogenei* fra di loro, grandi o piccoli non importa, purché finiti). Si adopera di solito quando i termini che devono apparire sommati sono molti.

Ad esempio, se un segmento è costituito da tanti piccoli tratti, le cui lunghezze siano qui indicate genericamente con Δl, allora la lunghezza di tale segmento risulterà espressa da $l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots = \Sigma \Delta l$.

Così, se una superficie è stata suddivisa in tante piccole parti, le cui aree siano state indicate genericamente con ΔS, per l'area S della superficie data si potrà scrivere $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots = \Sigma\Delta S$.

Ed ancora, se una forza risultante F è dovuta a più forze parallele indicate genericamente con F_p, si potrà scrivere $F = F_{p1} + F_{p2} + \ldots = \Sigma F_p$.

Integrale

Viene indicato col simbolo $\int$. Il suo significato è quello di somma (il simbolo $\int$ deriva infatti da quello S, iniziale di somma); a differenza però della sommatoria tale operazione è relativa ad infiniti termini infinitesimi. Quindi è necessario ricorrere all' integrale tutte le volte che si devono sommare dei termini infinitesimi. Sarà ad esempio $y_1\, dx + y_2\, dx + y_3\, dx + \ldots = \int y dx$, oppure $dl_1 + dl_2 + dl_3 + \ldots = \int dl$.

Nei fenomeni fisici, oltre ai soliti integrali, si incontrano spesso i cosiddetti integrali curvilinei $\left(\int_l\right)$, di superficie $\left(\int_s\right)$, di volume $\left(\int_v\right)$.

Derivata

La derivata viene indicata col simbolo $\frac{d}{dt}$. A dire il vero questo è il simbolo di una derivata (calcolata) rispetto al tempo (t): ciò è giustificato dal fatto che le grandezze da derivare che si incontreranno nel testo sono esclusivamente funzioni del tempo. La derivata della grandezza y (funzione del tempo) si indicherà perciò con $\frac{d}{dt}\, y$, od anche con $\frac{dy}{dt}$.

È chiaro che la derivata rappresenta la rapidità con la quale la grandezza data (y) varia (dy) al variare (dt) della variabile (t).

OSSERVAZIONI SUL CALCOLO NUMERICO

Qualsiasi problema, dal più semplice a quello più complicato, termina di solito con operazioni di calcolo numerico. Per procedere speditamente in tali calcoli sarà bene tener presente le seguenti osservazioni.

1) Cifre decimali e cifre significative di un numero

Sono cifre decimali quelle che appaiono a destra della virgola. Quindi del numero 4,708 le cifre 708 sono quelle decimali, così come del numero 0,0004 il 4 è una cifra decimale, precisamente la quarta cifra decimale.

Di un numero sono invece cifre significative tutte quelle che appaiono scritte, zeri compresi, purché questi ultimi siano intercalati o risultino alla fine del numero stesso. Perciò il numero 4708 ha quattro cifre significative così come 4,708 e 0,004708, mentre 470800 e 100,000 presentano sei cifre significative; viceversa 0,000004 ne ha una sola!

A questo proposito occorre aggiungere ancora che, ad esempio, i numeri $4708 \cdot 10^2$ (= 470800), $40 \cdot 10^{-3}$ (= 0,040) presentano rispettivamente quattro e due cifre significative poiché le potenze del dieci sono escluse dal conteggio delle cifre significative. Si può così osservare che per diminuire le cifre significative di un numero è necessario impiegare le potenze del dieci. Quindi, se del numero 4708 si vogliono far apparire due sole cifre significative, si scriverà $47 \cdot 10^2$.

2) Approssimazione dei dati numerici

Il valore (numero) che esprime quantitativamente una certa grandezza è molte volte noto in modo approssimato, oppure conviene per esigenze di calcolo, che risulti approssimato.

In generale, salvo quanto sarà accennato nella nota, l'approssimazione di un valore viene individuata dalle cifre significative del numero che lo rappresenta.

Ad esempio, se il valore di una certa grandezza è espresso dal numero 4708, si deve intendere che l' incertezza è relativa all' ultima cifra significativa (cioè il valore della grandezza è compreso fra 4707 e 4709) per cui l'approssimazione risulta data da $1/4708 \cong 0{,}02\,\%$. Così analogamente per 107 l'approssimazione è di $1/107 \cong 1\,\%$, mentre per 953 risulta di $1/953 \cong 0{,}1\,\%$ e per 0,00000400 è di $1/400 = 0{,}25\,\%$.

Appare chiaro dunque che la precisione (approssimazione) di un valore dipende e dal numero delle sue cifre significative (e non dai decimali !) e dal valore del numero stesso. Infatti, ad esempio, per un numero avente due cifre significative l'approssimazione varia dal 10 % per il numero 10 all' 1 % per il numero 99.

Da quanto sopra esposto si deduce anche che, fissata una certa approssimazione per il valore di una grandezza, restano fissate le cifre significative del numero che l'esprime. Ad esempio per π (3,1415926 . . .) si scriverà 3,14 per approssimazione migliore dell' 1 % ; si scriverà invece 3,142 per approssimazione migliore dello 0,1 %. Così se una grandezza fosse nota con le seguenti cifre 102345 e dovesse essere riportata nei calcoli all' 1 % si scriverà semplicemente $102 \cdot 10^3$, se invece dovesse essere riportata allo 0,1 % si scriverà $102{,}3 \cdot 10^3$.

Naturalmente l'approssimazione per eccesso o per difetto (il cosiddetto *arrotondamento*) di valori espressi con un numero di cifre superiori a quelle richieste è sempre consigliabile perché porta ad una approssimazione superiore a quella che si può dedurre direttamente dal numero di cifre significative scritte. Così ad esempio per π^2 (9,86960 . . .) il valore di 9,9 ha in realtà un'approssimazione superiore all' 1 %, il valore di 9,87 presenta un'approssimazione di gran lunga superiore allo 0, 1 %. D'altra parte, per molti calcoli, passando ad altro esempio, il numero 2,99 può essere tranquillamente arrotondato a 3 (errore 0,3 %) ma non a 2,9, poiché in quest' ultimo caso si commetterebbe un errore del 3 %.

Nota. Si osservi che in certi problemi non tutti i numeri esprimono valori approssimati. Ad esempio, se si dice che un diametro è di otto centimetri, il valore 8 (una sola cifra significativa) non è affetto in questo caso da scarsa approssimazione. Tuttaltro ! Naturalmente, per togliere l'equivoco, sarebbe necessario scrivere 8,00 . . ., cioè otto seguito dopo la virgola da tanti zeri quanti ne occorrono per determinare la precisione voluta, in relazione anche ai valori delle altre grandezze che intervengono nello stesso problema ; cosa questa che in pratica difficilmente viene fatta poiché per numeri *piccoli* interi (come ad esempio 2, 20) o decimali (come ad esempio 0,1 ; 0,5) si attribuisce di solito tacitamente, un'approssimazione superiore a quella che caratterizza il problema.

3) Approssimazioni con operazioni aritmetiche

Nel sommare fra di loro due valori noti con la stessa approssimazione si ottiene un risultato che è affetto dalla stessa approssimazione degli addendi. È perciò necessario tener presente che se i valori di uno dei due addendi è più piccolo dell'altro il risultato che si ottiene deve essere

poi approssimato (arrotondamento per eccesso o per difetto : ad esempio 48,1 + 0,127 = 48,227 per cui si scriverà 48,2) ; mentre se il valore di uno degli addendi è veramente molto piccolo rispetto a quello dell'altro, è inutile eseguire la somma poiché il risultato coincide certamente con il numero più grande. Ad esempio è inutile sommare 48,1 con 0,0317 poiché il risultato, dovendo essere dello stesso ordine di approssimazione dei valori di partenza, rimane 48,1 (infatti $48{,}1 + 0{,}0317 = 48{,}1317 \cong$ $\cong 48{,}1$).

Nell'operazione di differenza invece la precisione del risultato è sempre inferiore (a meno che uno dei due termini non sia molto piccolo rispetto all'altro) a quella dei valori di partenza e risulta precisamente tanto minore quanto più prossimi sono fra loro i numeri da sottrarre.

Nell'eseguire il prodotto o il quoziente, a differenza delle operazioni precedenti, non ha nessuna influenza il fatto che uno dei due valori sia piccolo rispetto all'altro : ciò che ha importanza è invece la loro approssimazione, poiché l'approssimazione del risultato è data dalla somma delle approssimazioni dei valori di partenza ; d'altronde anche il risultato dovrà essere approssimato (arrotondamento in più od in meno) in modo che il numero delle sue cifre significative sia in relazione alla precisione dell'operazione. Così moltiplicando fra di loro 108 (1 %) e 91 (1 %) si ottiene il valore 9828 che verrà arrotondato a $98 \cdot 10^2$ e la cui approssimazione è del 2 % ; moltiplicando 0,534 (0,2 %) con 0,0011 (10 %) si ottiene 0,0005874 con approssimazione del 10,2 % : per questo il risultato verrà arrotondato a 0,0006.

Osservazioni analoghe si possono fare per l'elevazione a potenza.

Concludendo, per arrivare ad un certo risultato finale cui è richiesto una data precisione (ad esempio 1 %), occorre partire, qualora siano da compiere operazioni di tipo differenza, prodotto, quoziente, elevazione di potenza, con valori la cui precisione risulti tanto maggiore (ad esempio circa 0,1 %) quanto più numerose sono le operazioni da compiere.

SIMBOLI E ABBREVIAZIONI

a — costante di una funzione esponenziale, lato di un quadrato; lato orizzontale di un rettangolo, penetrazione (effetto pelle).

A — costante fondamentale di un quadripolo, costante di una funzione esponenziale, potenza apparente.

b — costante di una funzione esponenziale, lato di un rettangolo.

B — banda passante, costante fondamentale di un quadripolo, costante di una funzione esponenziale, induzione magnetica, suscettanza.

B_C — suscettanza capacitiva.

B_L — suscettanza induttiva.

B_r — induzione magnetica residua.

B_s — induzione magnetica di saturazione.

c — coefficiente di trasmissione del calore.

C_p — cifra di perdita.

d — diametro, distanza.

d.d.p. — differenza di potenziale.

D — costante fondamentale di un quadripolo, distorsione (armonica), spostamento elettrico (induzione elettrica).

e — valore istantaneo di una tensione sinusoidale.

e_c — valore istantaneo di una *f.c.e.m.* sinusoidale.

e_C — valore ist. caduta di tens. sinusoidale ai capi di una capacità.

e_L — valore ist. caduta di tens. sinusoidale ai capi di un' induttanza.

e_0 — valore istantaneo di una *f.e.m.* sinusoidale (tensione a vuoto).

e_R — valore ist. caduta di tens. sinusoidale ai capi di una resistenza.

E — valore efficace di una tensione sinusoidale, valore efficace della tensione di fase di un sistema polifase.

E_c — valore efficace di una *f.c.e.m.* sinusoidale.

E_C — valore eff. caduta di tens. sinusoidale ai capi di una capacità.

E_i — valore efficace di una tensione sinusoidale mutua indotta.

E_L valore eff. caduta di tens. sinusoidale ai capi di un' induttanza.

E_M valore massimo (di cresta) di una tensione sinusoidale.

E_o valore efficace di una tensione a vuoto sinusoidale.

E_R valore eff. caduta di tens. sinusoidale ai capi di una resistenza.

E_Z valore eff. caduta di tens. sinusoidale ai capi di un' impedenza.

f frequenza.

f.c.e.m. forza controelettromotrice.

f.d.f fattore di forma.

f.e.m. forza elettromotrice.

f.m.m forza magnetomotrice.

F forza.

$\mathfrak{F}$ tensione magnetica.

G conduttanza elettrica.

h altezza.

H campo magnetico.

H_c campo magnetico coercitivo.

H_s campo magnetico di saturazione.

i valore istantaneo di una corrente.

i_C valore istantaneo della corrente in una capacità.

i_i valore istantaneo di una corrente indotta.

i_L valore istantaneo della corrente in un' induttanza.

i_p valore della corrente in regime permanente.

i_R valore istantaneo della corrente in una resistenza.

i_{tr} valore della corrente che si sovrappone ad i_p in regime transitorio.

I intensità di una corrente continua,
valore efficace di una corrente.

I_a valore eff. della componente della corrente in fase con la tensione.

I_C valore efficace della corrente in una capacità.

I_F valore efficace della corrente di fase di un sistema polifase.

I_L valore efficace della corrente in un' induttanza.

I_m valore medio di una corrente.

I_M valore massimo (di cresta) di una corrente sinusoidale.

I_o intensità della corrente di cortocircuito di un generatore.

I_r valore eff. della componente della corrente in quadratura con la tensione.

I_R valore efficace della corrente in una resistenza.

I_Z valore efficace della corrente in un' impedenza.

k costante di proporzionalità.

K campo elettrico.

K_r rigidità dielettrica.

l lunghezza.

log logaritmo decimale.

L coefficiente di autoinduzione,
lavoro meccanico.

m massa.

m_e massa dell'elettrone.

m_{eu} massa dell'elettrone in moto.

M coefficiente di mutua induzione.

n numero di giri.

N numero di Avogadro,
numero di spire.

p perimetro, potenza istantanea.

P peso, potenza, potenza attiva in regime elettrico periodico.

P_d potenza dissipata.

P_f potenza perduta nei materiali ferromagnetici.

P_F potenza perduta per correnti parassite (Foucault).

P_g potenza generata.

P_i potenza perduta per isteresi.

P_u potenza utile, potenza di uscita.

$\mathcal{P}$ permeanza.

q quantità di elettricità (valore istantaneo).

q_e carica dell'elettrone.

Q fattore di merito di una bobina, potenza reattiva, quantità di elettricità (valore costante).

Q_C potenza reattiva capacitiva.

Q_L potenza reattiva induttiva.

r raggio.

R residuo (armonico), resistenza elettrica.

R_{cr} resistenza critica.

R_o resistenza interna di un generatore.

R_p resistenza parallelo.

R_s resistenza serie.

R_u resistenza di carico (utilizzatore).

$\mathcal{R}$ riluttanza.

s spessore.

S area, sezione (retta).

t tempo.

T periodo.

u velocità.

v valore istantaneo di una tensione o di una *d.d.p.*

v_C valore ist. della caduta di tens. ai capi di una capacità.

v_i valore istantaneo di una *f.e.m.* indotta.

v_L valore ist. della caduta di tens. ai capi di un' induttanza.

v_p valore della tensione in regime permanente.

v_R valore ist. della caduta di tens. in una resistenza.

v_{tr} valore della tensione che si sovrappone a v_p in regime transitorio.

vol volume.

V valore efficace della tensione concatenata di un sistema polifase, tensione continua.

V_C tensione di una capacità carica.

V_{im} valore medio di una tensione indotta.

V_m valore medio di una tensione.

V_o tensione a vuoto (*f.e.m*) di un generatore a corrente continua.

V_{oc} valore costante di una *f.c.e.m.*

V_p tensione di polarizzazione.

w valore istantaneo di un lavoro o di un'energia.

W lavoro o energia (valore costante o medio).

W_C energia elettrostatica.

W_F energia perduta per effetto di correnti parassite (Foucault).

W_i energia perduta a causa dell' isteresi magnetica.

W_L energia elettromagnetica.

X reattanza (totale).

X_C reattanza capacitiva.

X_L reattanza induttiva.

X_M reattanza mutua.

y funzione generica del tempo.

Y ammettenza.

Y_p ammettenza di più tronchi in parallelo.

Y_s ammettenza di più tronchi in serie.

Z impedenza.

Z_e impedenza di entrata.

Z_p impedenza di più tronchi in parallelo.

Z_s impedenza di più tronchi in serie.

Z_{tr} impedenza di trasferimento.

Z_u impedenza di carico (utilizzatore),
impedenza di uscita.

α angolo,
argomento del vettore $\overline{A}$,
coefficiente di temperatura della resistenza,
fattore di smorzamento (fenomeni oscillatori).

β angolo,
argomento del vettore $\overline{B}$.

γ angolo di sfasamento fra corrente di linea e tensione concatenata,
argomento del vettore $\overline{C}$,
conducibilità elettrica,
peso specifico.

δ argomento del vettore $\overline{Y}$,
fase della funzione sinusoidale y,
traferro,
spessore.

Δ variazione piccola.

ε base dei logaritmi naturali,
coefficiente di risonanza,
costante dielettrica.

ε_c coefficiente di risonanza a carico.

ε_r costante dielettrica relativa.

ε_v coefficiente di risonanza a vuoto.

ζ differenza di fase fra due tensioni.

η rendimento.

θ argomento del vettore $\overline{Z}$,
temperatura in °C.

μ permeabilità magnetica.

μ_i permeabilità magnetica iniziale.

μ_M permeabilità magnetica massima.

μ_r permeabilità magnetica relativa.

ν differenza di fase fra due correnti.

ξ angolo di fase della tensione.

ρ resistività elettrica.

σ densità di corrente.

τ costante di tempo.

φ angolo di sfasamento fra corrente e tensione.

Φ flusso di un vettore.

Φ_c flusso magnetico concatenato.

ψ angolo di fase della corrente.

ω velocità angolare,
pulsazione di una grandezza sinusoidale.

ω_r pulsazione di risonanza.

INDICE

Capitolo 1 Corrente continua

Capitolo 2 Reti elettriche lineari in regime stazionario

Capitolo 3 Elettrostatica

Capitolo 4 Magnetismo ed elettromagnetismo

Capitolo 5 Correnti alternate

Capitolo 6 Sistemi di unità di misura

Capitolo 7 Reti elettriche lineari in regime sinusoidale

Capitolo 8 Fenomeni transitori nei circuiti elettrici lineari

Capitolo 9 Sistemi polifasi

Appendice 82 esercizi da svolgere, con soluzione

CORRENTE CONTINUA 1

1.1 Proprietà elettriche della materia

1.11 Struttura della materia

Ogni corpo è formato di materia. Enorme è il numero dei corpi che possono cadere sotto la nostra osservazione e che differiscono fra di loro per le diverse caratteristiche fisiche e chimiche della materia stessa. Si considerino ad esempio tutti i composti chimici inorganici ed organici il cui numero, già grandissimo, cresce di giorno in giorno. Ma una indagine approfondita mostrerebbe a questo proposito che, in realtà, relativamente pochi sono invece gli elementi fondamentali, fra di loro differenti, che concorrono a formare le varie sostanze oggi conosciute.

È noto da tempo infatti come la materia sia costituita da un aggregato di molecole [1] e come queste siano a loro volta costituite da atomi, essendo l'atomo quella più piccola particella che entra come parte intera ed indivisibile nella formazione della molecola e quindi della materia. A tale proposito è stato trovato che in natura vi sono solamente 92 tipi differenti di atomi. Poiché dunque ogni molecola è costituita da atomi, e d'altronde l'insieme delle molecole tutte eguali fra di loro forma la materia, è chiaro che questa, così come si presenta a noi, sarà costituita da un certo numero di molecole i cui atomi saranno o fra di loro tutti eguali (sostanze semplici come il rame, l'alluminio, l'idrogeno, ecc. ....) o differenti (sostanze composte come l'acqua, l'acido solforico, l'ossido di ferro, il polistirolo, ecc. ....), comunque sempre individuabili fra quella serie di 92 elementi fondamentali di cui si è detto poc'anzi.

---

[1] Si definisce molecola la parte più piccola in cui si può pensare diviso un corpo senza che si vengano a perdere le caratteristiche fisiche e chimiche della sostanza costituente il corpo stesso.

Ma è stato dimostrato, in modo sicuro ed inequivocabile, che ciascun atomo è a sua volta in realtà costituito da particelle, anch'esse elementari, particelle dotate di massa e, cosa assai importante, anche di carica elettrica ([2]).

Risulta così, ricorrendo ad una schematizzazione assai semplificata (Bohr), che un atomo si può pensare costituito (vedi fig. 1.11-1) da un nucleo attorno al quale ruotano delle minuscole particelle, chiamate

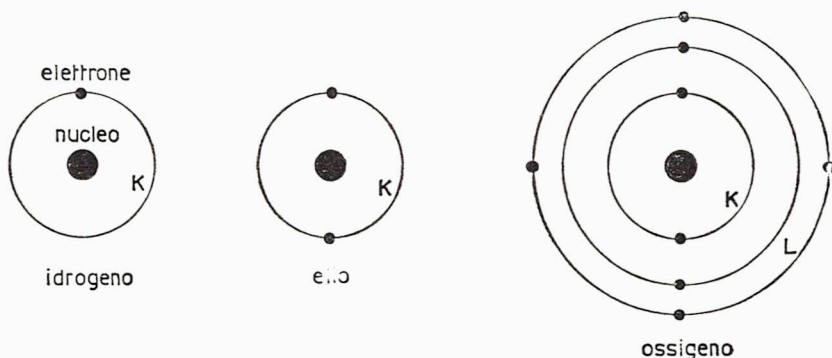



Fig. 1.11-1

elettroni. Questi sono piccolissime cariche elettriche negative, mentre il nucleo risulta carico positivamente ([3]).

È di grande importanza notare che gli elettroni sono tutti eguali fra di loro, qualsiasi sia l'atomo a cui appartengono ; un atomo invece differisce da un altro per il nucleo e per il numero di elettroni che ruotano attorno al suo nucleo (elettroni satelliti o periferici). A tale proposito è stato dimostrato che questo numero è variabile da un minimo di uno (atomo di idrogeno) ad un massimo di 92 (atomo di uranio), a seconda appunto dell'elemento. Pertanto ogni atomo potrà essere individuato dal numero di elettroni *satelliti*, il quale costituisce il cosiddetto numero atomico.

È ancora interessante notare che, quando gli elettroni satelliti sono numerosi, questi non si dispongono sulla stessa orbita ma in orbite diverse e che un certo numero di queste formano a loro volta i cosiddetti *anelli* (o cortecce). Precisamente il primo anello (indicato con la lettera K) è costituito da una sola orbita la quale può contenere fino a due elettroni

---

([2]) Fa eccezione il neutrone, che entra nella costituzione del nucleo, il quale possiede solamente massa, ma non ha carica.

([3]) A dire il vero esso è costituito a sua volta da diverse particelle (protoni, che sono da considerarsi cariche positive, neutroni, ecc. ...). Il nucleo però risulta nel complesso carico positivamente e, cosa pure importante, tale da neutralizzare l'insieme delle cariche negative costituite dagli elettroni periferici. L'atomo cioè è, in condizioni normali, elettricamente neutro.

(vedi ad esempio l'atomo di idrogeno che ha un solo elettrone e quello di elio con due elettroni periferici, fig. 1.11-1); il secondo anello (indicato con L), esterno al precedente, è costituito, quando esso si presenta completo, da due orbite delle quali la più interna può contenere solo due elettroni, mentre quella più esterna ne può contenere fino a sei (4); il terzo anello (indicato con M), a sua volta esterno a quello L, è costituito invece da un massimo di tre orbite, di cui quella più interna risulta completa con due elettroni, quella intermedia con sei e quella più esterna con dieci elettroni; poi il quarto anello (indicato con N) costituito da un massimo di quattro orbite (numero di elettroni massimo per ciascuna orbita rispettivamente due, sei, dieci, quattordici) e così via.

È da tener presente d'altronde che gli elettroni satelliti in condizioni normali occupano sempre le orbite più interne, cercando di renderle complete.

D'altra parte è stato dimostrato che certe proprietà, che interessano le reazioni chimiche (valenza) o certe caratteristiche elettriche come quelle tipiche dei materiali conduttori, semiconduttori, isolanti, dipendono dalle caratteristiche dell'orbita più esterna, cioè dagli elettroni periferici più esterni, oltre che si intende dalla particolare posizione dei singoli nuclei (edificio atomico).

Si consideri infatti ad esempio una delle sostanze buone conduttrici dell'elettricità: il rame. Ciascun atomo di rame ha (vedi fig. 1.11-2)

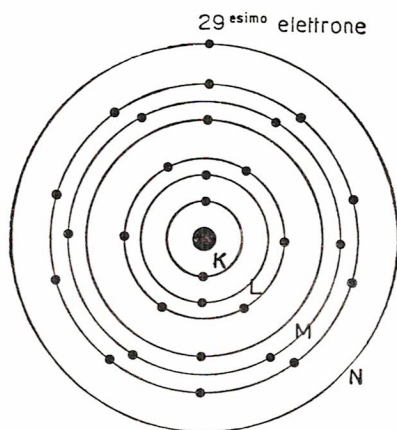



Fig. 1.11-2

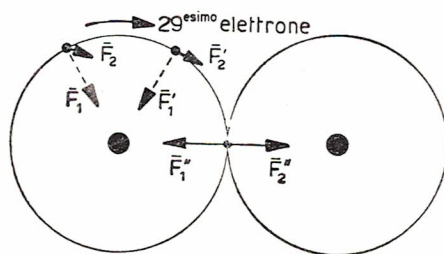



Fig. 1.11-3

29 elettroni che ruotano attorno al proprio nucleo; precisamente $2 + 8 + 18 = 28$ nei primi tre anelli (K, L, M), i quali saranno perciò completi, mentre il 29esimo si collocherà sulla prima orbita dell'anello N. D'al-

---

(4) In figura 1.11-1 appare l'atomo di ossigeno il quale ha l'orbita più esterna dell'anello L non completa. Per renderla completa occorrerebbero infatti due altri elettroni.

tronde un qualsiasi corpo di rame è costituito da tanti atomi assai vicini gli uni agli altri, precisamente tali che il 29^{esimo} elettrone di ciascun atomo, durante la rotazione attorno al proprio nucleo, verrà ad un certo istante a trovarsi in una posizione equidistante fra il suo nucleo e quello dell'atomo vicino (vedi fig. 1.11-3). Ora, per questa particolare disposizione dell' ultima orbita, succederà che in tale istante le forze di attrazione agenti sull'elettrone considerato avranno risultante nulla (5). L'elettrone in quell' istante perciò risulterà libero e l'agitazione termica lo porterà più o meno lontano dal suo atomo. È chiaro dunque che il rame verrà a possedere nella sua massa degli elettroni liberi, precisamente uno per ogni atomo, e che saranno questi a dare le caratteristiche elettriche al materiale considerato.

Concludendo, le proprietà elettriche della materia, ma non solo queste, dipenderanno pertanto dal comportamento degli elettroni più periferici presenti nei rispettivi atomi.

1.12 Elettroni

L'elettrone, come sarà apparso chiaramente dal precedente paragrafo, è una delle particelle fondamentali che entrano nella costituzione della materia. Dal suo comportamento ovviamente dipenderanno molte delle caratteristiche (ad esempio elettriche e magnetiche) presentate dalla materia stessa. D'altronde è importante notare che, in certe condizioni, l'elettrone può presentarsi svincolato dal suo nucleo. Infatti esso può esistere libero al di fuori della materia stessa (ad esempio elettroni dovuti ad emissione termoelettronica), oppure anche nella stessa materia (ad esempio elettroni di conduzione nei corpi conduttori, come si è visto precedentemente nel caso del rame).

Gli elettroni, come è stato accennato nel precedente paragrafo, sono minuscole particelle dotate tra l'altro (1) di massa e di carica elettrica. Precisamente la massa di un elettrone vale :

1.12-1 $$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31} \quad \text{kg} \ ,$$

e la sua carica, che è negativa, ammonta a :

1.12-2 $$q_e = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \ \text{coulomb} \ (2).$$

---

(5) Le due forze sono precisamente quella F_1'' di attrazione da parte del proprio nucleo, che cerca di tenere l'elettrone legato a sè, e quella F_2'' di attrazione da parte del nucleo dell'atomo vicino, che tenderebbe a strapparlo. Queste forze attrattive nascono in quanto elettrone e nucleo sono particelle cariche di segno opposto. Di questo fenomeno si parlerà un po' più avanti.

(1) Esse possiedono infatti anche un momento magnetico.

(2) Di questa unità di misura si parlerà più avanti, precisamente nel § 1.22.

D'altra parte gli elettroni, di per sé, sono tutti eguali. Non è quindi possibile riconoscere da quali atomi essi provengono; è certo invece che essi provengono dalle orbite più esterne degli atomi stessi e che se in una porzione di spazio esiste un certo numero di elettroni liberi esisterà contemporaneamente un certo numero di atomi che li hanno perduti.

1.13 Ioni

Nel precedente paragrafo si è prospettata l'evenienza e la possibilità che uno o più elettroni, fra quelli periferici, si abbiano ad allontanare, a causa di un fattore esterno, dal loro nucleo. In tal caso l'atomo verrà a perdere una o più cariche negative elementari, mostrando pertanto una carica positiva. Ciò è ovvio se si pensa che l'atomo è elettricamente neutro solo quando attorno al suo nucleo ruotano tutti i suoi elettroni, i quali neutralizzano appunto la carica positiva del nucleo.

A questo proposito si dà il nome di ione positivo a quell'atomo il quale abbia perso uno o più elettroni. La sua carica positiva risulterà, in valore assoluto, eguale a quella di un elettrone se l'atomo avrà perso un solo elettrone (ione positivo monovalente), sarà eguale a quella di due elettroni se l'atomo avrà perso due elettroni (ione positivo bivalente), e così via.

È possibile però che gli atomi, in certe condizioni, vengano a possedere qualche elettrone in più. In tal caso l'atomo non potrà risultare elettricamente neutro, bensì negativo appunto per l'eccesso di elettroni. Precisamente mostrerà una carica negativa pari a quella di un elettrone se possederà ovviamente un elettrone in più (ione negativo monovalente), una carica negativa pari al doppio di quella di un elettrone se possederà due elettroni in più (ione negativo bivalente), e così via.

Il fenomeno che porta gli atomi, e quindi le molecole, a trasformarsi in ioni si chiama ionizzazione. Il caso è abbastanza frequente in pratica.

1.14 Cariche elettriche

Le cariche elettriche elementari sono dunque costituite da elettroni, aventi massa assai piccola, e da ioni negativi e positivi, la cui massa è invece praticamente quella dell'atomo o della molecola da cui essi derivano, per cui essa risulterà migliaia di volte più grande rispetto a quella di un elettrone [1].

D'altronde un qualsiasi corpo, i cui atomi in un certo istante abbiano perduto od acquistato per una causa qualsiasi un certo numero di elet-

---

[1] Si ricordi infatti che l'atomo più leggero è quello di idrogeno e che la massa del suo nucleo è circa 1840 volte quella di un elettrone.

troni, si troverà ad essere carico positivamente o negativamente in proporzione diretta agli elettroni perduti od acquistati, e ciò indipendentemente dalle sue dimensioni fisiche. Si dirà allora che questo corpo, così carico, possederà una certa *carica elettrica*. Questa risulterà composta naturalmente dalla somma (algebrica) delle cariche elettriche elementari (elettroni e ioni) possedute dal corpo.

Si è più volte accennato come la materia sia in condizioni normali elettricamente neutra, cioè non possa mostrarsi carica di elettricità, poiché neutri sono i suoi atomi. Di conseguenza, se in un certo istante un corpo mostrerà di possedere una carica, ad esempio positiva, carica avente un certo valore, sicuramente esisteranno in altra parte dello spazio quelle cariche negative che il corpo ha perduto ([2]). È come dire quindi che le cariche elettriche non possono essere generate (create), ma possono essere ottenute solamente strappando elettroni agli atomi. Ovviamente queste cariche tenderanno a ricombinarsi.

1.2 Corrente elettrica

1.21 Definizione

Si definisce la corrente elettrica come un movimento di cariche elettriche. Pertanto, ad esempio, tutte le volte che in un conduttore si ha circolazione di cariche elettriche si dice che quel conduttore è sede di corrente elettrica. Ma una corrente elettrica può anche instaurarsi senza l'intervento di un conduttore. Si pensi infatti ad un elettrone, o ad un gruppo di elettroni, che si muova nel vuoto : ciò darà origine ancora, ovviamente, ad una corrente elettrica.

È importante notare subito che dal tipo di movimento delle cariche elettriche dipenderanno le caratteristiche della stessa corrente elettrica e quindi le sue manifestazioni esterne. Infatti, se le cariche elettriche fluiranno con moto uniforme, cioè con velocità costante, si avrà la cosiddetta *corrente continua*, vale a dire una corrente di valore costante

---

([2]) Così, se un corpo risulta negativo, vi saranno contemporaneamente altri corpi positivi ai quali saranno state tolte nell'insieme quelle cariche negative (elettroni) necessarie per rendere appunto il corpo negativo.

nel tempo (vedi fig. 1.21-1*a*); se invece le cariche si muoveranno con velocità non costante, la corrente cui esse daranno luogo non sarà costante, quindi in questo caso si avrà una corrente variabile nel tempo (vedi fig. 1.21-1*b*).

Risulta dunque dalla stessa definizione di corrente che una carica elettrica ferma non può dare luogo a corrente [1]. D'altronde una stessa

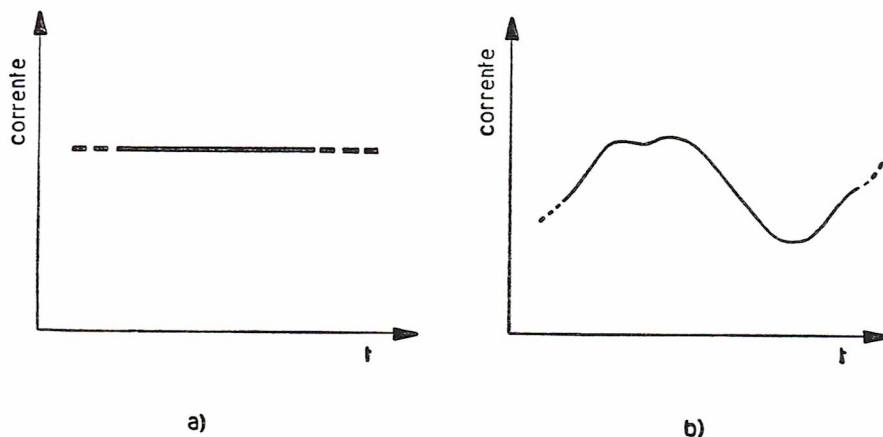



Fig. 1.21-1

carica elettrica, di segno e valore ben definiti e costanti, darà, se in movimento, un effetto (corrente) tanto più sensibile quanto più veloce sarà il suo moto.

1.22 Quantità di elettricità

Si definisce quantità di elettricità la somma delle cariche elettriche in gioco. Questa somma deve considerarsi algebrica, poiché, come già detto, esistono sia cariche positive che negative. In sostanza, per un corpo carico, la quantità di elettricità da esso posseduta è rappresentata appunto dalla *carica* che esso manifesta.

Naturalmente questa quantità di elettricità costituisce una grandezza fisica. Essa sarà perciò misurabile ed avrà una sua unità di misura. Orbene l'unità di misura della quantità di elettricità, il cui simbolo viene indicato con la lettera Q, è il coulomb (abbreviato C). Precisamente il valore di un coulomb corrisponde ad un certo ben definito numero di

---

[1] Una carica elettrica ferma dà luogo comunque a fenomeni elettrici interessanti. Questi verranno descritti nel capitolo **3**.

cariche elettriche elementari, che è risultato essere di $6{,}25.10^{18}$ elettroni. Ovviamente questa quantità di elettricità così definita è negativa. Il coulomb esiste naturalmente anche positivo, anzi tale lo si considera quando non viene specificato altrimenti.

1.23 Intensità di corrente

Si consideri un corpo conduttore, ad esempio un filo di rame (vedi fig. 1.23-1*a*, dove ne è stata raffigurata solamente una porzione). Se in questo conduttore gli elettroni di conduzione sono, per una causa che si vedrà in seguito, in movimento tale da spostarsi con moto uniforme si dirà, in base a quanto esposto precedentemente, che quel conduttore

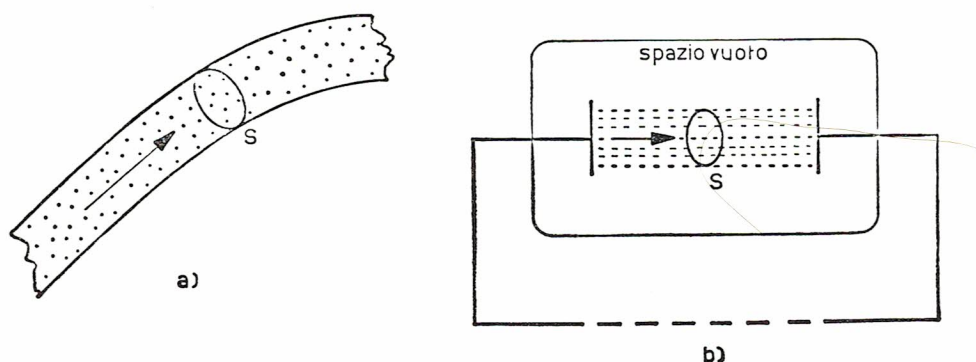



Fig. 1.23-1

è sede di una corrente elettrica continua. Se, anziché considerare un corpo conduttore metallico, si pensasse invece ad una porzione di spazio vuoto di materia, nel quale avessero a transitare con continuità un certo numero di elettroni (vedi fig. 1.23-1*b*), si avrebbe ancora la stessa cosa: lungo quel tragitto, costituito dal fascetto di elettroni, si manifesterebbe sempre una corrente elettrica.

Si consideri ora una sezione S del corpo conduttore o del fascetto di elettroni. Attraverso questa passerà in ogni istante, poiché le cariche elettriche sono in movimento, una certa quantità di elettricità. Si definisce intensità della corrente la quantità di elettricità che passa attraverso la sezione S nell'unità di tempo (1 secondo) (1).

---

(1) Il sistema di unità fondamentali adottato in Elettrotecnica è quello cosidetto Giorgi. Pertanto le tre unità fondamentali meccaniche sono il metro (abbr. m), il chilogrammo massa (abbr. kg), il secondo (abbr. sec). Per le unità di misura di qualsiasi genere valgono poi i seguenti multipli: chilo (10^3), mega (10^6), giga (10^9), tera (10^{12}); ed i seguenti sottomultipli: milli (10^{-3}), micro (10^{-6}), nano (10^{-9}), pico (10^{-12}).

In realtà, fintantoché le cariche elettriche fluiranno attraverso la sezione con moto uniforme (velocità costante), l'intensità della corrente cui dà luogo quel movimento di cariche potrà essere calcolata anche come rapporto fra la quantità di elettricità Q che fluisce attraverso la sezione S in un certo tempo t, il quale potrà essere anche molto grande, ed il valore del tempo t stesso. In questo caso cioè di corrente perfettamente continua si potrà scrivere che:

1.23-1 $$\text{intensità di corrente} = \frac{\text{quantità di elettricità}}{\text{tempo}},$$

cioè in formule, indicata col simbolo I l'intensità di corrente, :

1.23-2 $$I = \frac{Q}{t} \qquad \text{(corrente continua).}$$

Nel caso invece che le cariche elettriche dovessero fluire attraverso la sezione S in modo non uniforme (velocità non costante), si potrà definire ancora l'intensità della corrente come rapporto fra la quantità di elettricità che passa attraverso la sezione ed il tempo impiegato per attraversare la sezione, purché si assuma come intervallo di tempo un valore molto piccolo, anzi tanto piccolo da poter considerare che in tale intervallo di tempo le cariche attraversino la sezione praticamente con la stessa velocità.

In tal caso dunque l'intensità di corrente, la quale non sarà più costante nel tempo, poiché il fluire delle cariche non avviene più con ritmo costante, sarà esprimibile con la formula:

1.23-3 $$i = \frac{dq}{dt} \qquad \text{(corrente variabile)},$$

dove dq rappresenta la quantità di elettricità che attraversa la sezione considerata nel tempo dt. Poiché tale intervallo di tempo è piccolissimo (infinitesimo) altrettanto piccolissima (infinitesima) sarà la quantità di elettricità che passerà attraverso la sezione S.

Si noti a questo punto come le grandezze fisiche variabili nel tempo (cioè non costanti) vengano indicate con lettera minuscola (infatti nella formula 1.23-3 tanto la corrente che la quantità di elettricità compaiono con lettera minuscola). Con questa convenzione sarà così assai facile poter distinguere le grandezze variabili da quelle costanti. D'altronde per indicare una quantità molto piccola (infinitesima), secondo un simbolismo matematico universalmente accettato, basterà premettere il simbolo d alla grandezza considerata; mentre con il simbolo Δ si intenderà indicare una quantità piccola, però non infinitesima.

Naturalmente l'intensità di corrente è una grandezza fisica: come tale sarà perciò misurabile ed avrà una unità di misura. Precisa-

mente quale unità di misura è stato scelto l'ampere (abbreviato A) (²), che può essere definito, in base alla formula 1.23-2, come la corrente dovuta ad un movimento uniforme di cariche corrispondenti ad una quantità di elettricità pari ad un coulomb le quali attraversano la sezione

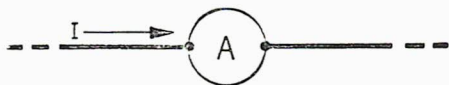



Fig. 1.23-2

considerata in un intervallo di tempo della durata di un secondo. Si ha cioè:

1.23-4
$$1 \text{ ampere} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ secondo}},$$

da cui si deduce anche che il coulomb, unità della quantità di elettricità, può essere definito come l'ampersecondo (abbreviazione A sec).

È importante notare che la corrente elettrica può essere dovuta sia a movimento di cariche positive che negative. Benché in natura sia più diffuso il movimento di cariche elettriche negative (poiché la conduzione dovuta ad elettroni liberi è di gran lunga più diffusa ed importante di quella dovuta agli ioni positivi) tuttavia, per ragioni storiche, rimane che ancora oggi si debba considerare come verso della corrente quello dovuto al movimento di cariche positive, cioè quello contrario al movimento degli elettroni.

Come si è detto, l'intensità della corrente elettrica è una grandezza fisica che può essere misurata. A ciò provvedono particolari strumenti denominati *ampermetri*, i quali vengono inseriti nel conduttore in modo da essere attraversati essi stessi, come il conduttore, da tutte le cariche elettriche in movimento (vedi fig. 1.23-2).

1.24 Densità di corrente

Si consideri un corpo conduttore omogeneo, ad esempio un filo di rame, nel quale vi sia un movimento continuo (costante) di elettroni. La corrente elettrica allora si distribuirà nel conduttore stesso in modo uniforme, cioè, preso un elemento infinitesimo di area dS nella sezione S, la corrente dI (anche la corrente sarà infinitesima) che l'attra-

(²) L'ampere costituisce la quarta unità fondamentale del sistema Giorgi.

versa non dipenderà dalla sua particolare posizione nella sezione (punto P_1, P_2, ..., fig. 1.24-1).

D'altronde, cosa rappresenterà il rapporto fra l'intensità di corrente I e la sezione S attraverso la quale fluisce la stessa corrente I? Evidentemente rappresenta la densità di corrente che si ha in quella

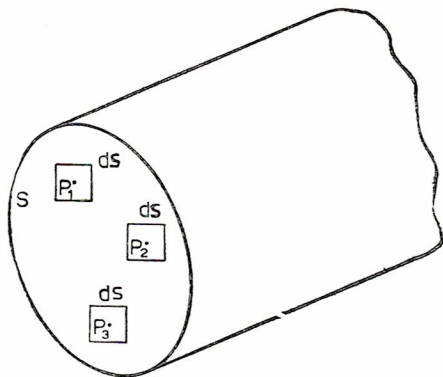



Fig. 1.24-1

sezione, poiché essa altro non è che la corrente riferita all'area attraverso la quale essa stessa fluisce.

Indicata perciò con il simbolo σ questa nuova grandezza elettrica avremo, se la corrente è uniformemente distribuita nella sezione, che:

1.24-1 $$\sigma = \frac{I}{S} \qquad \text{(corrente continua).}$$

Nel caso invece che la corrente non dovesse essere uniformemente distribuita nella sezione [1] si avrà una densità di corrente variabile da punto a punto nella sezione stessa, ed il suo valore si troverà allora facendo il rapporto fra la corrente di valore infinitesimo che transita attraverso la sezione pure infinitesima dS posta nel punto considerato e l'area dS stessa. Si avrà cioè:

1.24-2 $$\sigma = \frac{dI}{dS}.$$

In base alle formule 1.24-1 e 2 la densità di corrente si misurerà in ampere/metro quadrato (abbreviato A/m^2).

È importante notare che la superficie S, se finita, oppure la superficie dS, se infinitesima, di cui ora si è parlato, deve rappresentare un'area normale alla direzione individuata dal moto delle cariche elettriche. Più precisamente la normale all'area considerata dovrà essere parallela al vettore che rappresenta la velocità delle cariche in moto attraverso la

---

[1] Ciò può avvenire in pratica quando la corrente è rapidamente variabile nel tempo.

superficie (vedi fig. 1.24-2*a*) [2]; in caso contrario la densità di corrente verrà a dipendere dall'angolo α formato dalla normale alla superficie con il vettore che rappresenta la velocità delle cariche in movimento attraverso la superficie stessa [3] (vedi fig. 1.24-2*b*).

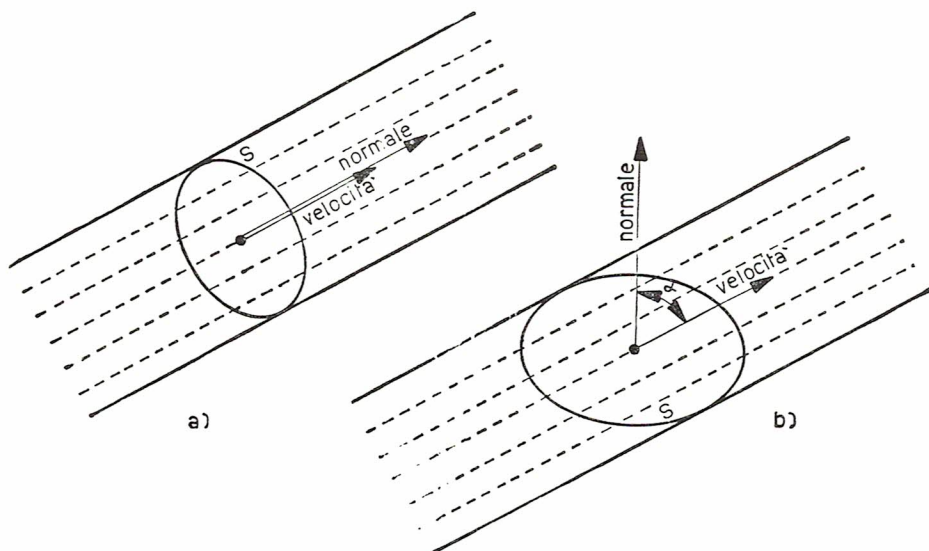



Fig. 1.24-2

1.25 Problemi di applicazione al § 1.2

Esercizio 1.251

Su di una superficie conduttrice cadono, e vengono portati via, ogni secondo 10^{12} elettroni ed ogni 10 secondi 10^{12} ioni positivi tetravalenti. Si trovi il valore in μA della corrente cui queste cariche danno luogo.

Soluzione

La quantità di elettricità corrispondente a 10^{12} elettroni ammonta a:

$$Q_{el} = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{12} = 1{,}60 \cdot 10^{-7}\ C\ ,$$

---

[2] La superficie deve essere cioè una sezione *retta*.

[3] Precisamente in questo caso la densità di corrente sarà espressa tramite la seguente formula $\sigma = \dfrac{I}{S \cos \alpha}$.

per cui, tenendo conto dei soli elettroni, la corrente varrebbe:

$$I_{el} = \frac{Q_{el}}{t} = 1{,}60 \cdot 10^{-7} = 0{,}16 \ \mu A \ .$$

D'altronde la quantità di elettricità corrispondente a 10^{12} ioni positivi tetravalenti ammonta a:

$$Q_{ioni} = 4 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{12} = 6{,}40 \cdot 10^{-7} \ C \ ,$$

per cui la corrente relativa varrà:

$$I_{ioni} = \frac{Q_{ioni}}{t} = \frac{6{,}40 \cdot 10^{-7}}{10} = 0{,}064 \ \mu A \ .$$

In definitiva la corrente totale risulta:

$$I = I_{ioni} - I_{el} = (0{,}064 - 0{,}16) \ 10^{-6} = -0{,}096 \ \mu A \ .$$

Il segno meno sta ad indicare che il verso della corrente risultante è fisicamente quello delle cariche negative, cioè contrario a quello convenzionale.

Esercizio 1.252

Un tubo è costituito da tre tubicini fra di loro isolati (vedi fig. 1.252-1). In ciascun tubicino fluisce una corrente elettrica il cui verso e valore

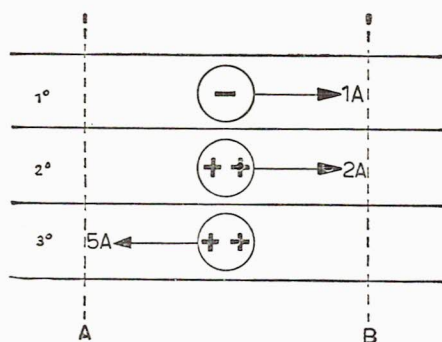



Fig. 1.252-1

appaiono in figura. Si sa d'altronde che la corrente nel primo tubicino è costituita da ioni negativi monovalenti mentre nel secondo e nel terzo è costituita da ioni positivi bivalenti.

Si trovi il valore della corrente risultante che transita nel tubo e il suo verso.

Soluzione

La corrente nel primo tubicino si somma con quella del terzo, poiché una corrente di cariche negative che procedono in un certo verso (verso da A a B per la corrente del primo tubicino) equivale ad una corrente dello stesso valore costituita da cariche positive che procedono in verso contrario (quindi verso da B ad A per la corrente del primo tubicino).

Perciò l'ammontare della corrente totale nel tubo varrà:

$$I = I_1 + I_3 - I_2 = 1 + 5 - 2 = 4 \text{ ampere} .$$

Il verso risultante è quello corrispondente a cariche positive che si muovono da B verso A.

Esercizio 1.253

Si trovi il valore, in ampere, della corrente cui dà luogo un elettrone che ruota in uno spazio vuoto con la velocità costante di 200000 km/sec,

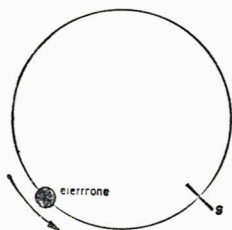



Fig. 1.253-1

descrivendo un'orbita circolare avente un raggio di 10 metri (vedi fig. 1.253-1).

Soluzione

Il valore della corrente da trovare è dato dalla quantità di elettricità che passa attraverso una sezione S generica, posta sulla traiettoria, nell' intervallo di tempo corrispondente ad un secondo.

D'altronde in un secondo l'elettrone, poiché in questo tempo esso percorre un cammino $d = 200 \cdot 10^6$ metri, attraverserà la sezione S un numero n di volte pari a:

$$n = \frac{d}{2\pi r} = \frac{200 \cdot 10^6}{62,8} = 3,183 \cdot 10^6 \text{ (}^1\text{)} .$$

(1) Indicando con ω la velocità angolare dell'elettrone si ha anche che $n = \omega/2\pi$; d'altronde $\omega =$ velocità/raggio, per cui in definitiva $n =$ velocità/$2\pi \cdot$raggio.

Questo numero rappresenta ovviamente anche il numero di giri compiuti dall'elettrone in un secondo.

Pertanto in un secondo la quantità di elettricità che fluisce attraverso la sezione S ammonterà a:

$$Q = n \cdot q_e = 3{,}183 \cdot 10^6 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} = 5{,}1 \cdot 10^{-13}\ C\ ,$$

dando luogo perciò ad una corrente del valore di $0{,}51 \cdot 10^{-12}\ A$, cioè di 0,51 picoampere.

1.3 Generatori elettrici

1.31 Come viene generata la corrente

Si è visto che la corrente elettrica è costituita da un insieme di cariche in movimento. Ma queste non potranno essere in movimento ordinato lungo un certo percorso, ad esempio lungo un filo conduttore, se non si provvederà ad agire su di esse con un mezzo adeguato dall'esterno ([1]).

Ora i dispositivi elettrici che consentono di agire in modo tale da costringere le cariche elettriche a muoversi con continuità, e a costituire quindi un flusso ordinato, sono i cosiddetti *generatori elettrici*. Senza la dislocazione di queste apparecchiature lungo i conduttori non è possibile avere corrente elettrica nei conduttori stessi, perché gli elettroni di conduzione risultano continuamente ostacolati nel loro movimento (ciò si vedrà meglio nel § 1.4). Il generatore elettrico dovrà servire quindi per fornire alle cariche elettriche elementari l'energia in quantità sufficiente perché esse si possano mantenere in movimento.

Scende da ciò che i generatori elettrici sono da considerarsi come generatori di energia elettrica, o meglio, poiché l'energia non può essere creata o distrutta, come quei dispositivi che convertono in energia elettrica altre forme di energia (meccanica come nelle dinamo, chimica come nelle pile ed accumulatori, luminosa come nelle fotocellule, ecc. ....).

Si consideri dunque un generatore elettrico, il quale per il momento

---

([1]) Un movimento disordinato di molte cariche elementari, come quello dovuto all'agitazione termica, la quale determina appunto un movimento in tutti i versi, non può dar luogo ad effetti di corrente.

verrà schematizzato come in fig. 1.31-1. Questa, pur nella sua grande semplicità, mostra anzitutto come il generatore possieda due estremi liberi, detti morsetti o poli del generatore. Ora, quando questo è in funzione, succede che, ad opera di certe forze che nascono internamente al dispositivo stesso, le cariche elettriche, che esso possiede allo stato libero ([2]), vengono sollecitate a muoversi, per cui ad un certo momento quelle di un certo segno si troveranno ad un estremo e quelle di segno

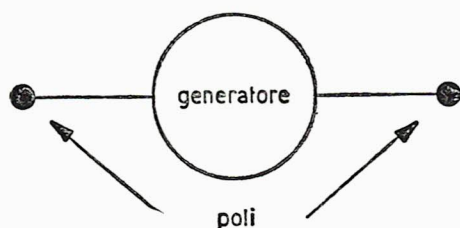



Fig. 1.31-1

opposto all'altro estremo. Un estremo risulterà carico perciò positivamente (polo positivo), mentre l'altro risulterà carico negativamente (polo negativo).

Si può subito comprendere allora che cosa succederà nel caso in cui il generatore sia costituito da un corpo conduttore, ad esempio di rame. In un polo del generatore vi sarà sovrabbondanza di elettroni di conduzione, mentre nell'altro vi sarà deficienza di elettroni di conduzione. Pertanto si avrà in definitiva che un polo del generatore si mostrerà carico negativamente (polo negativo), per l'apporto più o meno cospicuo di elettroni, mentre l'altro sarà carico positivamente (polo positivo), poiché ad esso sono stati sottratti appunto quegli elettroni che ora si trovano in eccesso al polo negativo.

Naturalmente la sottrazione di elettroni al polo che così diventa sempre più positivo non potrà continuare all' infinito. Infatti arriverà un certo istante in cui le forze interne del generatore non riusciranno più a portare gli elettroni dal polo positivo a quello negativo. Per spiegare fisicamente come venga raggiunto questo equilibrio è necessario accennare subito al fenomeno dell'attrazione o repulsione delle cariche elettriche.

1.32 Reazioni interne

L'Elettrostatica insegna che due cariche elettriche, la cui quantità di elettricità sia rispettivamente indicata con Q_1 e Q_2, si respingono quando sono dello stesso segno mentre si attraggono quando sono di segno opposto

---

([2]) Ad esempio elettroni di conduzione se il generatore è costituito da un insieme di conduttori di rame, come è nella dinamo.

con una forza F la quale è direttamente proporzionale al valore della quantità di elettricità posseduta ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza $\left(F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2}\right)$. Il richiamo di questo semplice fenomeno elettrostatico farà ora comprendere meglio le reazioni che avvengono entro il generatore elettrico.

Si pensi infatti che cosa accadrà internamente al generatore quando, ad esempio, un altro elettrone di conduzione verrà portato dalle forze interne verso il polo negativo : in base a quanto sopra accennato l'elettrone tenderà ad essere respinto dall' insieme costituito dagli altri elettroni ivi presenti (portati in precedenza), con una forza tanto maggiore quanto più grande sarà il numero degli elettroni già presenti nel polo. Ora, se la forza interna del generatore che agisce sull'elettrone sarà tale da vincere la suddetta forza repulsiva, l'elettrone riuscirà ad aggiungersi agli altri, determinando così un aumento della quantità di elettricità presente sul polo negativo e aumentando quindi quella forza di repulsione che verrà ad agire sul prossimo elettrone in arrivo.

Ovviamente il processo di movimento di elettroni internamente al generatore si arresterà quando la forza interna del generatore, alla cui azione si deve il movimento degli elettroni dal polo positivo a quello negativo internamente al generatore, risulterà eguale alla forza repulsiva dovuta all' insieme degli elettroni che costituiscono la carica del polo negativo. Naturalmente questo equilibrio avviene proprio perché la forza interna di un generatore elettrico ha un ben definito valore, valore che sarà in relazione con le caratteristiche del generatore stesso. Ad esempio per una dinamo tale forza interna sarà direttamente proporzionale al numero di giri di rotazione compiuti dalla parte rotante.

1.33 Differenza di potenziale

Fra i parametri più salienti che caratterizzano un generatore elettrico vi è la cosiddetta *differenza di potenziale* che esso presenta ai suoi morsetti. Questa, come si vedrà fra breve, costituisce la manifestazione concreta e tangibile di quelle forze interne che agiscono sullo spostamento delle cariche elettriche entro il generatore stesso.

Come si è detto nel precedente paragrafo, sul polo negativo di un generatore elettrico in funzione, avente i morsetti aperti [1], si trova accumulato un certo numero di cariche elementari negative. Queste d'altronde, se ad un certo momento vi fossero le condizioni esterne favorevoli, che possono essere realizzate praticamente collegando ad esem-

---

[1] Si dice che un generatore è a morsetti aperti o a vuoto quando i suoi morsetti non sono collegati con altri dispositivi elettrici, o, meglio, quando esso non eroga corrente.

pio il polo positivo con quello negativo mediante un buon conduttore dell'elettricità, tornerebbero al polo dal quale erano state sottratte ([2]).

Ma in questo passaggio di cariche, che esternamente da un polo di un generatore si portano all'altro, si deve vedere un fatto fondamentale importante, precisamente la restituzione di quella energia che il generatore aveva fornito a quelle stesse cariche per farle passare internamente a sé ([3]).

Un generatore elettrico in funzione potrà dunque essere caratterizzato dal valore di questa energia che ciascuna carica elementare ha ricevuto nel passaggio interno al generatore, energia che essa possiede ora sotto forma potenziale rispetto all'altro polo e fintantoché essa rimarrà ovviamente sul suo polo. Precisamente il valore dell'energia potenziale posseduta da una carica qualsiasi presente su di un polo, rispetto all'altro polo, risulta appunto proporzionale alla differenza di potenziale esistente fra i due poli. La differenza di potenziale di un generatore elettrico si manifesta dunque ai suoi morsetti. Come già detto, questa energia potenziale potrà essere trasformata in altra energia (calore, lavoro) non appena le cariche si potranno muovere in un circuito esterno al generatore, cioè non appena il generatore non avrà più i suoi morsetti aperti, ma saranno chiusi su di un circuito utilizzatore.

Scende da ciò che, indicata col simbolo V la differenza di potenziale (abbreviato *d.d.p.*) esistente fra i due poli del generatore, l'energia potenziale W posseduta rispetto all'altro polo da una carica qualsiasi Q posta su di un polo sarà eguale al prodotto della quantità di elettricità posseduta dalla carica per la *d.d.p.* in gioco, cioè in formula:

1.33-1 $$W = Q\,V \text{ } ([4]) .$$

Ciò è logico se si pensa che, a parità di differenza di potenziale V, il lavoro o l'energia potenziale W è direttamente proporzionale al valore della quantità di elettricità Q che prende parte al fenomeno; mentre a parità di Q, l'energia posseduta da una certa carica sarà pure direttamente proporzionale alla *d.d.p.* V che la interessa.

È importante ricordare come quanto ora esposto a proposito della *d.d.p.* di un generatore elettrico possa essere esteso alle *d.d.p.* presenti

---

([2]) Si consideri infatti che le cariche negative vengono attratte da quelle positive: per questo appunto gli elettroni di conduzione tenderanno sempre a portarsi al polo positivo.

([3]) Il generatore per portare ad esempio cariche negative al polo negativo deve vincere, come si è detto, le forze di repulsione di natura elettrostatica: per vincere queste forze si dovrà compiere perciò un lavoro, cioè impiegare una certa quantità di energia (meccanica nelle dinamo, chimica nelle pile, ecc. ....).

([4]) Quindi $V = \dfrac{W}{Q}$, cioè per definizione la *d.d.p.* è il rapporto fra il valore dell'energia potenziale posseduta da una carica e il valore della quantità di elettricità della carica stessa.

in un qualsiasi sistema o dispositivo elettrico ove siano cariche elettriche in movimento (o anche in quiete, come si vedrà nell' Elettrostatica).

Si ricordi ancora che correntemente, molte volte, la *d.d.p.* viene indicata col nome di *tensione*. Così se fra due punti si manifesta una certa *d.d.p.* V si potrà dire, con linguaggio del tutto equivalente, che fra quei due punti esiste una certa *tensione* V.

Naturalmente la *d.d.p.* di un generatore, o quella presente fra due punti qualsiasi di un sistema elettrico, rappresenta una grandezza fisica ben definita. Come tale sarà misurabile ed avrà una sua unità di misura. Per definizione l' unità di *d.d.p.* fra due punti si ha (vedi formula 1.33-1)

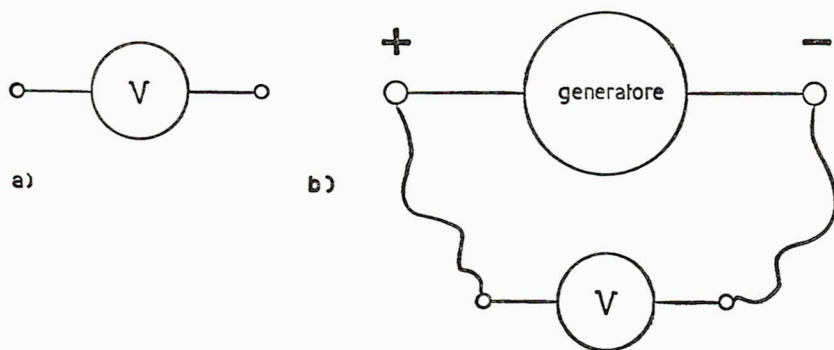



Fig. 1.33-1

quando l'energia potenziale posseduta rispetto ad uno dei punti da una carica elettrica unitaria positiva (1 coulomb), posta nell'altro punto, è eguale all' unità (1 joule). Questa unità di misura è stata indicata col nome di volt (abbreviato V). Si ha quindi per definizione che:

$$1.33\text{-}2 \qquad 1 \text{ volt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ coulomb}}.$$

Per la misurazione pratica delle *d.d.p.* vengono costruiti dei particolari strumenti di misura, detti *voltmetri*. Sono questi dei dispositivi aventi due morsetti (vedi fig. 1.33-1*a*), i quali debbono essere inseriti nei due punti fra i quali si rende necessaria la misura della *d.d.p.* La fig. 1.33-1*b* riporta il collegamento da eseguire per poter misurare la differenza di potenziale di un generatore.

Così vengono costruiti dei campioni di *d.d.p.* allo scopo di rendere disponibili nei laboratori dei valori di differenza di potenziale costanti e noti con grande precisione. Purtroppo non è possibile costruire un generatore campione che abbia esattamente un volt ai suoi morsetti, ma solamente dei campioni aventi valori leggermente differenti. Precisamente oggi viene universalmente usato, come generatore campione di *d.d.p.*

continue, la pila Weston, la quale fornisce ai suoi morsetti una *d.d.p.* di valore eguale a 1,019 V, purché la pila sia a morsetti aperti e si trovi alla temperatura di 20 °C.

1.34 Problemi di applicazione al § 1.3

Esercizio 1.341

Si trovi il valore della *d.d.p.* ai morsetti aperti di un generatore elettrico sapendo che l'energia posseduta da ciascun elettrone libero presente sul polo negativo ammonta a 0,0002 picojoule.

Soluzione

La differenza di potenziale ai morsetti di un generatore è esprimibile con la formula $V = W/Q$, dove W rappresenta l'energia potenziale posseduta da una carica qualsiasi posta su di un polo rispetto all'altro polo e Q la sua quantità di elettricità.

Nel nostro caso la carica è rappresentata da un elettrone, per cui $Q = q_e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ coulomb ; mentre $W = 2 \cdot 10^{-16}$ joule, come risulta dal problema. Pertanto la *d.d.p.* ai morsetti ammonterà a:

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{2 \cdot 10^{-16}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}} = 1250 \text{ volt} .$$

Esercizio 1.342

Che cosa può esprimere il termine *volt-elettrone*?

Soluzione

Il termine volt-elettrone indica un'energia, ad esempio l'energia potenziale posseduta da una carica elettrica la cui quantità di elettricità sia quella corrispondente ad un elettrone, sottoposto alla differenza di potenziale del valore di un volt.

Esercizio 1.343

Quanti volt-elettrone corrispondono ad un joule?

Soluzione

Poiché l'energia di un volt-elettrone ammonta a:

$$1 \text{ volt-elettrone} = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ joule},$$

ad 1 joule corrisponderanno:

$$1 \text{ joule} = \frac{1}{1{,}60 \cdot 10^{-19}} = 6{,}25 \cdot 10^{18} \text{ volt-elettrone}.$$

1.4 Resistenza elettrica

1.41 Fenomeno della conduzione

Tutti i corpi manifestano una certa resistenza al passaggio della corrente elettrica. Il fluire degli elettroni avverrà d'altronde con maggiore o minore difficoltà a seconda della natura fisica del materiale costituente il corpo. Ciò è dovuto in sostanza al fatto che gli elettroni, nel loro movimento ordinato necessario per produrre una corrente, sono soggetti ad una specie di *attrito* interno da parte del materiale.

Per spiegare meglio il fenomeno fisico della resistenza elettrica si pensi a ciò che succede entro un filo metallico, ad esempio di rame, quando in questo filo vi sia passaggio di corrente elettrica. Nella massa costituente il conduttore si avrà allora un movimento ordinato di un certo numero di elettroni, precisamente quelli di conduzione.

Si consideri ora uno di questi elettroni. Quale sarà il suo effettivo movimento entro la massa del conduttore? Si può pensare indubbiamente che l'elettrone potrà procedere libero solamente per un brevissimo tratto, poiché esso certamente verrà a collidere contro il primo atomo che si troverà sulla sua traiettoria. L'elettrone perderà perciò nell' urto quell'energia cinetica che esso aveva acquistato mentre si muoveva libero (1). Ne consegue perciò, in primo luogo, che l'elettrone abbisognerà di nuova energia per poter riprendere il suo movimento con una certa accelera-

(1) Fornitagli dall'esterno, ad esempio da un generatore elettrico.

zione, al fine di mantenere così una certa velocità media, e in secondo luogo che si avrà un riscaldamento del materiale, poiché l'energia cinetica perduta nell' urto dall'elettrone si sarà trasformata in calore. Ciò che si è detto per un elettrone varrà naturalmente per tutti gli elettroni liberi che partecipano al movimento.

Il passaggio della corrente elettrica nei corpi conduttori presenta dunque questi due aspetti energetici fondamentali: da un lato la necessità di somministrare continuamente agli elettroni di conduzione, affinché essi costituiscano un flusso ordinato di cariche, una certa quantità di energia; dall'altro lato la continua conversione di questa energia in calore.

La conclusione è dunque la seguente: la corrente elettrica non può mantenersi nei corpi spontaneamente, una volta che essa vi sia stata instaurata [2], ed è naturale pensare che ciò sia dovuto ad una specie di *attrito* cui sono soggette le cariche elettriche elementari quando si muovono entro la massa della materia stessa, come si è detto al principio di questo paragrafo.

1.42 Materiali conduttori, semiconduttori, isolanti

Non tutti i corpi si comportano allo stesso modo dal punto di vista del passaggio dell'elettricità. Ovviamente ciò è in stretta relazione con la struttura interna del materiale e con il comportamento degli elettroni più periferici dei loro atomi.

Così i materiali si dicono *conduttori* quando i loro atomi possiedono elettroni periferici che non sono stabilmente vincolati ai rispettivi nuclei (elettroni di conduzione). Il grado di conduzione offerto dal materiale dipenderà dal grado di *attrito* che detti elettroni liberi troveranno nel muoversi entro la materia stessa.

Viceversa i materiali si dicono *isolanti* quando i loro atomi non possiedono elettroni liberi, cioè quando tutti gli elettroni di un atomo sono stabilmente vincolati al nucleo. Potrebbe sembrare allora che entro un corpo isolante non fosse possibile l' instaurarsi di un regime di corrente. In realtà, pur essendo gli elettroni più periferici molto legati al proprio nucleo, tuttavia, sotto l'azione di forze elettriche esterne che agiscono ovviamente su tutti gli elettroni degli atomi presenti nel materiale, quindi su di un numero veramente enorme, si verifica che qualche elettrone più periferico possa essere strappato dalla sua orbita. Naturalmente gli elettroni strappati sono pochissimi in confronto con il numero enorme di atomi presenti. È chiaro quindi che la conduzione elettronica nei materiali isolanti sarà estremamente evanescente.

---

[2] Fa eccezione qualche metallo (stagno, piombo, tantalio, ...) alla temperatura vicina allo zero assoluto. Questo fenomeno viene indicato col nome di *superconduzione*.

Un'altra categoria di materiali oggi molto importante, anche se costituita da un numero esiguo di sostanze (ossido di rame, solfuro di piombo, ossido di titanio, selenio, germanio, silicio, ...), è quella cosiddetta dei *semiconduttori*, indicata con tale nome perché il grado di conduzione è intermedio fra quello dei conduttori e quello degli isolanti. In questi materiali la conduzione avviene ancora per elettroni, anche se il meccanismo è un po' più complesso.

A questo punto si vuole far notare che nelle tre categorie di materiali sopra citati la conduzione è del tipo *elettronico*, poiché si basa sugli elettroni. Viceversa in molti corpi allo stato liquido e soprattutto gassoso la conduzione è dovuta alla presenza di ioni formatisi in seguito a qualche processo specifico. Si dirà in tal caso che la conduzione è del tipo *ionico.*

1.43 Caduta di tensione elettrica

Si è detto che per mantenere un flusso di cariche in movimento attraverso la materia occorre fornire alle cariche stesse quell'energia che esse perdono urtando continuamente contro gli ostacoli (atomi e molecole costituenti la materia stessa) che si frappongono lungo il loro cammino. Ora questa energia può essere fornita da generatori elettrici.

Si consideri infatti un corpo conduttore, ad esempio un filo metallico, collegante i due morsetti di un generatore elettrico (vedi fig. 1.43-1).

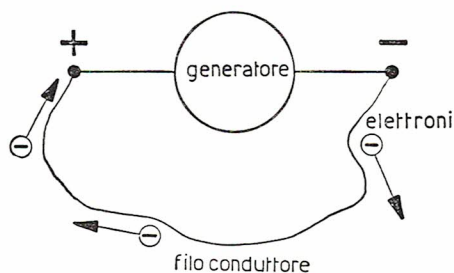



Fig. 1.43-1

Si è visto che ai suoi poli è disponibile una certa quantità di energia potenziale; sarà appunto tale energia che servirà a far muovere gli elettroni di conduzione entro il conduttore.

Scende subito da ciò un'importante osservazione, e cioè che maggiore è l'energia fornita a ciascun elettrone di conduzione più veloce sarà il suo movimento (medio) in seno al materiale e quindi più elevata l'intensità di corrente cui darà luogo. D'altronde manifestazione dell'energia potenziale, che può convertirsi in energia cinetica, fornibile dal generatore è proprio la differenza di potenziale presente ai suoi morsetti e di cui si è parlato

nel § 1.33 [1]. Quindi in definitiva, tanto maggiore sarà la *d.d.p.* del generatore ed altrettanto più grande risulterà il valore dell' intensità di corrente che fluirà nel conduttore collegato al generatore stesso.

È importante notare a questo proposito che il concetto di *d.d.p.* visto nel caso particolare del generatore elettrico può essere esteso ad un qualsiasi dispositivo avente due morsetti : ad esempio ad un conduttore percorso da corrente o anche ad una sua parte compresa fra due qualsiasi punti (vedi fig. 1.43-2). In questo caso la *d.d.p.* viene denominata pure *caduta di tensione.*

Precisamente fra due punti qualsiasi di un corpo (ad esempio fra i punti A e B del conduttore di fig. 1.43-2) esisterà una *d.d.p.*, o anche,

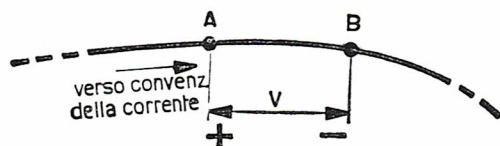



Fig. 1.43-2

come si è detto, si manifesterà una caduta di tensione, se, posta in uno dei due punti una carica elettrica di segno opportuno, questa verrà a possedere dell'energia potenziale rispetto all'altro punto. Il valore della *d.d.p.* che si manifesta fra quei due punti sarà calcolabile allora tramite il valore di questa energia potenziale, precisamente la relativa *d.d.p.*, o caduta di tensione, V potrà essere espressa mediante la ben nota formula :

1.43-1 $$V = \frac{W}{Q},$$

essendo Q la quantità di elettricità della carica considerata posta in uno dei due punti (ad esempio un elettrone posto in B di figura 1.43-2) e W l'energia potenziale relativa alla quantità di elettricità Q.

Naturalmente W rappresenta, in base al principio della conservazione dell'energia, qualora le cariche siano in effettivo movimento fra i due punti considerati, l'energia cinetica che verrà dissipata lungo il percorso compreso fra quei due punti stessi, punti fra i quali si manifesta appunto la caduta di tensione V.

---

[1] A dire il vero, nel § 1.33 si è parlato solo del caso in cui il generatore ha i morsetti aperti ; mentre ora essi sono chiusi su di un conduttore. Tuttavia il meccanismo del trasporto delle cariche internamente al generatore rimane praticamente lo stesso, anche se ora le forze interne devono portare continuamente gli elettroni dal polo + a quello —, internamente, affinché questi stessi elettroni fluiscano con continuità, esternamente, dal polo — a quello +, per dare luogo alla corrente nel conduttore.

Da un punto di vista ancora più generale si potrà affermare che la *d.d.p.*, o la caduta di tensione, V esistente fra due punti dati è rappresentata dal lavoro che si compie nel trasporto della carica elettrica unitaria (1 coulomb) fra quei due punti dati.

1.44 Legge di Ohm

Si consideri un conduttore, ad esempio un filo di rame, il quale sia percorso da corrente elettrica. Ciò esige, per quanto visto in precedenza, che ai suoi capi esista una *d.d.p.*. Si pensi ora di variare il valore di questa *d.d.p.*: è chiaro che dovrà variare l'intensità della corrente che fluisce attraverso il conduttore, ma con quale modalità?

A questo interrogativo risponde la legge di Ohm, la quale assicura che, entro certi limiti (la temperatura del conduttore deve rimanere costante), esiste una proporzionalità diretta fra il valore della tensione applicata e quello dell'intensità di corrente che scorre nel conduttore. Precisamente, detta V la tensione o la *d.d.p.* continua presente ai capi del conduttore ed I l'intensità della corrente continua che fluisce attraverso una sua sezione, si potrà scrivere che:

1.44-1 $$V = R\,I \qquad \text{(legge di Ohm)},$$

rappresentando con il simbolo R appunto il coefficiente di proporzionalità fra *d.d.p.* applicata al conduttore ed intensità della corrente che vi scorre. Naturalmente il valore del coefficiente di proporzionalità R dipenderà a sua volta dalle caratteristiche del conduttore percorso dalla corrente.

Pertanto, a parità di *d.d.p.* V applicata, la sostituzione di un conduttore con un altro di caratteristiche differenti porterà a modificare ovviamente il valore dell'intensità di corrente I.

1.45 Resistenza e conduttanza

Al coefficiente di proporzionalità R dell'espressione 1.44-1 si dà il nome di *resistenza elettrica*, poiché rappresenta quel parametro che sta ad indicare, col suo valore, il grado di *difficoltà* che gli elettroni di conduzione trovano nel muoversi entro la materia.

Naturalmente la resistenza elettrica costituisce una grandezza fisica, quindi tale da avere una sua unità di misura. Questa viene dedotta dalla stessa 1.44-1: un conduttore presenterà resistenza unitaria quando, avendo ai suoi capi una caduta di tensione del valore di un volt, verrà percorso da una corrente avente intensità di un ampere. Tale unità è stata denominata ohm (abbreviato Ω). Si potrà perciò scrivere che:

1.45-1 $$1\ \text{ohm} = \frac{1\ \text{volt}}{1\ \text{ampere}}.$$

Di questa unità esiste il relativo campione. Nei laboratori i campioni di resistenza vengono costruiti con speciali accorgimenti mediante conduttori costituiti da fili di particolari leghe metalliche molto stabili (manganina, ecc. ....).

Si desidera precisare ancora che la resistenza elettrica è una grandezza elettrica facilmente misurabile. Ciò viene realizzato mediante opportune apparecchiature (ponti, ohmmetri).

Dato un corpo, questo possiederà dunque fra due suoi punti, per quanto detto ora, una ben definita resistenza R. Molte volte però nelle applicazioni è più comodo considerare la grandezza inversa della resistenza, vale a dire la cosiddetta *conduttanza* (simbolo G). Sarà perciò ovviamente per un certo conduttore, per definizione,

1.45-2 $$G = \frac{1}{R}.$$

Naturalmente anche la conduttanza rappresenta una grandezza fisica. La sua unità di misura, il siemens (abbreviato S), altro non è che l' inverso dell'ohm.

Introdotto così il concetto di conduttanza, la legge di Ohm vista nel paragrafo precedente potrà essere scritta anche nel seguente modo:

1.45-3 $$I = G\,V\,,$$

forma assai comoda come si avrà occasione di vedere nel seguito.

1.46 Resistività e conducibilita

Pure importanti per le applicazioni tecniche sono due altri parametri, che derivano da quelli ora visti, precisamente la resistività elettrica e la conducibilità elettrica.

Si definisce resistività di un materiale (simbolo ρ) la resistenza offerta dall' unità di volume, cioè la resistenza che si manifesta fra le facce piane e parallele di un cubo del materiale in oggetto, cubo avente i lati di lunghezza unitaria (1 metro). La resistività è dunque una resistenza *specifica*.

L' importanza di questo nuovo parametro sta nel fatto che con esso è possibile calcolare la resistenza di un corpo, note le sue dimensioni geometriche e noto ovviamente anche il valore della sua resistività. Infatti la resistenza R offerta da un corpo rettilineo di sezione costante S e di lunghezza l può essere calcolata con la seguente formula:

1.46-1 $$R = \rho\,\frac{l}{S}\,,$$

formula che si ricorda assai facilmente considerando che la resistenza di un corpo cilindrico o prismatico è direttamente proporzionale alla sua lunghezza ed inversamente proporzionale alla sua sezione.

Una giustificazione della formula 1.46-1 può essere la seguente. Si faccia riferimento ad esempio alla formula $I = \frac{1}{R} V$ la quale, in virtù della 1.46-1, può essere scritta anche nella seguente forma $I = \frac{S}{\rho l} V$.

Ora si comprenderà come, a parità di tensione applicata al conduttore di resistività ρ, un aumento della sua sezione, fermo restando il valore della sua lunghezza, porterà ad aumentare proporzionalmente il numero degli elettroni di conduzione che per unità di tempo attraverseranno la stessa sezione : ciò significa che si avrà un aumento proporzionale della corrente I, dimostrando così che la resistenza è diminuita pure proporzionalmente. Sezione e resistenza risultano dunque inversamente proporzionali fra di loro.

Se invece si aumenta la lunghezza del conduttore, fermo restando il valore della sua sezione, si avrà un aumento del percorso che gli elettroni di conduzione dovranno compiere. Poiché d'altronde l'energia messa a loro disposizione è sempre la stessa (nel ragionamento che si sta facendo la tensione rimane costante), proporzionalmente più lento risulterà il loro movimento entro il conduttore. È chiaro dunque che in questo secondo caso la corrente diminuirà proporzionalmente di intensità : ciò dimostra che la resistenza è aumentata proporzionalmente anch'essa. Lunghezza e resistenza risultano quindi direttamente proporzionali fra di loro.

Nel caso che il corpo non sia a sezione trasversale di area costante, converrà allora dividere il corpo dato in tanti tronchi (vedi fig. 1.46-1),

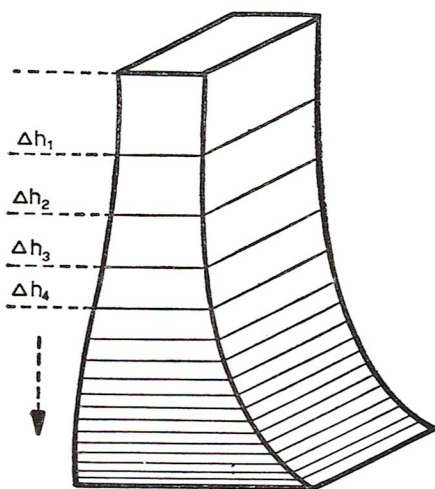



Fig. 1.46-1

in modo che questi si possano ritenere praticamente rettilinei e di sezione costante. La scelta del valore da assegnare all'altezza Δh di questi piccoli tronchi sarà in relazione con le accidentalità del corpo e con la precisione che si vorrà raggiungere nel risultato. Si calcolerà quindi la resistenza di ogni tronco con la formula:

1.46-2
$$\Delta R = \rho \frac{\Delta h}{S},$$

analoga a quella vista in 1.46-1; infine, per ottenere la resistenza totale R del corpo, se ne farà la somma ($R = \Sigma \Delta R$).

Dalla formula 1.46-1 risulta che l' unità di misura della resistività è l'ohm · metro. Infatti:

1.46-3
$$\rho = R \frac{S}{l} = \text{ohm} \frac{\text{metro}^2}{\text{metro}} = \text{ohm} \cdot \text{metro}.$$

Pertanto nella formula 1.46-1 l ed S dovranno essere espressi rispettivamente in metri e metri quadrati quando ρ è espresso in ohm · metro.

D'altronde sarà bene ricordare che nelle applicazioni pratiche sovente la resistività dei materiali viene data in altre unità di misura quali il microohm · centimetro (1) [abbreviato $\mu\Omega \cdot$cm ($1\ \mu\Omega \cdot \text{cm} = 10^{-8}\ \Omega \cdot m$)], oppure l'ohm · millimetro quadrato/metro (2) (abbreviato $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$), che rappresenta un' unità pratica, la quale è di grande utilità soprattutto nei calcoli di resistenza relativi a corpi filiformi (fili e piattine di rame, di nichel-cromo, ecc.), poiché la sezione e la lunghezza di questi viene espressa di solito rispettivamente in mm^2 e metri per ragioni di comodità.

Altro parametro pure importante è la conducibilità (simbolo γ), definito come l' inverso della resistività ρ. Precisamente sarà per definizione:

1.46-4
$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

La sua unità di misura risulta ovviamente l' inverso dell'ohm · metro, cioè il siemens/metro (abbreviato S/m).

La resistività, o la conducibilità elettrica, costituisce col suo valore un dato specifico di ogni sostanza. Pertanto dal valore assunto da questo parametro sarà possibile desumere in pratica se un certo materiale sarà, o non sarà, un buon conduttore dell'elettricità.

---

(1) $1\ \mu\ \Omega \cdot \text{m}^3$ rappresenta la resistenza in microohm fra una coppia di facce parallele di un cubo avente il lato di un centimetro.

(2) $1\ \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ rappresenta la resistenza di un corpo cilindrico o prismatico lungo un metro e di sezione un millimetro quadrato.

Osservando la tabella 1.46, che riporta i valori della resistività di alcuni fra i più comuni materiali, ci si accorge come il valore della resistività assuma valori assai differenti per i vari materiali riportati: naturalmente, più basso risulterà questo valore, migliore sarà il materiale dal punto di vista della conduzione elettrica.

Nella suddetta tabella i materiali sono stati suddivisi in tre gruppi.

Il primo gruppo di materiali è quello che possiede una resistività di valore molto basso, dell'ordine del $\mu\Omega \cdot cm$. Sono questi i veri materiali conduttori, cioè quelli che conducono molto bene l'elettricità.

I materiali del secondo gruppo mostrano invece una resistività di valore un po' più elevato. Sono questi i materiali con i quali si costruiscono dei corpi volutamente a conducibilità meno buona, corpi detti per questo *resistori* (3).

I materiali del terzo gruppo presentano invece una resistività di valore elevatissimo (miliardi di miliardi di $\mu\Omega \cdot cm$), non comparabile quindi con quello dei materiali dei due gruppi precedenti. Sono questi i materiali cosiddetti isolanti i quali, se sottoposti anche a *d.d.p.* notevoli, non sono attraversati praticamente da corrente. Con tali materiali si costruiscono ad esempio gli isolatori, cioè quei corpi che servono a separare elettricamente fra di loro i vari conduttori.

Osservando la tabella 1.46 si sarà notato un altro particolare e cioè che i valori della resistività sono stati riportati per la temperatura di 0 °C. Ciò è dovuto al fatto che la resistività dei vari materiali è funzione della temperatura da essi posseduta; precisamente, indicando con ρ_θ la resistività alla temperatura θ e con ρ_0 la resistività a 0 °C, secondo la seguente formula:

1.46-5
$$\rho_\theta = \rho_0 (1 + \alpha_0 \theta) ;$$

essendo α_0 il coefficiente di temperatura della resistività riferito alla temperatura di 0 °C (4) (il significato di α_0 verrà dato più avanti) e θ la temperatura in gradi centigradi assunta appunto dal materiale.

Dalle formule 1.46-1 e 1.46-5 si deduce che, nota la resistenza R_1 di un corpo alla temperatura θ_1, la resistenza R_2 dello stesso corpo alla temperatura θ_2 varrà:

1.46-6
$$R_2 = \frac{1 + \alpha_0 \theta_2}{1 + \alpha_0 \theta_1} R_1 ,$$

---

(3) Più in generale può essere definito *resistore* quel componente circuitale per il quale il parametro resistenza (R) è preponderante, vale a dire cioè anche quel componente che realizza in pratica volutamente una certa *resistenza*.

(4) Quando il coefficiente di temperatura della resistività dovesse essere riferito alla temperatura θ, anziché alla temperatura di 0 °C, si farà uso della seguente formula di passaggio: $\alpha_\theta = \alpha_0/(1 + \alpha_0 \theta)$.

Tabella 1.46

Materiale	Resistività a 0 °C		Coeff. α_0 10^{-3}
	$\mu\,\Omega\cdot$cm	$\Omega\cdot$mm²/m	
Argento	1,5	0,015	4,0
Rame	1,6	0,016	4,2
Bronzo fosforoso alta conduc.	1,8	0,018	4,0
Alluminio	2,6	0,026	4,3
Tungsteno	5	0,05	4,2
Ferro puro	10	0,10	5,0
Ferro dolce	13	0,13	4,8
Argentana	35	0,35	0,17
Manganina	40	0,40	0,01
Ferro-silicio	50	0,50	1,0
Costantana	50	0,50	0,008
Ferro-nichel	80	0,80	0,7
Mercurio	94	0,94	0,89
Nichel-cromo	100	1,00	0,1
Carbone	3000	30	— 0,4
Carta secca	10^{16}		
Bachelite	10^{17}		
Vetro	10^{18}		
Olio minerale	10^{19}		
Porcellana	10^{21}		
Paraffina	10^{22}		
Araldit	10^{22}		
Polistirolo	10^{24}		

da cui scende anche che l' incremento relativo subìto dalla resistenza R_1 sarà esprimibile nel seguente modo:

1.46-7 $$\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{\Delta R}{R_1} = \frac{\alpha_0\,(\theta_2 - \theta_1)}{1 + \alpha_0\,\theta_1}.$$

Dalla formula 1.46-7 risulta il significato fisico di α_0. Infatti α_0 $\left(\alpha_0 = \frac{\Delta R}{R_1}\,\frac{1 + \alpha_0\,\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right)$ rappresenta la variazione relativa di resistenza del corpo considerato quando la temperatura varia di un grado ($\theta_2 - \theta_1 = 1$), partendo dalla temperatura di 0 °C ($\theta_1 = 0$).

Si osservi ancora come non tutti i materiali siano caratterizzati da un coefficiente di temperatura della resistività positivo, il che significa che la resistività aumenta all'aumentare della temperatura. Alcuni mate-

riali infatti, come il carbone e i semiconduttori, sono caratterizzati da un coefficiente negativo: ciò vuol dire che all'aumentare della temperatura la loro resistività diminuirà di valore.

1.47 Problemi di applicazione al § 1.4

Esercizio 1.471

Si calcoli il diametro in millimetri e la lunghezza in metri di un conduttore di rame (resistività $1{,}75\ \mu\Omega\cdot\text{cm}$, densità ammessa $5\ A/\text{mm}^2$) per il quale la caduta di tensione deve essere di 0,5 volt quando è percorso da una corrente continua avente intensità di 10 ampere.

Soluzione

Il conduttore in oggetto deve avere una resistenza:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05 \text{ ohm}.$$

D'altronde il valore della sezione del conduttore dovrà essere tale da dar luogo, con corrente di 10 ampere, ad una densità di corrente pari a $5\ A/\text{mm}^2$. La sezione varrà perciò $2\ \text{mm}^2$, da cui si ricava facilmente che il diametro vale circa 1,6 mm.

La lunghezza del conduttore si ricaverà tramite la formula 1.46-1, ove ora tutto è noto, all' infuori appunto della lunghezza l. Sarà dunque, poiché $2\ \text{mm}^2 = 2\cdot10^{-6}\ \text{m}^2$ e $\rho = 1{,}75\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot\text{m}$, :

$$l = \frac{R\cdot S}{\rho} = \frac{0{,}05\cdot2\cdot10^{-6}}{1{,}75\cdot10^{-8}} = 5{,}72 \text{ metri}.$$

Naturalmente per il calcolo della lunghezza l si poteva trasformare il valore della resistività del rame da $\mu\Omega\cdot\text{cm}$ in $\Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$ (allora la resistività vale $0{,}0175\ \Omega\cdot\text{mm}^2/\text{m}$) per poter porre nella formula 1.46-1 direttamente la sezione in mm^2. Procedendo in questo modo si ottiene:

$$l = \frac{R\cdot S}{\rho} = \frac{0{,}05\cdot2}{0{,}0175} = 5{,}72 \text{ metri}.$$

Esercizio 1.472

Si vuole sostituire un conduttore di rame ($\rho_{Cu} = 1{,}75\ \mu\Omega\cdot\text{cm}$) lungo 100 metri e del diametro di 5 mm, nel quale deve fluire una corrente di 20 ampere, con un conduttore di alluminio ($\rho_{Al} = 2{,}90\ \mu\Omega\cdot\text{cm}$) avente la stessa lunghezza e che dia la stessa caduta di tensione.

Si trovi il diametro del nuovo conduttore.

Soluzione

I due conduttori devono avere la stessa resistenza R, poiché, quando sono percorsi da una corrente avente la stessa intensità, devono determinare la stessa caduta di tensione, come richiesto dal problema. Pertanto si potrà scrivere:

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{l}{S_{Cu}} = R_{Al} = \rho_{Al} \frac{l}{S_{Al}},$$

da cui si ricava che:

$$S_{Al} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} S_{Cu},$$

e quindi, poiché $S_{Al} = \pi\, d_{Al}^2/4$, $S_{Cu} = \pi\, d_{Cu}^2/4$, anche che:

$$d_{Al} = d_{Cu} \sqrt{\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}}}.$$

Con i dati del problema si otterrà perciò:

$$d_{Al} = 5 \sqrt{\frac{2{,}90}{1{,}75}} = 6{,}4 \text{ mm}.$$

Si noti che il problema è risolubile indipendentemente dalla lunghezza del conduttore, purché i due conduttori abbiano la stessa lunghezza. Così qui il problema risulta pure indipendente dal valore della corrente poiché si è fatta astrazione dal riscaldamento dei conduttori e quindi dalla temperatura effettivamente raggiunta dal materiale.

Esercizio 1.473

Si trovi il valore da assegnare al diametro di un filo di tungsteno ($\rho_{0°C} = 5{,}05\, \mu\Omega \cdot \text{cm}$, $\alpha_0 = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$) lungo 2 metri, col quale si deve costruire un resistore che produca energia calorifica pari a 90000 joule per ogni ora quando è attraversato da una corrente continua di 5 ampere. Temperatura del resistore 50 °C.

Soluzione

È necessario risalire tramite i dati del problema al valore della resistenza R del filo di tungsteno, il quale risulterà noto non appena tro-

vato il valore della *d.d.p.* V da applicare al resistore. Quest' ultimo valore d'altronde si ricaverà dalla formula 1.43-1 come segue:

$$V = \frac{W}{Q} = \frac{W}{I \cdot t} = \frac{90000}{5 \cdot 3600} = 5 \text{ volt}.$$

Pertanto la resistenza del filo di tungsteno ammonterà a:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{5}{5} = 1 \text{ ohm},$$

ed il diametro si calcolerà, trovato il valore della resistività alla temperatura di 50 °C:

$$\rho_{50\,^0\mathrm{C}} = 5{,}05(1 + 4{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 50)\,\mu\Omega \cdot \text{cm} = 6{,}11\mu\Omega \cdot \text{cm} = 0{,}0611\ \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m},$$

dalla formula 1.46-1 risolta rispetto al diametro:

$$d_{mm} = \sqrt{\frac{4 \cdot \rho \cdot l}{\pi \cdot R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}0611 \cdot 2}{3{,}14 \cdot 1}} \cong 0{,}4 \text{ mm}.$$

1.5 Circuiti elettrici

1.51 Nozioni generali

Nei precedenti paragrafi si sono viste l'esistenza e le caratteristiche di alcuni costituenti fondamentali i circuiti elettrici, come ad esempio i generatori elettrici, i conduttori, i resistori.

Ma che cosa si intende per circuito elettrico? Per circuito elettrico si deve intendere un insieme di generatori collegati fra di loro e ai dispositivi utilizzatori di energia elettrica tramite conduttori di collegamento, ed eventualmente tramite altri dispositivi atti alla manovra e alla sicurezza del circuito stesso, in modo tale da essere attraversati tutti dalla stessa corrente. In sostanza, un circuito elettrico si può considerare come una successione di elementi predisposti e collegati fra di loro affinché in essi possa scorrere una corrente elettrica. Poiché i generatori elettrici sono di tensione continua, la corrente nel circuito sarà pure continua.

Prima di procedere allo studio dei circuiti elettrici, è necessario però dare alcune precisazioni in merito agli elementi fondamentali costituenti un circuito.

a) *Generatori*

Questi si considerano di tensione (la definizione di generatore di tensione verrà data nel capitolo 2, § 2.2). Caratteristiche di un generatore di tensione sono: 1) la differenza di potenziale ai suoi morsetti quando questi sono aperti. Questa *d.d.p.* viene molte volte denominata col termine di forza elettromotrice (abbreviato *f.e.m.*) ed indicata con il simbolo V_0 (1); 2) la sua resistenza interna, indicata con il simbolo R_0. Non deve stupire che un generatore elettrico possieda anch'esso una resistenza: già si è detto che un generatore è da riguardarsi sempre come un corpo conduttore; 3) la polarità dei suoi morsetti. Contrassegnati ad esempio con A e B i due morsetti, è necessario sapere se il morsetto A è positivo o negativo rispetto all'altro. Si ricordi infatti che da tale segno dipenderà il verso della corrente il quale, poiché si deve considerare quello convenzionale, andrà dal + al —, esternamente al generatore, e quindi dal — al + internamente al generatore. Quest' ultimo verso è anche quello della forza interna (convenzionale) del generatore, cioè della forza che sposta le cariche positive dal polo negativo a quello positivo.

D'altronde per rappresentare circuitalmente un generatore occorrerà un certo simbolismo grafico. Il simbolo di fig. 1.51-1 sta ad indicare appunto l'elemento generatore di tensione continua che fornisce la *f.e.m.* V_0 (2), il quale avrà poi in serie una resistenza (3) per tener conto della

+ | —

Fig. 1.51-1

resistenza interna del generatore stesso. In definitiva un generatore di tensione verrà schematizzato, in simbolismo circuitale, come in

(1) Con l' indice 0 si contraddistinguono le grandezze a vuoto.

(2) Per convenzione, con una freccia che va dal polo negativo a quello positivo, posta vicino al simbolo grafico di un generatore (vedi fig. 1.51-2), si intende rappresentarne la forza interna convenzionale.

+ | —

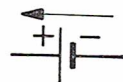



Fig. 1.51-2

Fig. 1.51-3

(3) Il simbolo della resistenza e della conduttanza è quello riportato in fig. 1.51-3. In realtà, la differenza fra resistenza e conduttanza è data esclusivamente dalla lettera (R o G) posta a lato.

fig. 1.51-4, ove a fianco di ciascun simbolo grafico è stato posto quanto è necessario per la sua completa identificazione (polarità, *f.e.m.* V_0, resistenza interna R_0).

b) *Conduttori di collegamento*

I conduttori di collegamento dovrebbero dar luogo, quando sono percorsi da corrente, a cadute di tensione di valore assai modesto rispetto

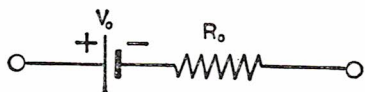



Fig. 1.51-4

alle tensioni in gioco nel circuito. Perché avvenga questo fatto, la resistenza dei collegamenti dovrebbe essere assai piccola in confronto di quella dell' intero circuito. Quando naturalmente non è possibile trascurare la loro resistenza, la presenza dei conduttori di collegamento verrà segnata nel circuito con il simbolismo grafico delle resistenze, che è quello riportato nella nota (3).

c) *Utilizzatori*

I circuiti elettrici hanno ragione di esistere poiché in essi sono presenti gli *utilizzatori*. Sono questi dei dispositivi che convertono l'energia elettrica in altro tipo di energia di cui si ha bisogno. Tipici utilizzatori sono le lampadine elettriche, le valvole elettroniche, le stufe e i forni elettrici, le saldatrici elettriche, ecc. ....

Da un punto di vista circuitale, questi utilizzatori possono essere schematizzati in corrente continua, per quanto riguarda il fenomeno energetico che in essi ha luogo, per mezzo di una resistenza. Pertanto gli utilizzatori verranno indicati col normale simbolismo grafico delle resistenze, con a fianco la lettera R_c (resistenza di carico) od R_u (resistenza dell'utilizzatore), indifferentemente.

Generatori, utilizzatori, conduttori di collegamento sono da riguardare dunque come i costituenti fondamentali di un circuito elettrico. Sono d'altronde elementi caratterizzati dall'aver ciascuno due terminali (per i generatori ed utilizzatori si parla più spesso di morsetti o poli). Da un punto di vista più generale potranno comunque essere considerati come elementi bipolari (cioè appunto a due poli) o, con parola più sintetica, *bipoli* (termine molto usato nella teoria dei circuiti). Più precisamente i generatori elettrici saranno da considerarsi *bipoli attivi* poiché essi sono in grado di imporre un regime di corrente ; mentre gli altri bipoli (conduttori, utilizzatori, ecc. ....) saranno per contrapposto

da considerarsi *bipoli passivi*, poiché essi non sono in grado di mantenere un qualsiasi regime di corrente.

1.52 Legge generale di Ohm

Prima di enunciare l' importantissima legge di Ohm per un circuito chiuso, e quindi per un tronco di circuito, è necessario richiamare ancora alcune questioni e convenzioni sulle *d.d.p.* e sulle cadute di tensione.

Dato un circuito chiuso, come quello riportato in fig. 1.52-1, è

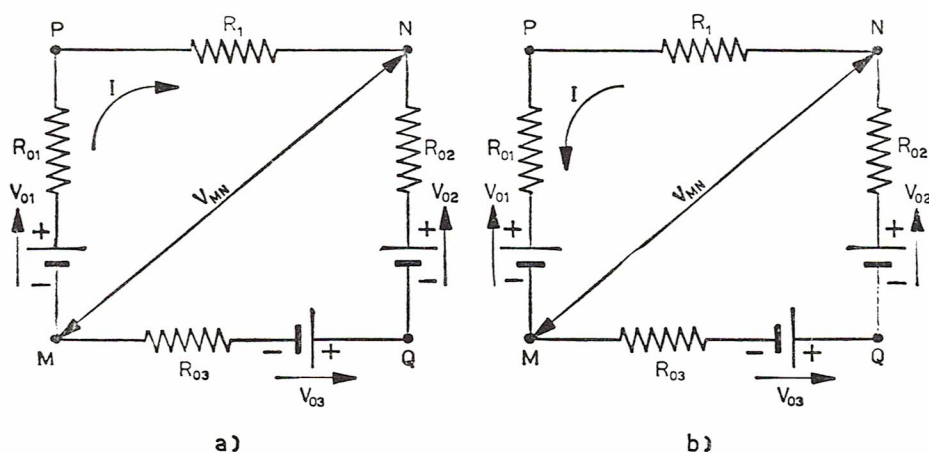



Fig. 1.52-1

chiaro anzitutto che la corrente elettrica fluirà in detto circuito, anche se vi sono più generatori aventi azione discorde, in un solo verso, il quale si supporrà noto (1). A tale proposito si richiama ancora l'attenzione sul fatto che il verso della corrente è quello convenzionale, cioè quello contrario al movimento degli elettroni.

Noto allora questo verso, risulteranno pure note per gli elementi resistivi le polarità delle cadute di tensione su di essi, precisamente la polarità positiva ove entra la corrente, la polarità negativa ove la corrente esce. Si veda ad esempio la fig. 1.52-2. Queste cadute di tensione sono da riguardarsi naturalmente come delle differenze di potenziale.

A questo proposito, si ricordi che può essere comodo indicare una differenza di potenziale fra i punti M ed N generici con il simbolo V_{MN}

---

(1) Qualora in realtà non fosse noto, si prenderà per la corrente un verso a piacere. Ciò non modifica minimamente le conclusioni alle quali si arriverà in questo paragrafo.

(vedi ad esempio fig. 1.52-1), ove l' indice MN del simbolo V sta appunto ad indicare chiaramente fra quali punti si intende riferita la *d.d.p.* Così è importante ricordare ancora che scrivendo V_{MN} si intende, per convenzione, che il punto M è a potenziale più alto di quello del punto N, il che equivale a dire che si suppone M positivo rispetto ad N. Per questo motivo, la *d.d.p.* V_{MN} non equivale alla V_{NM} (2).

Si riprenda dunque il circuito di fig. 1.52-1*a*, ed imposto un verso alla corrente, ad esempio quello destrogiro, si osservi qual è la situazione dei generatori ivi presenti. Ora, per il primo generatore, di *f.e.m.* V_{01}, la corrente I esce dal polo positivo per rientrare poi da quello negativo.

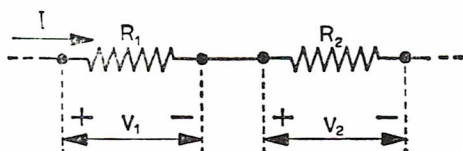



Fig. 1.52-2

Il generatore, in queste supposte condizioni, funziona pertanto come tale (3). Viceversa per il secondo generatore, di *f.e.m.* V_{02}, la corrente I entra nel polo positivo per uscire da quello negativo. Ciò è contrario a quanto visto sulla generazione della corrente elettrica. Il generatore V_{02} non potrà erogare energia elettrica, ma ne assorbirà invece (come verrà dimostrato più avanti): per questo motivo la *f.e.m.* V_{02} non può essere considerata positiva, bensì negativa (4). La tensione V_{02} non è cioè una forza elettromotrice ma una forza controelettromotrice (abbreviato *f.c.e.m.*), vale a dire una *f.e.m.* con azione negativa. Ciò si terrà conto ad esempio con un segno negativo.

È ora possibile enunciare la legge di Ohm per un circuito chiuso. Questa legge dice che alla somma delle *f.e.m.* (ΣV_0) che agiscono nel circuito, diminuita della somma delle eventuali *f.c.e.m.* (ΣV_{0c}) presenti, dovranno fare equilibrio tutte le cadute di tensione nei vari elementi resistivi ($I\Sigma R$) posti lungo il circuito. In formula si potrà scrivere cioè:

1.52-1 $$\Sigma V_0 - \Sigma V_{0c} = I\Sigma R$$ (legge di Ohm per un circuito chiuso).

Nel caso del circuito riportato in fig. 1.52-1*a* sarà dunque:

1.52-2 $$V_{01} - V_{02} - V_{03} = R_{01}I + R_1 I + R_{02}I + R_{03}I = (R_{01} + R_1 + R_{02} + R_{03})I\,,$$

poiché le tensioni V_{02} e V_{03} sono da considerarsi come *f.c.e.m.*

---

(2) Precisamente $V_{MN} = - V_{NM}$, poiché se M è positivo rispetto ad N, sarà viceversa N negativo rispetto ad M. Quindi V_{NM} sarà di segno opposto rispetto a V_{MN}.

(3) La corrente I infatti ha lo stesso verso della forza interna del generatore.

(4) La corrente I infatti ha verso contrario a quello della forza interna del generatore.

Supponendo di fare un caso numerico, in cui $V_{01} = 100$ volt, $V_{02} = 30$ volt, $V_{03} = 10$ volt e $\Sigma R = 10$ ohm, la corrente I nel circuito varrà :

1.52-3 $$I = \frac{V_{01} - V_{02} - V_{03}}{\Sigma R} = \frac{100 - 30 - 10}{10} = 6 \text{ ampere} .$$

Il fatto di avere trovato una corrente di valore positivo conferma che il verso considerato per la corrente I, cioè quello riportato in fig. 1.52-1*a*, è giusto.

Si consideri ora un circuito, formato con gli stessi elementi che appaiono in fig. 1.52-1*a* e collegati nello stesso modo, nel quale però sia stato imposto un verso di corrente opposto (sinistrogiro, come in fig. 1.52-1*b*). La legge di Ohm porterà a scrivere allora la seguente relazione :

1.52-4 $$- V_{01} + V_{02} + V_{03} = (R_{01} + R_1 + R_{02} + R_{03})I ;$$

poiché in questo caso per il generatore V_{01} il verso della corrente è discorde con quello della sua forza interna (pertanto V_{01} è da considerarsi ora come una *f.c.e.m.*) ; viceversa le tensioni V_{02} e V_{03} sono da considerarsi *f.e.m.*, quindi positive, per il motivo opposto. La corrente I varrà perciò :

1.52-5 $$I = \frac{- V_{01} + V_{02} + V_{03}}{\Sigma R} = \frac{- 100 + 30 + 10}{10} = - 6 \text{ ampere} .$$

Si è trovata dunque una corrente dello stesso valore, ma negativa. Quest'ultimo fatto ha il solo e semplice significato di mostrare che il verso sinistrogiro assegnato (arbitrariamente) alla corrente è sbagliato e che quindi in realtà la corrente fluisce nell'altro verso.

La conclusione che si può trarre dall'esempio è importante, perché si comprende come sia sempre perfettamente lecito imporre nel circuito un verso qualsiasi alla corrente ([5]). Sarà poi il segno che si troverà nella soluzione che dà l'intensità della stessa corrente a stabilire se tale verso dovrà considerarsi giusto o sbagliato, permettendo così di conoscere senza discussione il vero verso della corrente.

Ma la legge di Ohm si presta assai bene anche per esprimere la differenza di potenziale fra due punti di un circuito, cioè per calcolare appunto la *d.d.p.* presente agli estremi di un tronco di circuito.

Precisamente, la *d.d.p.* fra due punti generici M ed N di un tronco,

---

([5]) Quando nel circuito agisce una sola *f.e.m.*, o più *f.e.m.* di risultante nota, si assegnerà ovviamente alla corrente quel verso che coincide con il verso della forza interna del generatore nel primo caso, o della risultante nel secondo caso.

cioè la V_{MN}, è data dalla somma algebrica delle f.e.m. V_0 dei generatori ivi presenti (le V_0 da considerare positive sono quelle che, da sole, rendono positivo M rispetto ad N, le V_0 da considerare negative sono invece quelle che, da sole, rendono M negativo rispetto ad N) e dalla somma delle cadute di tensione (RI) che dovranno essere considerate positive se la corrente va da M a N, perché tali cadute rendono, qualora agissero da sole, M positivo rispetto ad N [6], negative nel caso contrario.

Si scriverà perciò, quando la corrente va da M verso N (fig. 1.52-3):

1.52-6 $$V_{MN} = \Sigma \pm V_0 + \Sigma RI\,;$$

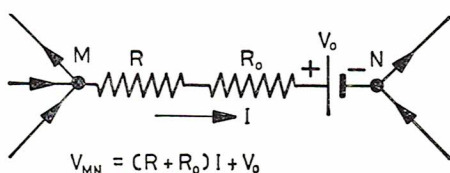
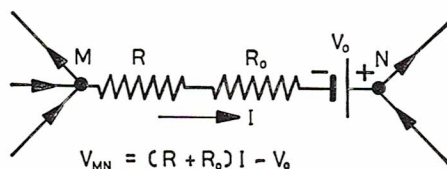



Fig. 1.52-3

mentre, se la corrente ha il verso da N a M (fig. 1.52-4), si scriverà:

1.52-7 $$V_{MN} = \Sigma \pm V_0 - \Sigma RI\,.$$

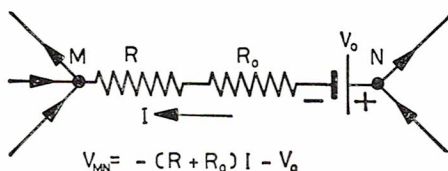
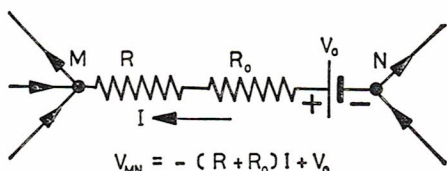



Fig. 1.52-4

Le due formule riportate sopra esprimono la *legge generale di Ohm*, cioè la legge di Ohm valida per un tronco di circuito.

---

[6] La tensione V_{MN} ha il positivo in M e il negativo in N (per convenzione): quindi queste polarità sono concordi con quelle di una caduta di tensione dovuta alla corrente I considerata, che fluisce appunto da M ad N.

Volendo applicare quanto ora detto, ad esempio, al tronco compreso fra i punti M ed N ed includente il punto P del circuito di fig. 1.52-1*a*, sarà, ricordando la 1.52-6:

1.52-8 $$V_{MN} = (R_{01} + R_1)\, I - V_{01}\,.$$

Per il tronco MN che include invece il punto Q sarà, volendo applicare ancora la formula 1.52-6,:

1.52-9 $$V_{MN} = - V_{NM} = - [(R_{02} + R_{03})\, I + V_{02} + V_{03}]\ (^7)\,;$$

mentre applicando direttamente la formula 1.52-7 si otterrà subito:

1.52-10 $$V_{MN} = - (R_{02} + R_{03})\, I - V_{02} - V_{03}\,.$$

Si noti ancora come le equazioni che discendono dalla legge di Ohm per un tronco di circuito si possano interpretare anch'esse come espres-

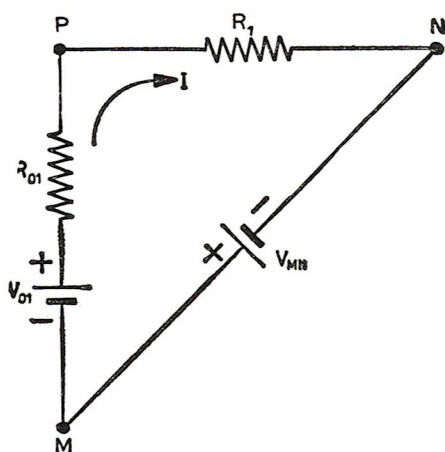



Fig. 1.52-5

sioni della legge di Ohm per un circuito chiuso, quando si pensi di sostituire la differenza di potenziale ai capi del tronco (tensione V_{MN}) con un generatore di tensione posto fra gli stessi punti, avente per *f.e.m.* il valore della *d.d.p.* considerata (V_{MN}) e caratterizzato da resistenza interna nulla. Si scriverà così, con riferimento ad esempio al circuito riportato in fig. 1.52-5, che vede applicato fedelmente quanto ora esposto ad un caso già discusso:

1.52-11 $$V_{MN} + V_{01} = (R_{01} + R_1)\, I\,,$$

---

(7) È stata ricavata come tensione $- V_{NM}$ per avere sempre la corrente nel verso da N ad M, che è quello della *d.d.p.* considerata.

dalla quale si ricaverà facilmente la *d.d.p.* V_{MN} cercata:

1.52-12 $$V_{MN} = (R_{01} + R_1) I - V_{01},$$

espressione identica, come si vede, a quella trovata in 1.52-8.

1.53 Significato della legge di Ohm

Come è noto, la semplice legge di Ohm in corrente continua stabilisce che la differenza di potenziale ai capi di una resistenza (vedi fig. 1.53-1) è proporzionale all' intensità della corrente che la percorre, e viceversa, onde le ben note relazioni $V = RI$ ed $I = GV$.

In sostanza si può dire che la caduta di tensione RI, la quale nasce nella resistenza ad opera della corrente I, è necessaria per equilibrare quella parte V della tensione V_0 che il generatore mette a disposizione dell' intero circuito (fig. 1.53-1). Ovviamente, se nel circuito vi sarà la

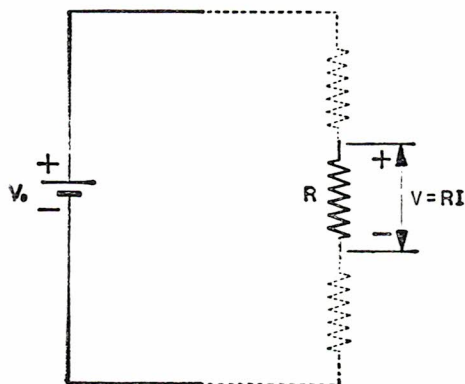



Fig. 1.53-1

sola resistenza R, questa dovrà prendersi tutta la tensione V_0, se invece nel circuito vi saranno altre resistenze, ognuna di queste si prenderà una porzione di tensione, pari al prodotto resistenza · corrente. È logico dire allora che alla tensione (V_0) applicata al circuito farà equilibrio la somma delle cadute di tensione nei vari elementi resistivi ($I\Sigma R$).

Ma il circuito potrebbe essere più complicato. Anziché un solo generatore vi potrebbero essere più generatori che agiscono nel circuito. Si supponga per semplicità che questi siano solamente due: allora pure due saranno le possibilità di trovarli collegati in maniera differente nel circuito (vedi fig. 1.53-2*a* e *b*).

Infatti, nel primo caso (fig. 1.53-2*a*), i due generatori agiscono concordemente fra di loro, poiché le loro forze interne si sommano (le forze interne che trasportano le cariche positive convenzionali hanno il verso dal meno al più). Pertanto nel circuito agirà la somma delle loro *f.e.m.*

($V_{01} + V_{02}$), che le relative cadute di tensione ($I\Sigma R$) dovranno equilibrare.

Nel secondo caso (fig. 1.53-2*b*), i due generatori agiscono invece in discordanza fra di loro. Supponendo $V_{01} \neq V_{02}$, uno dei due generatori avrà allora la prevalenza sull'altro; precisamente sarà quello la cui *f.e.m.* risulterà di valore più alto. Se $V_{01} > V_{02}$, sarà ovviamente

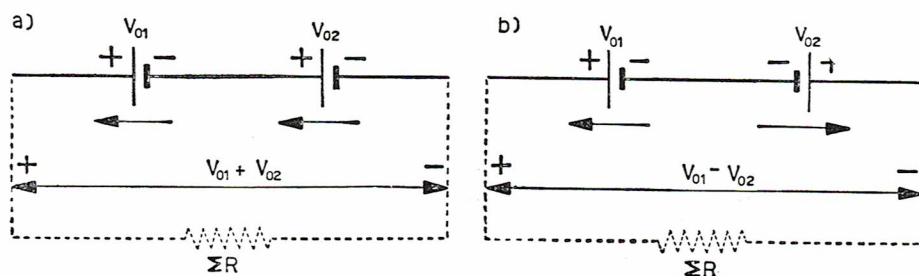



Fig. 1.53-2

il generatore 1 ad avere la prevalenza sul generatore 2, per cui la corrente circolante nel circuito, quando questo sarà chiuso, avrà il verso imposto dalla forza interna del generatore 1. Ma allora qual è l'azione

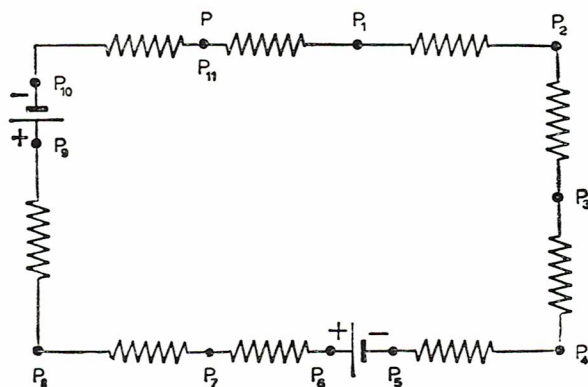



Fig. 1.53-3

del generatore 2? Essa contrasta quella del generatore 1, cosicché ai fini della corrente, è come se nel circuito venisse ad agire in definitiva una *f.e.m.* di valore $V_{01} - V_{02}$. In sostanza ora si avrà che le cadute di tensione negli elementi resistivi del circuito ($I\Sigma R$) dovranno equilibrare la risultante delle *f.e.m.* agenti, risultante che in questo caso è data dalla differenza $V_{01} - V_{02}$. Sarà perciò: $V_{01} - V_{02} = I\Sigma R$. Scritta in questo modo la legge di Ohm, il significato della tensione V_{02} è quello di forza controelettromotrice, poiché si oppone alla forza elettromotrice principale V_{01}.

Così si potrà affermare che in un circuito chiuso, preso un punto P qualsiasi (vedi fig. 1.53-3), dovrà essere nulla la somma delle varie

d.d.p. (forze elettromotrici e cadute di tensione) che, partendo da *P*, si possono incontrare lungo il circuito completo percorrendolo in un verso qualsiasi fino ad arrivare ancora in *P* stesso ([1]). Per questo motivo, alcune *d.d.p.* saranno positive, altre negative. Assumendo positive le *f.e.m.*, si scriverà perciò: $\Sigma V_0 - \Sigma V_{0c} - I\Sigma R = 0$, la quale rappresenta appunto la legge di Ohm per un circuito chiuso.

In conclusione, la legge di Ohm esprime dunque per un circuito elettrico la legge dell'equilibrio fra le tensioni ivi presenti. Si potrà pertanto affermare che in un circuito chiuso in ogni istante dovrà essere nulla la risultante totale delle tensioni in gioco; oppure che alla risultante (algebrica) delle tensioni impresse (azione) dovrà fare opposizione una eguale risultante di cadute di tensione (reazione) dovute alla stessa corrente.

1.54 Principi di Kirchhoff

I circuiti elettrici non sempre sono formati da elementi tali da essere percorsi dalla stessa corrente (struttura senza biforcazioni od unifilare),

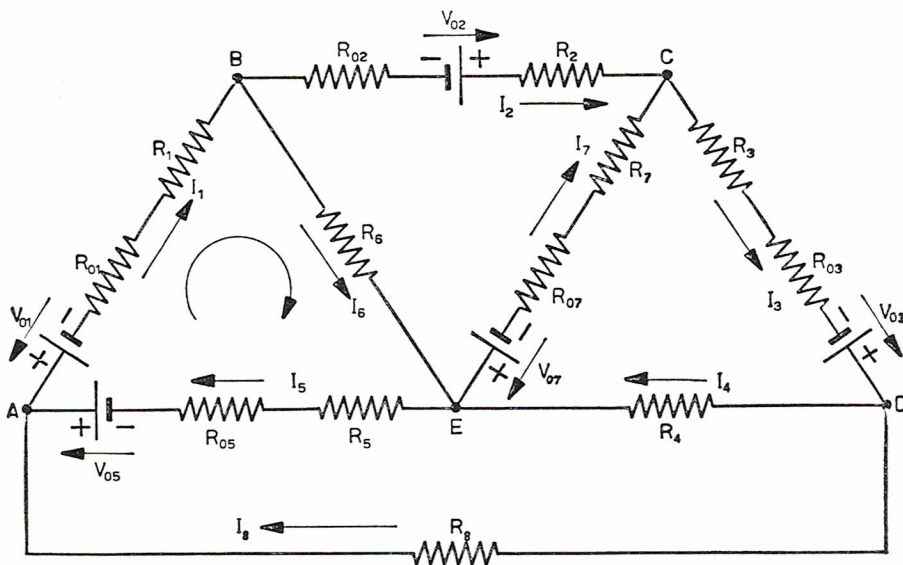



Fig. 1.54-1

ma possono risultare di struttura più complessa, cioè formati da più circuiti chiusi, come la fig. 1.54-1 mostra assai chiaramente.

Si parla allora più propriamente di rete elettrica, perché appunto

---

([1]) È chiaro infatti che nell'esempio di fig. 1.53-3 si ha $V_{PP_{11}} = 0$, cioè la *d.d.p.* fra il punto *P* e P_{11} è nulla, ovviamente. Naturalmente:

$$V_{PP_{11}} = V_{PP_1} + V_{P_1P_2} + V_{P_2P_3} + \ldots + V_{P_{10}P_{11}} .$$

per rete elettrica si intende un insieme di più circuiti semplici. Questi d'altronde vengono denominati *maglie* (1). A loro volta, si osservi la fig. 1.54-1, le maglie sono costituite da tanti rami definendosi *ramo* un tronco di circuito della rete percorso da una corrente avente un solo e ben definito valore (2). D'altronde i rami partono ed arrivano da punti ben definiti della rete, precisamente là dove le correnti si dividono. Questi punti di convergenza o divergenza vengono denominati *nodi* (3).

Ricapitolando, una rete, comunque sia la sua complessità, è formata da rami e da nodi. L' insieme dei rami tali da realizzare un percorso chiuso costituisce una maglia. Naturalmente in una rete un po' complicata molti saranno i circuiti chiusi possibili.

Come è facile immaginare, una rete elettrica sarà formata essenzialmente da generatori elettrici di tensione e da utilizzatori con i vari collegamenti, schematizzabili quindi con delle resistenze (vedi fig. 1.54-1). Ovviamente ogni ramo potrà contenere uno o più generatori ed una o più resistenze. In pratica non tutti i rami di solito conterranno generatori; tutti i rami invece possiederanno resistenza e, in generale, essi saranno percorsi da corrente. Scende da ciò che in una rete elettrica si avranno tante correnti quanti sono i suoi rami.

D'altronde i valori e i versi di queste correnti non saranno noti, mentre saranno noti i valori delle *f.e.m.* dei generatori e le loro polarità, così pure le loro resistenze interne e tutte le resistenze dei vari tronchi. Questa almeno è l' ipotesi che si verifica più comunemente. La risoluzione della rete elettrica consisterà allora nel ricavare i valori e i versi delle correnti.

A tale scopo servono i cosiddetti principi di Kirchhoff, precisamente:

Primo principio

Considerando positive le correnti che entrano in un nodo e negative quelle che escono, fra i valori delle varie correnti interessanti un qualsiasi nodo si potrà scrivere che:

1.54-1 $$\Sigma I = 0$$ (equazioni ai nodi),

ovvero anche che la somma delle correnti entranti dovrà essere sempre eguale alla somma delle correnti uscenti.

Questo è il primo principio di Kirchhoff, che permette di scrivere le cosiddette equazioni ai nodi. Esso si giustifica pensando che in un regime stazionario di corrente, quale è quello che viene considerato, se la corrente totale uscente da un nodo non fosse eguale a quella entrante

---

(1) Nella fig. 1.54-1 sono *maglie* i circuiti chiusi *ABEA*, *ABCEA*, *ABCDEA*, *BCDEB*, ecc. ....

(2) Nella fig. 1.54-1 sono *rami* i tronchi *AB*, *BC*, *BE*, *CE*, ecc. ....

(3) Nella fig. 1.54-1 i *nodi* sono i punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

si avrebbe nel nodo un accumulo o un rarefarsi progressivo di cariche elettriche, il che è in contraddizione con l'ipotesi fatta di regime stazionario. Il primo principio di Kirchhoff esprime dunque l'equilibrio esistente fra le varie correnti interessanti un nodo.

Ad esempio per la rete elettrica riportata in fig. 1.54-1, il primo principio di Kirchhoff applicato al nodo A porterà a scrivere la seguente equazione:

1.54-2
$$I_8 - I_1 + I_5 = 0\,,$$

cioè anche:

1.54-2'
$$I_8 = I_1 - I_5\,,$$

la quale ci dice appunto che la corrente nel ramo 8 è equilibrata dalle correnti nei rami 1 e 5.

Secondo principio

Per ogni maglia, poiché questa è da riguardare come un circuito chiuso, alla somma algebrica delle forze elettromotrici ivi presenti dovranno fare equilibrio le varie cadute di tensione nelle resistenze costituenti i rami della maglia stessa. Si potrà quindi scrivere:

1.54-3
$$\Sigma V_0 = \Sigma RI \qquad \text{(equazioni alle maglie).}$$

Questo è il secondo principio di Kirchhoff, che permette di scrivere le cosiddette equazioni alle maglie. Si noti però che per poter scrivere le suddette equazioni è necessario anzitutto assumere un verso di percorrenza per le maglie stesse ([4]). Le *f.e.m.* dei generatori saranno allora da considerarsi positive se le forze interne dei generatori, che vanno sempre dal polo negativo a quello positivo, saranno concordi con il verso di percorrenza, altrimenti saranno da considerarsi negative. Così le cadute di tensione RI saranno da considerarsi positive se le relative correnti hanno lo stesso verso del verso di percorrenza, in caso contrario saranno da considerarsi negative.

([4]) Di solito destrogiro. A dire il vero anche per scrivere la legge di Ohm per un circuito chiuso occorrerebbe scegliere un verso di percorrenza del circuito, solamente che in questo caso, essendo una sola la corrente nel circuito, il verso di percorrenza è generalmente coincidente con quello della corrente stessa.

Per maggiore chiarezza si veda quanto riportato in fig. 1.54-2, la quale mostra una sola maglia di una rete generica, e quanto si può scrivere ad esempio per la maglia ABE della rete riportata in fig. 1.54-1:

1.54-4 $$-V_{01} + V_{05} = (R_{01} + R_1)I_1 + R_6 I_6 + (R_{05} + R_5)I_5 \,.$$

La giustificazione del secondo principio è basata sulla legge generale di Ohm. Si può affermare anzi che il secondo principio di Kirchhoff non

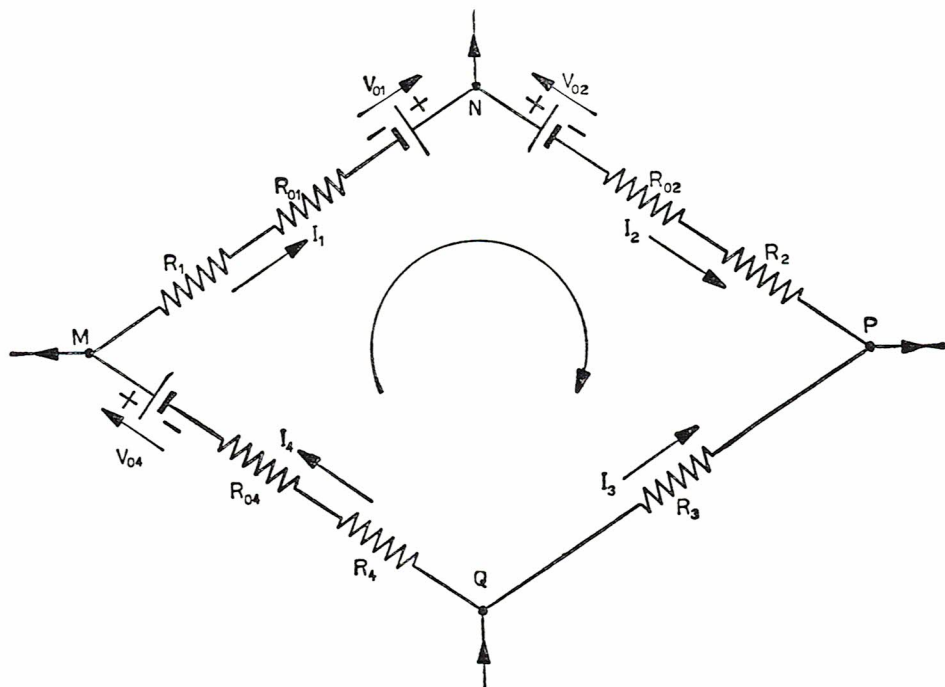



Fig. 1.54-2

sia altro che una estensione della su richiamata legge di Ohm. Risulta infatti ovvio, dopo quanto è stato detto alla fine del precedente paragrafo, che in un circuito chiuso la somma algebrica di tutte le *d.d.p.* è nulla ($\Sigma V_0 - \Sigma RI = 0$).

Concludendo, tramite i due principi di Kirchhoff, si avranno disponibili delle equazioni in numero necessario e sufficiente per risolvere il problema [5]. E si vuol richiamare ancora l'attenzione sul fatto che,

---

[5] La risoluzione delle reti elettriche, tramite i principi di Kirchhoff, verrà sviluppata nel secondo capitolo, § 2.3.

assegnata una rete elettrica, per prima cosa occorrerà imporre nei singoli rami un verso alle correnti, le quali in generale sono incognite. Per questo il verso assegnato risulterà del tutto arbitrario. Sarà poi la soluzione a fornire, col segno delle correnti, il loro verso effettivo; poiché infatti, se alla fine una corrente risulterà positiva, vorrà dire che il verso scelto arbitrariamente all' inizio per questa si è confermato giusto; se invece risulterà negativo, il verso sarà da considerarsi opposto a quello scelto all' inizio.

1.55 Elementi in serie

Si è già visto che un circuito elettrico è costituito da una successione di elementi (generatori, utilizzatori, conduttori di collegamento).

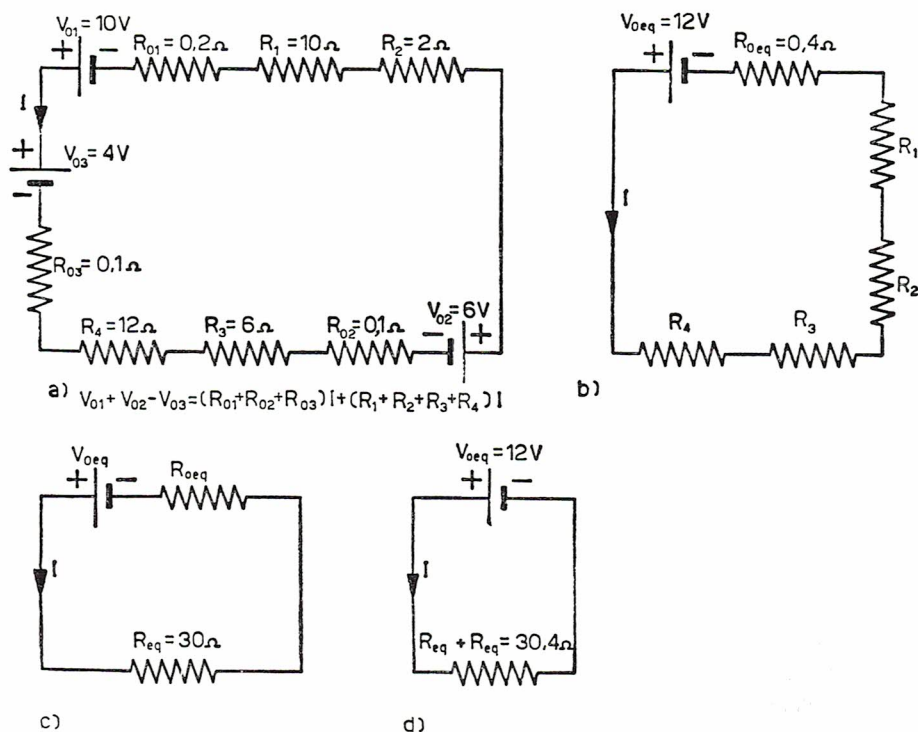



Fig. 1.55-1

Orbene si dice che questi elementi sono in *serie* fra di loro quando vengono percorsi dalla stessa corrente. In un circuito senza derivazioni (vedi fig. 1.55-1*a*) tutti gli elementi sono perciò in serie tra di loro, così come lo sono quegli elementi che costituiscono un ramo di una rete elettrica.

Gli elementi collegati in serie danno luogo alle seguenti proprietà:

a) *Elementi attivi* (generatori)

La legge di Ohm consente di affermare che più generatori in serie agiscono nel circuito con una *f.e.m.* risultante che è la somma *algebrica* delle singole *f.e.m.*; le resistenze interne invece si sommano *aritmeticamente*. Si veda ad esempio l'equazione scritta a piè del circuito di fig. 1.55-1*a*.

Quando dunque in un circuito vi sono più generatori in serie, questi si possono considerare equivalenti ad un solo generatore (generatore equivalente) la cui *f.e.m.* è la somma algebrica delle singole *f.e.m.* e la cui resisfenza interna è la somma aritmetica delle singole resistenze interne. Si potrà scrivere perciò:

1.55-1 $$V_{0eq} = \Sigma \pm V_0 , \qquad R_{0eq} = \Sigma R_0 .$$

Nel circuito di fig. 1.55-1*a* si potrà pertanto sostituire ai generatori dati un unico generatore (vedi fig. 1.55-1*b*) di *f.e.m.* del valore di 12 volt e resistenza interna di 0,4 ohm.

È importante notare che questa sostituzione è sempre lecita ai fini del calcolo della corrente fluente nel circuito, come lo è pure per il calcolo delle potenze elettriche in gioco nel circuito, purché le *f.e.m.* che si sono sommate siano tutte dello stesso segno. Infatti nelle questioni di potenza non è sempre lecito raggruppare in un unico generatore equivalente i vari generatori quando in realtà una o più *f.e.m.* di questi agiscono da forze controelettromotrici. Ciò si comprenderà meglio in seguito (§ 1.6).

b) *Elementi passivi* (utilizzatori, conduttori)

La legge di Ohm consente ancora di affermare, si veda l'equazione scritta sotto il circuito di fig. 1.55-1*a*, che la resistenza di più resistori o utilizzatori collegati in serie risulta essere la somma (aritmetica) delle loro singole resistenze.

Pertanto, quando in un circuito appaiono più resistenze in serie, queste potranno essere considerate equivalenti ad una sola resistenza R_{eq} (resistenza equivalente) il cui valore è dato dalla somma dei valori delle singole resistenze. Si potrà perciò scrivere:

1.55-2 $$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... = \Sigma R .$$

Nel caso del circuito di fig. 1.55-1*b*, la resistenza equivalente della rimanente parte di circuito ammonterà dunque a: $R_{eq} = R_1 + R_2 + + R_3 + R_4 = 30\ \Omega$. Per questo il circuito di fig. 1.55-1*b* potrà essere schematizzato, o meglio reso equivalente, a quello rappresentato in fig. 1.55-1*c*, e quindi anche a quello di fig. 1.55-1*d*, ove le resistenze interne dei generatori e quelle del rimanente circuito sono state conglobate in un'unica resistenza.

È importante notare che la sostituzione parziale o completa delle resistenze in serie di un circuito con una sola resistenza equivalente è perfettamente lecita non solo ai fini del calcolo della corrente circolante nel circuito, ma anche per le considerazioni relative alle potenze elettriche in gioco nel circuito stesso.

Si desidera richiamare da ultimo l'attenzione sul fatto che, per un certo circuito ben definito, l'aggiunta di elementi attivi in serie porterà ad un aumento della corrente, se essi verranno ad agire in modo concorde (1) con quelli già esistenti, o una diminuzione di corrente, se essi verranno ad agire in modo discorde; mentre l'aggiunta di elementi passivi in serie porterà sempre ad una diminuzione di corrente.

Pertanto ad esempio, per un circuito elettrico l' inserzione in serie di uno strumento di misura (vedi la fig. 1.55-2 che riporta il caso del-

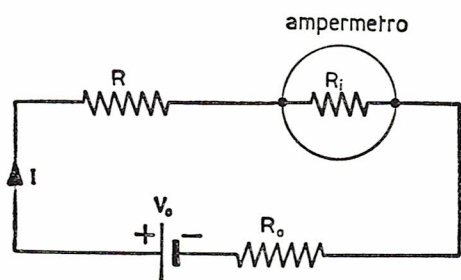



Fig. 1.55-2

l'ampermetro), poiché questo sarà sempre dotato di una certa resistenza *interna*, porterà ad una diminuzione del valore di quella corrente che doveva essere proprio misurata. Ma questa variazione sarà naturalmente tanto più piccola quanto più piccola risulterà la resistenza interna dello strumento stesso confrontata con quella totale del circuito. Un ampermetro ideale è pertanto uno strumento avente resistenza interna nulla, non realizzabile quindi in pratica.

1.56 Elementi in parallelo

In un circuito elettrico si possono trovare più elementi in *parallelo*. Si dice che due o più elementi sono in parallelo (o anche in deri-

(1) Si dice che un generatore agisce in maniera concorde o discorde rispetto ad un altro generatore quando le forze interne sono rispettivamente concordi (fig. 1.55-3) o discordi (fig. 1.55-4).

Fig. 1.55-3 *Fig. 1.55-4*

vazione) quando essi sono collegati fra di loro in modo tale da essere sottoposti alla stessa differenza di potenziale. In un circuito elettrico possono essere in parallelo sia elementi attivi che passivi. Lo studio evidentemente dovrà essere impostato con i principi di Kirchhoff.

a) *Elementi attivi*

I generatori elettrici di tensione possono venire collegati anche in parallelo, precisamente con i poli dello stesso segno collegati tutti fra di loro, si veda la fig. 1.56-1, allo scopo di poter erogare al circuito esterno una corrente maggiore di quella erogabile da ciascun generatore.

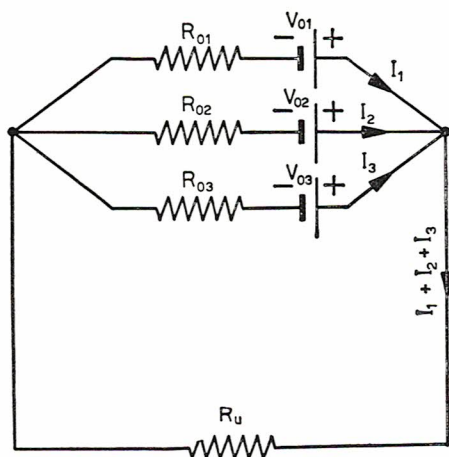



Fig. 1.56-1

Se si hanno così n generatori tutti eguali fra di loro, cioè aventi la stessa *f.e.m.* e la stessa resistenza interna, allora la corrente erogata al circuito esterno sarà n volte quella erogata da un generatore, ed è come se fosse erogata da un unico generatore avente per *f.e.m.* quella di un solo generatore e resistenza interna $\frac{1}{n}$ di quella di un generatore.

Si ricordi però che, qualora i generatori collegati fra di loro in parallelo non fossero tutti eguali, le cose andrebbero in maniera assai meno semplice di quanto accennato sopra. In questo caso si avrebbero infatti delle correnti di circolazione entro i generatori stessi, anche in assenza di carico esterno (utilizzatore), correnti assai dannose per l' integrità dei generatori stessi.

Il problema della ricerca del generatore equivalente di più generatori, a caratteristiche differenti, in parallelo verrà risolto in maniera rigorosa e completa nel secondo capitolo. Per ora siano sufficienti questi pochi cenni. Comunque si ricordi che il problema può essere risolto sempre applicando i principi di Kirchhoff alla rete data.

b) *Elementi passivi*

Si considerino più resistori in parallelo (vedi fig. 1.56-2*a*). Siccome ai loro capi è applicata la stessa *d.d.p.* V, essi saranno attraversati da una corrente che risulterà essere inversamente proporzionale alla resi-

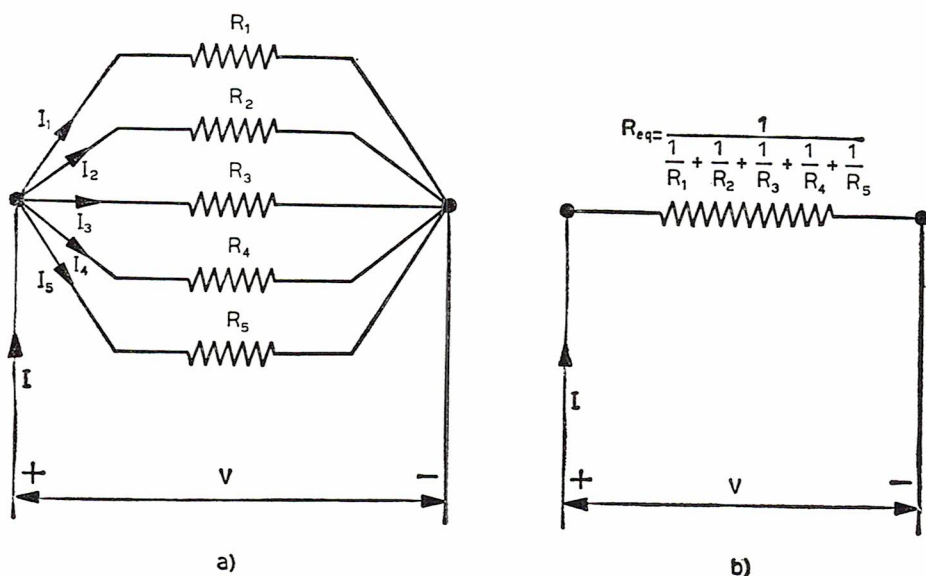



Fig. 1.56-2

stenza presentata da ciascuno di essi. Con riferimento alla fig. 16-2*a*.5 si avrà quindi:

1.56-1
$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V}{R_3}, \ldots .$$

D'altronde, per il primo principio di Kirchhoff applicato ad uno dei due nodi, si avrà che:

1.56-2
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \ldots ,$$

e quindi anche raccogliendo il termine V:

1.56-3
$$I = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\right).$$

Ponendo ora:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots, \tag{1.56-4}$$

dall'equazione 1.56-3 risulterà che la corrente I assorbita dal gruppo di resistori in parallelo potrà essere espressa semplicemente da:

$$I = \frac{V}{R_{eq}}. \tag{1.56-5}$$

Questa formula dice dunque che, ai fini della corrente assorbita globalmente dal gruppo di resistenze date in parallelo, è possibile sostituire

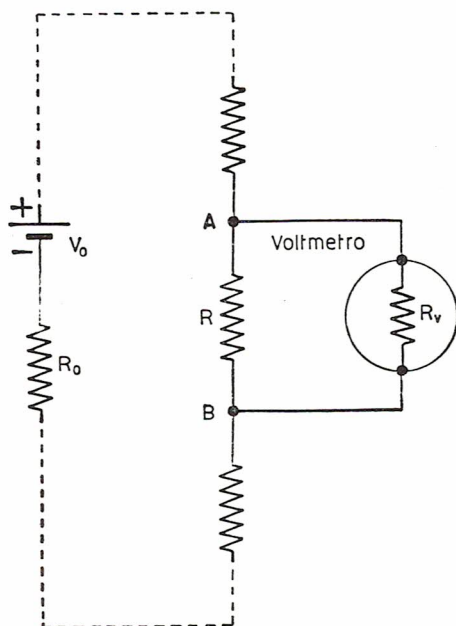



Fig. 1.56-3

a queste una sola resistenza R_{eq} (vedi fig. 1.56-2*b*), il cui valore dovrà però soddisfare alla condizione data in 1.56-4, cioè anche:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots} \text{ (1)}. \tag{1.56-6}$$

---

(1) Nel caso di due sole resistenze R_1 ed R_2 in parallelo si potrà ovviamente scrivere che $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; mentre nel caso di tre resistenze R_1, R_2, R_3 in parallelo si potrà scrivere che $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$.

Naturalmente, se ogni resistore formante il parallelo dato fosse caratterizzato dalla sua conduttanza, anziché tramite la sua resistenza, la 1.56-4 si scriverebbe, poiché $1/R_1 = G_1$, $1/R_2 = G_2$, $1/R_3 = G_3$, ..., in quest'altra maniera:

1.56-7 $$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = G_1 + G_2 + G_3 + ... = \Sigma G\,,$$

dalla quale scende l'importante osservazione che la conduttanza equivalente di più elementi in parallelo si computa facilmente sommandone le conduttanze.

Dalla 1.56-7 si deduce anche come, volendo diminuire di valore una certa resistenza, sia sufficiente porvi in parallelo una o più resistenze, si intende di adatto valore. D'altronde si potrà affermare che il valore della resistenza equivalente del parallelo risulterà sempre più piccolo del valore di quella resistenza che fra tutte quelle costituenti il parallelo stesso presenta il valore più piccolo.

Così si comprenderà come l'inserzione di uno strumento di misura su di un tronco di circuito porterà in generale ad una variazione di resistenza di quel tronco, variazione però che sarà tanto più piccola quanto più alto risulterà il valore della resistenza interna dello strumento.

Se si fa riferimento ad esempio al voltmetro di resistenza interna R_v, inserito fra due punti A e B del circuito di fig. 1.56-3, si avrà che fra i punti A e B la resistenza sarà diminuita per l'avvenuta inserzione del voltmetro. Per questo si verrà a misurare una tensione inferiore a quella presente fra gli stessi punti in assenza dello strumento (vedi ad esempio l'esercizio 1.920). Perché in pratica ciò non avvenga, occorrerà che il valore della resistenza interna R_v del voltmetro sia di gran lunga superiore al valore della resistenza (equivalente) che si manifesta ai capi del tronco fra gli estremi del quale verrà inserito lo strumento. Un voltmetro ideale sarà da riguardare perciò come uno strumento avente resistenza interna di valore infinito.

1.57 Partitori ohmici di tensione

Nella pratica si presenta spesso il problema di ridurre una tensione continua, perché di valore più elevato del necessario. Si ricorre allora al partitore, o divisore, ohmico, il quale è formato essenzialmente da due resistori, di resistenza rispettivamente R_1 ed R_2, collegati fra di loro in serie ed alimentati dalla tensione da ridurre (vedi fig. 1.57-1).

In pratica si hanno due casi a seconda che il partitore alimenti un utilizzatore di resistenza di valore molto alto, tale cioè da poterlo considerare praticamente infinito, oppure di resistenza di valore più basso.

Nel primo caso (partitore a vuoto), si veda il circuito di fig. 1.57-1*a*, detta I la corrente erogata dal generatore, poiché la tensione V_u da uti-

lizzare si raccoglie ai capi della resistenza R_2 percorsa dalla stessa corrente I, si avrà semplicemente:

1.57-1
$$V_u = R_2 I = R_2 \frac{V_0}{R_0 + R_1 + R_2}.$$

Nel secondo caso (partitore caricato dalla resistenza R_u), si veda la fig. 1.57-1*b*, indicata ancora con I la corrente erogata dal generatore,

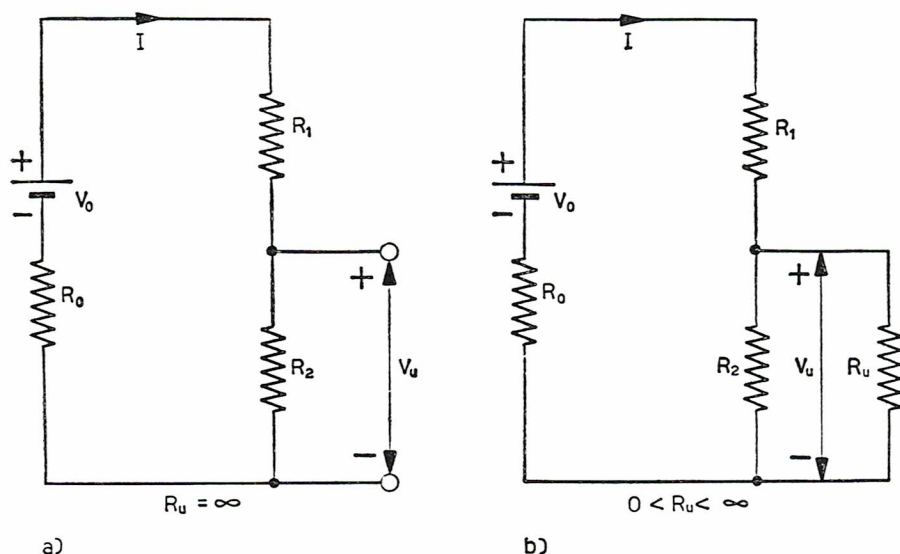



Fig. 1.57-1

poiché V_u si raccoglie ora effettivamente ai capi del parallelo costituito dalla resistenza R_2 con quella R_u dell'utilizzatore, si avrà, indicando con R_{eq} detto parallelo, :

1.57-2
$$V_u = R_{eq} I = R_{eq} \frac{V_0}{R_0 + R_1 + R_{eq}},$$

e quindi sviluppando, ricordando inoltre che $R_{eq} = \dfrac{R_2 R_u}{R_2 + R_u}$, :

1.57-3
$$V_u = \frac{R_2 R_u}{R_0(R_2 + R_u) + R_1(R_2 + R_u) + R_2 R_u} V_0.$$

Non sempre però in pratica il partitore di tensione è costituito da due resistori fissi. Talvolta esso risulta costituito da un unico resistore fisso

avente un cursore il quale permette di formare un contatto con un qualsiasi punto intermedio (vedi fig. 1.57-2) [1]. In questo caso, spostando il cursore, è possibile variare con continuità il valore della tensione V_u fra zero ed un certo valore massimo. Il valore della tensione di uscita

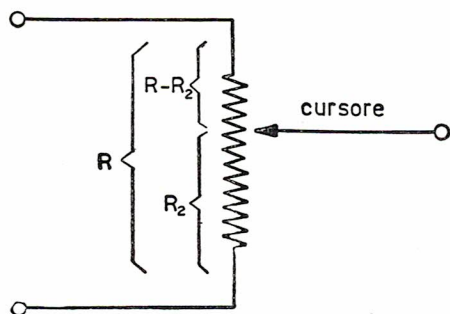



Fig. 1.57-2

sarà sempre ricavabile tramite la formula 1.57-3, qualora al posto di R_1 si ponga il valore $R - R_2$.

1.58 Derivatori ohmici di corrente

Nella pratica si presenta spesso un altro problema, cioè quello di dover fare in modo tale che in un certo utilizzatore di resistenza R_u abbia a circolare solamente una parte della corrente I che fluisce nel circuito del quale l'utilizzatore fa parte. Questo caso si risolve (vedi

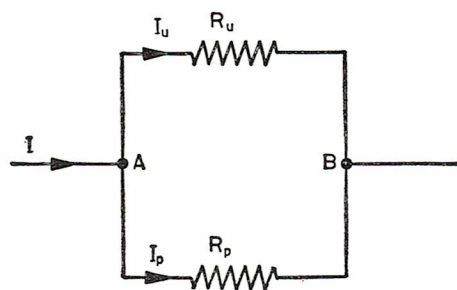



Fig. 1.58-1

fig. 1.58-1) ponendo in parallelo all'utilizzatore R_u un resistore R_p (derivatore ohmico o shunt) di adatto valore, come ora si preciserà.

Si indichi infatti con I_u la corrente che deve fluire attraverso l'utilizzatore e con I la corrente che fluisce invece attraverso il circuito. Ovviamente sarà $I_u < I$. Posto che l'intensità della corrente I_u debba essere k volte più piccola di quella della corrente I, il valore della resistenza

---

[1] Un componente circuitale avente queste caratteristiche viene denominato correntemente *reostato potenziometrico*.

R_p dello shunt da porre in parallelo ad R_u, affinché appunto $I_u = kI$ $(0 < k < 1)$, si troverà ricavandolo dalle seguenti due equazioni, scritte applicando i principi di Kirchhoff al circuito di fig. 1.58-1. Precisamente:

1.58-1 $$I = I_u + I_p = kI + I_p \quad 1^0 \text{ principio (nodo } A\text{)},$$

1.58-2 $$R_u I_u - R_p I_p = 0 \qquad 2^0 \quad \text{» (maglia } ABA\text{)}.$$

Dalla seconda equazione si ricava che $R_p = R_u I_u / I_p$, mentre dalla prima si ottiene che $I_p = I - kI$; pertanto combinando si avrà anche che:

1.58-3 $$R_p = \frac{R_u I_u}{I_p} = \frac{R_u kI}{I - kI} = R_u \frac{k}{1-k},$$

o anche volendo ricavare il fattore di riduzione k in funzione del valore delle resistenze:

1.58-4 $$k = \frac{R_p}{R_u + R_p}.$$

Le formule trovate in 1.58-3 e 4 permettono dunque di risolvere completamente il problema.

Naturalmente dalle equazioni 1.58-1 e 2 si può ricavare il valore della corrente I_u in funzione di quella esterna I e supponendo note le resistenze R_u e R_p. Infatti risulta:

1.58-5 $$I_u = I_p \frac{R_p}{R_u} = (I - I_u) \frac{R_p}{R_u} = I \frac{R_p}{R_u + R_p}.$$

1.59 Problemi di applicazione al § 1.5

Esercizio 1.591

Trovare il valore e il verso della corrente I che fluisce nel tronco di circuito riportato in fig. 1.591-1, sapendo che ai suoi estremi la *d.d.p.*

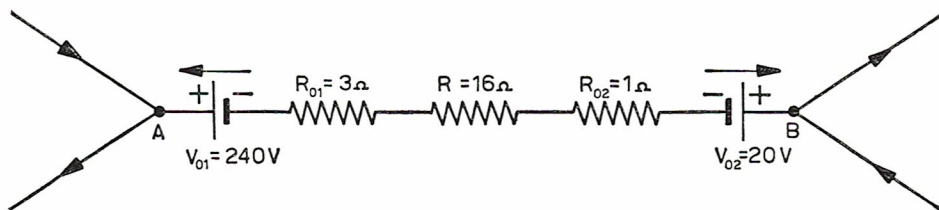



Fig. 1.591-1

ammonta a 200 volt e che il punto A è a potenziale superiore rispetto a quello B.

Soluzione

Si imponga alla corrente I che fluisce nel tronco di circuito dato un verso qualsiasi, ad esempio quello che va da A a B. Si potrà scrivere allora la seguente equazione (legge generale di Ohm):

$$V_{AB} = V_{01} - V_{02} + (R_{01} + R_{02} + R)\, I\,,$$

da cui si ricaverà, ricordando che $V_{AB} = 200$ volt:

$$I = \frac{V_{AB} - V_{01} + V_{02}}{R_{01} + R_{02} + R} = \frac{200 - 240 + 20}{3 + 1 + 16} = -1 \text{ ampere}\,.$$

Il valore negativo trovato per la corrente indica che il verso scelto arbitrariamente all' inizio è sbagliato e che quindi nelle condizioni date la corrente fluisce invece da B verso A, come si poteva prevedere.

Esercizio 1.592

Con riferimento alla rete elettrica riportata in fig. 1.592-1 si dica a quanto ammonta:

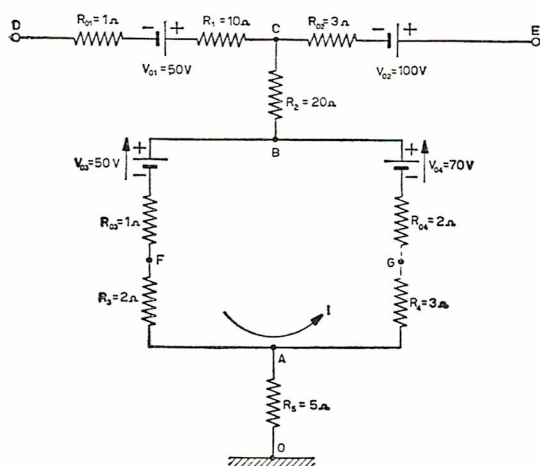



Fig. 1.592-1

1) la *d.d.p.* fra i punti B e O;
2) la *d.d.p.* fra i punti D e O e la polarità di D rispetto ad O;
3) la *d.d.p.* fra i punti E e F e la polarità di F rispetto ad E;
4) la *d.d.p.* fra i punti F e G.

Soluzione

La rete elettrica data è sede di corrente solamente nella maglia chiusa *AFBGA*; negli altri rami essa è infatti nulla. D'altronde la corrente in questa maglia vale, assumendo come verso quello della *f.e.m.* più grande, cioè quello della V_{04}:

$$I = \frac{V_{04} - V_{03}}{R_{03} + R_3 + R_{04} + R_4} = \frac{70 - 50}{1 + 2 + 2 + 3} = 2{,}5 \text{ ampere};$$

per cui, ricordando le formule date in 1.52-6 e 7 e relative convenzioni, si avrà:

1) Calcolo di V_{BO}.

Si noti anzitutto che $V_{AO} = 0$, quindi:

$$V_{BO} = V_{BA} = -(R_4 + R_{04})I + V_{04} = -(3 + 2)\,2{,}5 + 70 = 57{,}5 \text{ volt.}$$

2) Calcolo di V_{DO}.

Si noti che $V_{CB} = V_{AO} = 0$; d'altronde $V_{DO} = V_{DB} + V_{BO}$, per cui in definitiva:

$$V_{DO} = V_{DC} + V_{BA} = -V_{01} + V_{BA} = -50 + 57{,}5 = 7{,}5 \text{ volt}.$$

Il punto D è positivo rispetto a massa, perché la tensione V_{DO} è risultata positiva.

3) Calcolo di V_{EF}.

Si noti che $V_{EC} = V_{02} = 100$ volt, $V_{CB} = 0$, $V_{BF} = V_{03} + R_{03} I =$ $= 50 + 1 \cdot 2{,}5 = 52{,}5$ volt; per cui:

$$V_{EF} = V_{02} + V_{03} + R_{03} I = 100 + 50 + 2{,}5 = 152{,}5 \text{ volt},$$

con il punto E positivo rispetto ad F, quindi con il punto F negativo rispetto ad E.

4) Calcolo di V_{FG}.

Converrà calcolare V_{FG} come somma delle differenze di potenziale V_{FA} e V_{AG}. Quindi si avrà che:

$$V_{FG} = (R_3 + R_4)I = (2 + 3)\,2{,}5 = 12{,}5 \text{ volt}.$$

Esercizio 1.593

Si trovino i valori e i versi delle correnti che circolano nella rete elettrica riportata in fig. 1.593-1.

Soluzione

La rete presenta due nodi e tre rami. Quindi le correnti incognite sono in numero di tre, cioè tante quanti sono i rami. Uno solo d'altronde è il nodo indipendente [indifferentemente quello in alto (C) o quello in basso (D)]; mentre le maglie indipendenti sono due. Pertanto, assegnate alle correnti incognite i versi (arbitrari) come in fig. 1.593-1,

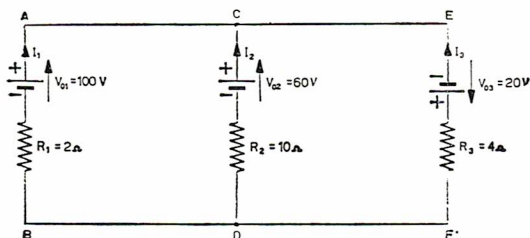



Fig. 1.593-1

si potranno scrivere le seguenti equazioni derivanti dai principi di Kirchhoff:

1.593-1 $$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad \text{nodo } C\,,$$

1.593-2 $$V_{01} - V_{02} = R_1 I_1 - R_2 I_2 \qquad \text{maglia } ACDBA\,,$$

1.593-3 $$V_{01} + V_{03} = R_1 I_1 - R_3 I_3 \qquad \text{maglia } AEFBA\,.$$

Questo sistema di tre equazioni in tre incognite potrà essere risolto come segue. Si sostituisca nella 1.593-2, al posto di I_2, la sua espressione ricavata dalla 1.593-1, cioè $I_2 = -(I_1 + I_3)$, si otterrà così l'equazione:

1.593-4 $$V_{01} - V_{02} = (R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_3\,.$$

D'altronde I_3 può essere ricavata dalla 1.593-3. Infatti $I_3 = -(V_{01} + V_{03} - R_1 I_1)/R_3$, per cui l'equazione 1.593-4 diventa in definitiva:

$$V_{01} - V_{02} = \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}\right) I_1 - \frac{R_2}{R_3}(V_{01} + V_{03})\,,$$

e quindi passando ai numeri:

$$40 = 17\, I_1 - 300\,,$$

la quale risolta rispetto ad I_1 dà: $I_1 = 20$ ampere.

È ora possibile ricavare dall'equazione 1.593-2 il valore della corrente I_2 il quale però, a conti fatti, risulta essere nullo. La corrente nel

terzo ramo varrà pertanto, in base all'equazione 1.593-1, $I_3 = - I_1 = - 20$ ampere. Il segno meno sta ad indicare che, in realtà, il vero verso della corrente I_3 è risultato contrario a quello assegnato in partenza, cioè a quello che appare nello schema di fig. 1.593-1.

Esercizio 1.594

Si calcolino le correnti erogate ad un carico resistivo da due gene-

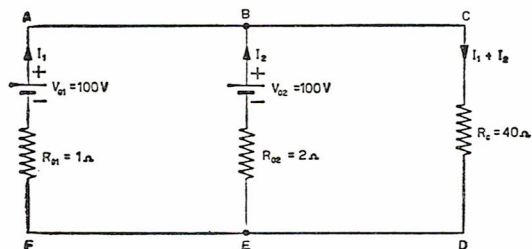



Fig. 1.594-1

ratori aventi la stessa *f.e.m.* a vuoto, ma differente resistenza interna, collegati fra di loro in parallelo (vedi fig. 1.594-1).

Soluzione

Poiché i generatori si trovano entrambi in condizioni di erogare effettivamente corrente al carico, le correnti incognite sono solamente due, quelle cioè dei generatori, perché la corrente nel carico R_c vale sicuramente la loro somma (1^0 principio di Kirchhoff) [1]. Per la soluzione del problema si dovrà disporre perciò di due equazioni. Ciò è possibile ricorrendo al 2^0 principio di Kirchhoff applicato a due maglie della rete data. Sarà pertanto, assumendo per le correnti i versi segnati in fig. 1.594-1 e per il verso di percorrenza nella maglia quello destrogiro:

$$V_{01} - V_{02} = R_{01}I_1 - R_{02}I_2 \qquad \text{maglia } ABEFA \,,$$

$$V_{02} = R_{02}I_2 + R_c(I_1 + I_2) \qquad \text{maglia } BCDEB \,;$$

cioè con i dati numerici del problema:

$$I_1 - 2I_2 = 0$$

$$40I_1 + 42I_2 = 100 \,,$$

---

[1] In sostanza, le correnti nei tre rami sono incognite nei valori, ma non nei versi.

dalle quali equazioni si ricava facilmente che il generatore $N1$ eroga una corrente doppia rispetto al generatore $N2$ ($I_1 = 2I_2$), e quindi che $I_1 = 1{,}638$ ampere e $I_2 = 0{,}819$ ampere.

Esercizio 1.595

Si trovi quale condizione debbono soddisfare le quattro resistenze R_1, R_2, R_3, R_4, costituenti il circuito riportato in fig. 1.595-1 (ponte

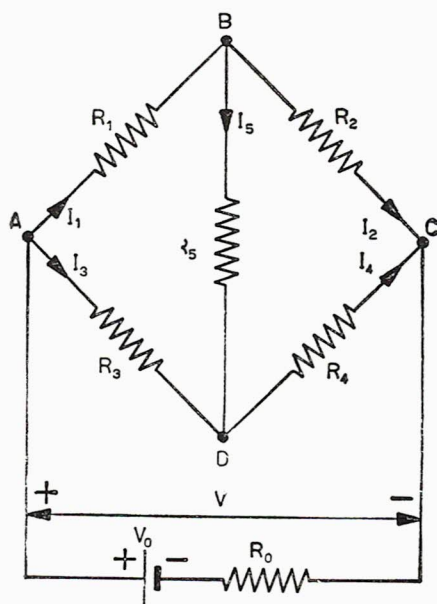



Fig. 1.595-1

di Wheatstone), affinché fra i punti B e D la tensione sia nulla (condizione di equilibrio del ponte).

Soluzione

La tensione V_{BD} sarà nulla quando ad esempio $V_{AB} = V_{AD}$ e in tal caso attraverso la resistenza R_5 non passerà corrente, poiché:

$$I_5 = \frac{V_{BD}}{R_5} = \frac{0}{R_5} = 0 .$$

Pertanto, detta V la tensione fra i nodi A e C, sarà, con riferimento al circuito di fig. 1.595-1, ove $I_5 = 0$:

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} \quad , \quad I_3 = I_4 = \frac{V}{R_3 + R_4} .$$

Poiché dunque all'equilibrio $V_{AB} = V_{AD}$, si potrà scrivere che:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V ,$$

da cui si ricava:

$$R_1(R_3 + R_4) = R_3(R_1 + R_2) ,$$

cioè sviluppando e semplificando:

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 .$$

Questa costituisce appunto la cercata condizione di equilibrio del ponte di Wheatstone, valida qualunque sia il valore della resistenza R_5.

Esercizio 1.596

Si trovi il valore della resistenza equivalente fra i punti A, C e

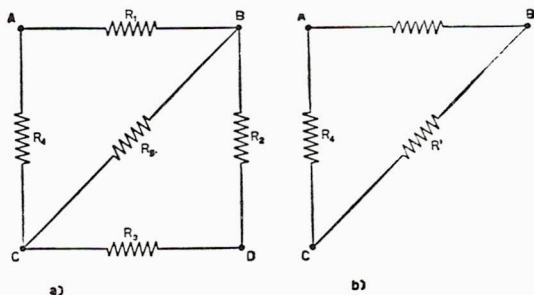



Fig. 1.596-1

quindi B, C della rete riportata in fig. 1.596-1a costituita da resistori tutti eguali fra di loro, di resistenza del valore di 3 ohm.

Soluzione

1) Resistenza equivalente fra i punti A e C.

S' incominci a calcolare il valore della resistenza del parallelo costituito dalla resistenza R_5 e dalle resistenze in serie R_2 ed R_3. Tale valore ammonta a:

$$R' = \frac{(R_2 + R_3)R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = 2 \text{ ohm} .$$

La rete si è semplificata pertanto come in fig. 1.596-1*b*, per cui la resistenza equivalente fra i punti A e C varrà finalmente:

$$R_{AC} = \frac{(R_1 + R')R_4}{R_1 + R' + R_4} = \frac{15}{8} = 1{,}875 \text{ ohm.}$$

2) Resistenza equivalente fra i punti B e C.

Le resistenze $R_1 + R_4$ ed $R_2 + R_3$ sono in parallelo con la resistenza R_5. Questo parallelo rappresenta d'altronde la resistenza equivalente fra i punti B e C. Sarà perciò:

$$R_{BC} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)R_5}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + (R_1 + R_4)\,R_5 + (R_2 + R_3)R_5} = \frac{3}{2} = 1{,}50 \text{ ohm.}$$

Esercizio 1.597

Si trovi il valore della corrente I erogata dal generatore e di quella circolante nella resistenza R_2 facente parte del circuito di fig. 1.597-1.

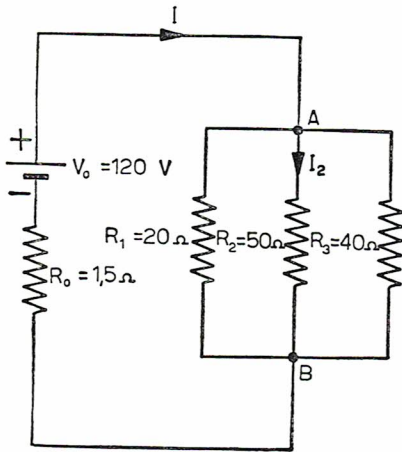



Fig. 1.597-1

Soluzione

Indicata con R_{AB} la resistenza equivalente delle tre resistenze in parallelo R_1, R_2, R_3, la corrente I erogata dal generatore varrà:

$$I = \frac{V_0}{R_0 + R_{AB}} = \frac{V_0}{R_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_1} + \cfrac{1}{R_2} + \cfrac{1}{R_3}}} = \frac{120}{1{,}5 + \cfrac{1}{0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}025}} =$$

$$= \frac{120}{1{,}5 + 10{,}52} \cong 10 \text{ ampere}.$$

Sarà facile calcolare a questo punto il valore della corrente I_2. Infatti ai capi della resistenza R_2 la *d.d.p.* V_{AB} vale:

$$V_{AB} = R_{AB}\, I = 10{,}52 \cdot 10 \cong 105 \text{ volt},$$

per cui di conseguenza sarà:

$$I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{105}{50} = 2{,}10 \text{ ampere}.$$

Esercizio 1.598

Si trovino i valori delle resistenze R_x, R_y, R_z costituenti il circuito

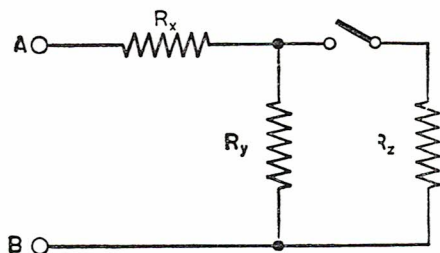



Fig. 1.598-1

di fig. 1.598-1, sapendo che $R_x + R_z = 100$ ohm; mentre con l' interruttore aperto $R_{AB} = 130$ ohm e con l' interruttore chiuso $R_{AB} = 90$ ohm.

Soluzione

In base all'enunciato del problema si potrà scrivere dunque che:

$$R_x + R_z = 100$$

$$R_x + R_y = 130$$

$$R_x + \frac{R_y R_z}{R_y + R_z} = 90\,.$$

Sostituendo ora nella terza equazione ad R_y la sua espressione ricavata dalla seconda equazione, cioè $R_y = 130 - R_x$, e a R_z la sua espressione ricavata dalla prima equazione, cioè $R_z = 100 - R_x$, si otterrà un'equazione nella sola incognita R_x:

$$R_x + \frac{(130 - R_x)(100 - R_x)}{130 - R_x + 100 - R_x} = 90\,,$$

la quale, sviluppata e semplificata, porta alla seguente equazione di secondo grado:

$$R_x^2 - 180\,R_x + 7700 = 0\,,$$

che, risolta, fornisce:

$$R_x = \frac{180 \pm \sqrt{180^2 - 4 \cdot 7700}}{2} = \frac{180 \pm 40}{2} = \begin{cases} 110 \text{ ohm} \\ 70 \text{ ohm} \end{cases}.$$

Le soluzioni matematiche sono due, tuttavia una sola accettabile dal punto di vista fisico, poiché il problema, imponendo che sia $R_x + R_z = 100$ ohm, ha anche implicitamente imposto che R_x risulti minore di 100 ohm.

Pertanto, dopo aver scartata la soluzione $R_x = 110$ ohm, non rimane che:

$$R_x = 70 \text{ ohm}\,,$$

e quindi di conseguenza:

$$R_y = 130 - R_x = 60 \text{ ohm} \quad ; \quad R_z = 100 - R_x = 30 \text{ ohm}.$$

Esercizio 1.599

Si trovi il valore della resistenza interna R_i di un ampermetro sapendo che, ponendovi in parallelo un resistore del valore di 0,3 Ω,

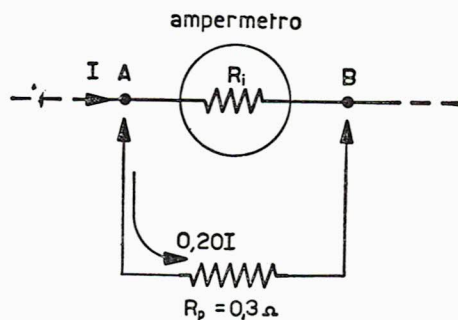



Fig. 1.599-1

la corrente nello strumento diminuisce del 20 %. Si noti che il valore della corrente I nel circuito esterno allo strumento rimane costante durante questa operazione.

Soluzione

Nella nuova condizione, cioè a strumento shuntato, la corrente che fluisce nello strumento ammonta a $0{,}80I$, per cui quella che attraver-

sarà il resistore postovi in parallelo varrà $0{,}20I$, essendo I la corrente nel circuito esterno (vedi fig. 1.599-1).

D'altronde si potrà scrivere un'equazione che esprime l'eguaglianza della *d.d.p.* ai morsetti dello strumento e dello shunt:

$$R_i \cdot 0{,}80I = R_p \cdot 0{,}20I\,,$$

da cui si otterrà facilmente che:

$$R_i = R_p \frac{0{,}20}{0{,}80} = 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075 \text{ ohm}\,.$$

1.6 Energia e potenza elettrica

1.61 Richiami

È noto che l'energia non si crea e non si distrugge: l'energia infatti può essere trasformata solamente in altro tipo di energia. Già è stato accennato come si possano trasformare per l'appunto in energia elettrica ad esempio l'energia chimica, quella luminosa o quella meccanica. D'altronde è pure noto che un sistema possiede energia quando ha l'attitudine di trasformarsi o di compiere lavoro.

Si sa d'altra parte che la trasformazione di una certa quantità di energia di un certo tipo in quella di altro tipo impiega sempre un certo intervallo di tempo. Affinché cioè si compia una trasformazione energetica è necessario attendere un certo tempo: non è possibile infatti che una trasformazione avvenga in un intervallo di tempo nullo.

Energia (W) che si trasforma e tempo (t) in cui avviene tale trasformazione sono infatti legati dalla ben nota relazione:

1.61-1 $$W = Pt\,,$$

dove P rappresenta la potenza del sistema. È noto infatti che per potenza si intende la quantità di energia che si trasforma nell'unità di tempo, poiché è anche $P = \frac{W}{t}$.

D'altra parte, se l' intervallo di tempo durante il quale si considera avvenuta la trasformazione è molto piccolo, ad esempio infinitesimo (dt),

allora anche la quantità di energia interessata al fenomeno risulterà pure infinitesima (dW) e la formula che lega l'energia al tempo diverrà in tal caso la seguente:

1.61-2
$$dW = P\,dt \ ,$$

ove P rappresenta il valore della potenza in gioco nell' intervallo di tempo considerato dt.

Energia e potenza sono naturalmente grandezze fisiche misurabili; ed è noto come l'unità di misura dell'energia, qualunque sia la sua natura, sia il joule (abbrev. J) [un joule corrisponde a $0{,}239 \cdot 10^{-3}$ grandi calorie (abbrev. Cal)], mentre l' unità di misura della potenza è il watt (abbrev. W). Questo rappresenta d'altronde la quantità di energia unitaria (1 joule) che si trasforma nell' unità di tempo (1 secondo), quindi:

1.61-3
$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ secondo}} \ .$$

Si ricordi ancora come talvolta nella pratica venga usata per l'energia una unità di misura che deriva dalla potenza espressa in watt, o in chilowatt, e dal tempo espresso in ore, anziché in secondi. Poiché un'ora equivale a 3600 secondi, si potrà affermare pertanto subito che:

1.61-4 $\quad$ 1 wattora (Wh) = 1 W · 3600 sec = 3600 joule

1.61-4′ $\quad$ 1 chilowattora (kWh) = 1000 W · 3600 sec = 3 600 000 joule.

1.62 Legge di Joule

Si può constatare sperimentalmente come ogni corpo attraversato da corrente elettrica si riscaldi. La ragione fisica del fenomeno risiede, come è stato detto al § 1.41, nel fatto che le cariche elettriche elementari costituenti la corrente elettrica sono ostacolate nel loro moto entro la materia. Per questo l'energia elettrica, tramite l'energia cinetica delle cariche elettriche in movimento, si trasforma appunto in energia termica.

Ora il fenomeno è retto da una legge ben precisa, la cosiddetta legge di Joule, la quale stabilisce come un qualsiasi corpo di resistenza R, attraversato da una corrente di intensità I, dissipi in calore nel tempo t, durante il quale scorre la corrente I, l'energia elettrica:

1.62-1
$$W = RI^2\,t \ .$$

Detta energia risulta espressa in joule qualora R venga espressa in ohm, I in ampere e t in secondi.

Naturalmente, riferendo l'energia W al tempo t in cui è stata

prodotta, si otterrà, per quanto ricordato nel precedente § 1.61, la potenza elettrica trasformata (dissipata) in calore dal sistema:

$$P = RI^2 \,. \qquad \text{1.62-2}$$

D'altronde, poiché in un corpo di resistenza R percorso da corrente continua di intensità I si manifesta una caduta di tensione $V = RI$ (legge di Ohm), l'espressione della potenza ora trovata in 1.62-2 potrà essere posta in quest'altra forma, anch'essa assai utile in pratica:

$$P = \frac{(RI)^2}{R} = \frac{V^2}{R} = GV^2 \text{ (1)} \,. \qquad \text{1.62-3}$$

Ed è importante ricordare come, affinché la potenza dissipata risulti misurata in watt, si debba esprimere la resistenza in ohm (la conduttanza in siemens), mentre la corrente e la tensione debbano essere espresse rispettivamente in ampere e in volt.

Il fenomeno del riscaldamento dei corpi, quando questi sono soggetti ad un passaggio di corrente elettrica, è quasi sempre da considerarsi dannoso [2], salvo il caso appunto in cui il riscaldamento non sia voluto, come avviene in certi dispositivi appositamente costruiti. Si realizzano infatti veri e propri apparecchi elettrici di riscaldamento, ad esempio a resistenza, dove il corpo riscaldante è in generale un resistore costituito con filo o piattina di nichel-cromo, od altra lega ad alta resistività e molto resistente all'ossidazione, percorso da corrente elettrica. Poiché in questi casi si rende di solito necessario calcolare la quantità di energia calorifica prodotta in calorie, anziché in joule (watt·secondo), sarà bene ricordare quanto esposto nel paragrafo precedente. Risulta così tra l'altro che:

$$1 \text{ kWh} = 860{,}4 \text{ Cal} \,. \qquad \text{1.62-4}$$

Infatti 1 kWh $= 3{,}6 \cdot 10^6$ joule, ma 1 joule $= 0{,}239 \cdot 10^{-3}$ Cal, per cui in definitiva sarà 1 kWh $= 3{,}6 \cdot 0{,}239 \cdot 10^3 = 860{,}4$ Cal.

1.63 Potenza elettrica nei circuiti

Si è visto nel paragrafo precedente come un resistore di resistenza R, quando è percorso dalla corrente di intensità I, dissipi una potenza

---

(1) Come si può notare dalle formule 1.62-2 e 3, il fenomeno della dissipazione dell'energia elettrica in calore è quadratico, cioè dipende dal quadrato della corrente o tensione in gioco.

(2) È dannoso ad esempio per il macchinario elettrico, per i cavi adibiti al trasporto dell'energia elettrica, ecc. ...., in quanto il calore deteriora i materiali isolanti necessari per l'isolamento.

P il cui valore ammonta a RI^2. Poiché ai capi del resistore è presente una *d.d.p.* continua $V = RI$, si potrà scrivere anche che:

1.63-1 $$P = RI^2 = RI \cdot I = VI \text{ (1) (2)}.$$

Il risultato trovato è importantissimo, perché mostra come la potenza elettrica dissipata dal resistore possa essere esplicitamente espressa in termini indipendenti dal valore R della resistenza posseduta dal resistore, bensì solamente come prodotto tensione·corrente. Certamente uno di questi parametri, nel caso specifico del resistore, sarà sempre a sua volta funzione di R.

Ma il risultato trovato va oltre il semplice caso dell'elemento resistivo discusso, per comprendere tutti i casi. Infatti è possibile affermare che il prodotto tensione·corrente rappresenta sempre una potenza elettrica, sia che questa risulti *dissipata* come *generata*. Ed è chiaro che ad una potenza dissipata corrisponderà sempre una potenza generata e viceversa (principio della conservazione dell'energia).

Allo scopo di comprendere e di sviluppare meglio quanto ora accennato, si consideri ciò che avviene in un circuito elettrico il più semplice possibile: un generatore elettrico di *f.e.m.* V_0 e resistenza interna R_0 il quale alimenta un resistore di resistenza R (vedi fig. 1.63-1). È chiaro allora

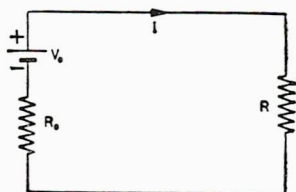



Fig. 1.63-1

come il generatore abbia il compito di *produrre* quella energia elettrica che verrà trasformata dagli elementi presenti nel circuito in altra forma di energia, precisamente, nel caso di fig. 1.63-1, in calore dalle resistenze R_0 ed R.

In ogni circuito attivo si potrà considerare perciò, da un lato, l'energia fornita dai generatori al circuito stesso, energia che qui verrà chiamata generata; dall'altro l'energia consumata (assorbita) in egual misura, per il principio della conservazione dell'energia, dagli altri elementi del circuito [3]. D'altronde, se queste energie in gioco verranno riferite

---

(1) A questa formula si può pervenire in altro modo ricordando che il lavoro compiuto da una carica Q in movimento, sottoposta alla *d.d.p.* V, ammonta a $W = QV$. Dividendo ambo i membri per t si ottiene infatti $W/t = P = QV/t = IV$.

(2) Il watt risulta perciò definibile come prodotto di un volt per un ampere, cioè watt = volt·ampere.

(3) Come più volte detto, l'energia non si genera né si consuma. Questo modo di dire perciò costituisce solamente una pittoresca indicazione relativa al processo energetico considerato.

tutte ad uno stesso intervallo di tempo, si potrà affermare anche che in un circuito alla potenza generata dai generatori elettrici si contrapporrà in eguale misura la potenza assorbita dagli altri elementi presenti nel circuito.

Quanto esposto trova rigorosa conferma in alcune equazioni che si possono facilmente ricavare in merito. Con riferimento ad esempio al circuito di fig. 1.63-1, si incominci a scrivere la legge di Ohm:

1.63-2 $$V_0 = (R_0 + R)I ,$$

quindi si moltiplichino ambo i membri di questa equazione per il termine It. Si otterrà:

1.63-3 $$V_0 It = (R_0 + R)I^2 t .$$

Questa equazione esprime chiaramente il bilancio energetico dell'intero circuito elettrico: da un lato infatti compare un'energia dissipata in calore $(R_0 + R)I^2t$, dall'altro necessariamente quindi l'energia elettrica generata, V_0It. Poiché l'ammontare di queste due energie è risultato eguale, come vuole il principio della conservazione dell'energia,

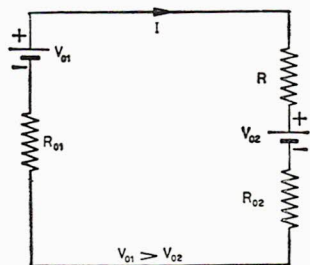



Fig. 1.63-2

non vi è alcun dubbio che il termine V_0I rappresenta la potenza elettrica fornita dal generatore al circuito.

Si noti come il procedimento ora applicato ad un circuito elettrico assai semplice possa essere esteso ad un qualsiasi circuito, ad esempio a quello riportato in fig. 1.63-2, ove si suppone $V_{01} > V_{02}$. Scritta dunque la legge di Ohm:

1.63-4 $$V_{01} - V_{02} = (R_{01} + R_{02} + R)I ,$$

cioè anche:

1.63-4' $$V_{01} = (R_{01} + R_{02} + R)I + V_{02} ,$$

si moltiplichino come al solito ambo i membri dell'equazione per il termine It:

1.63-5 $$V_{01}\, It = (R_{01} + R_{02} + R)\, I^2t + V_{02}It .$$

Questa equazione esprime appunto il bilancio energetico per l'intero circuito dato. Precisamente si può affermare che l'energia fornita dal generatore di *f.e.m.* V_{01}, il quale agisce nel circuito proprio come tale, viene assorbita assieme agli elementi resistivi del circuito $(R_{01} + R_{02} + R)$ anche dall'altro generatore, il quale ovviamente non può agire in questo caso come tale; il termine $V_{02}It$, avendo lo stesso segno del termine $(R_{01} + R_{02} + R)I^2t$, rappresenta infatti inequivocabilmente l'energia elettrica da esso assorbita (trasformata in altra forma).

L'esame della 1.63-5 conduce dunque a concludere come solamente le forze elettromotrici, cioè quelle che si comportano come tali effettivamente nel circuito, siano in grado di fornire potenza elettrica, mentre le

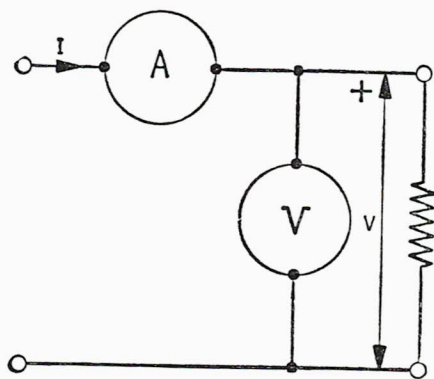



Fig. 1.63-3

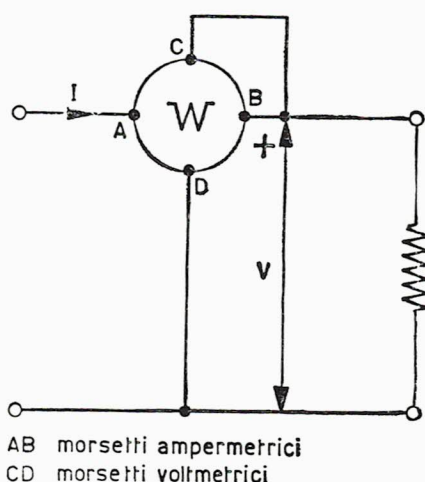



Fig. 1.63-4

altre, cioè quelle che si comportano effettivamente da forze controelettromotrici, viceversa convertano la potenza elettrica in altra forma, cioè in definitiva assorbano potenza. Però, comunque sia, l'ammontare di queste potenze si computerà assai semplicemente eseguendo il prodotto fra i valori delle rispettive *f.e.m.* o *f.c.e.m.* per il valore della corrente relativa.

Si vuole da ultimo ricordare come la potenza elettrica sia una grandezza elettrica facilmente misurabile. Infatti essa può essere misurata nei dispositivi a corrente continua per mezzo di un voltmetro e di un ampermetro inseriti correttamente nel circuito (vedi fig. 1.63-3). Il prodotto dei valori letti sugli strumenti, salvo costanti moltiplicative delle scale, darà il valore della potenza in gioco [4].

---

[4] A parte errori sistematici, però facilmente calcolabili.

Si ricordi però che la potenza elettrica può essere misurata anche con un solo strumento, precisamente con un *wattmetro*. È questo un apparecchio di misura (vedi fig. 1.63-4) il quale fornisce direttamente in watt (od in kW) l'ammontare della potenza da misurare [5]. Esso è caratterizzato dall'avere due coppie di morsetti distinti: due di questi servono come *ampermetrici* (da essi entra ed esce la corrente), gli altri due morsetti servono invece come *voltmetrici* (fra di essi viene applicata la tensione). In sostanza il wattmetro è un apparecchio il quale è sensibile tanto all'intensità della corrente che fluisce nel circuito quanto alla tensione ad esso applicata.

1.64 Rendimento

Per i generatori elettrici, così come del resto per qualsiasi altro apparato e macchinario, è possibile definire il rendimento. Precisamente, per un generatore il rendimento elettrico è dato dal rapporto fra la potenza erogata al circuito P_u e quella generata P_g. Si ha dunque per definizione:

1.64-1
$$\eta = \frac{P_u}{P_g}.$$

In base a quanto esposto nei paragrafi precedenti, la formula suddetta potrà essere messa naturalmente sotto altra forma. Ci si riferisca

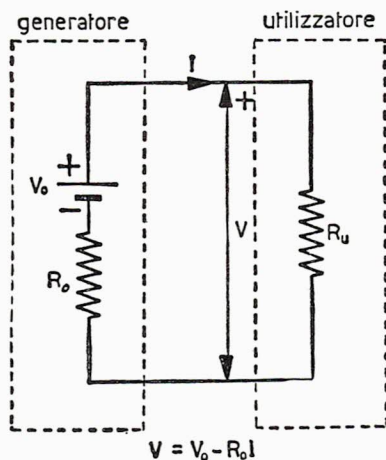



Fig. 1.64-1

ad esempio al circuito di fig. 1.64-1, dove appare un generatore elettrico di *f.e.m.* V_0 e resistenza interna R_0 chiuso su di un utilizzatore resistivo R_u. La potenza generata ammonta allora a:

---

(5) Si veda quanto esposto nella nota precedente.

1.64-2
$$P_g = V_0 I ;$$

mentre la potenza fornita al circuito, cioè all' utilizzatore, vale, indicando con V la tensione ai suoi morsetti:

1.64-3
$$P_u = VI = V_0 I - R_0 I^2 .$$

Il rendimento del generatore potrà essere espresso perciò come segue:

1.64-4
$$\eta = 1 - \frac{R_0 I}{V_0} .$$

Ovviamente il rendimento è risultato un numero inferiore ad uno. E non può essere che così. Ciò è dato dal fatto che il generatore dissipa

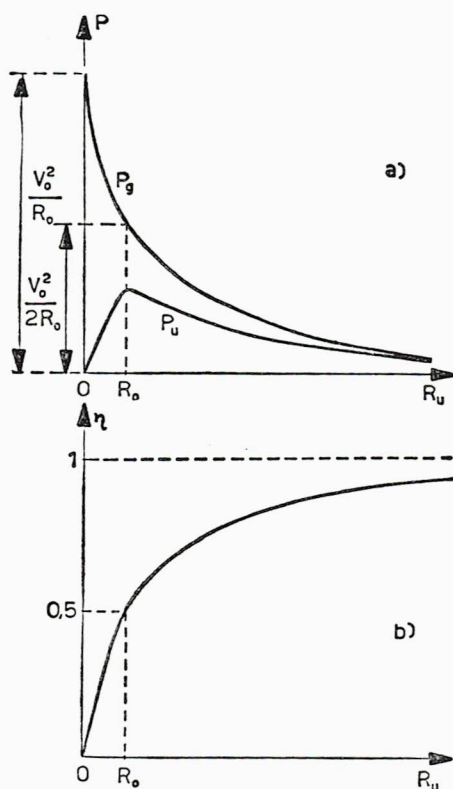



Fig. 1.64-2

parte dell'energia da esso generata nella sua resistenza interna, energia che si trasforma in calore (1), come scende chiaramente dall'equazione 1.64-3 scritta in quest'altro modo:

1.64-5
$$P_g = V_0 I = P_u + R_0 I^2 .$$

(1) Qualsiasi generatore in funzione assume infatti una temperatura superiore a quella dell'ambiente in cui si trova.

Può essere utile a questo proposito vedere come varia la potenza generata, la potenza utile e il rendimento di un generatore elettrico di ben determinate caratteristiche al variare delle condizioni di carico, al variare cioè del valore della resistenza di carico sulla quale risulta chiuso il generatore (vedi circuito di fig. 1.64-1). Tali curve sono state riportate in fig. 1.64-2.

Si osservi come la potenza generata P_g (fig. 1.64-2*a*) risulti massima per $R_u = 0$, cioè quando il generatore si trova nella particolare condizione detta di *cortocircuito* (2), e diminuisca sempre al crescere della resistenza di carico. Infatti l'espressione generale della potenza generata è:

1.64-6 $$P_g = V_0 I = \frac{V_0^2}{R_0 + R_u},$$

la quale assume il valore massimo quando $R_u = 0$, poiché V_0 ed R_0 sono costanti (caratteristiche del generatore), mentre tende a zero quando R_u tende al valore infinito.

Si osservi invece come la potenza utile P_u, cioè la potenza che il generatore fornisce al carico (fig. 1.64-2*a*), presenti un massimo per un solo e ben determinato valore della resistenza di carico, precisamente per quel valore che risulta eguale alla resistenza interna del generatore. Infatti l'espressione della potenza utile:

1.64-7 $$P_u = R_u I^2 = \frac{R_u V_0^2}{(R_0 + R_u)^2}$$

assume il suo massimo valore per $R_u = R_0$, come dimostra l'analisi matematica. Naturalmente per $R_u = 0$ ed $R_u = \infty$ la potenza utile è nulla.

Per quanto riguarda il rendimento elettrico (fig. 1.64-2*b*), poiché questo può essere espresso anche nella seguente forma:

1.64-8 $$\eta = \frac{R_u}{R_0 + R_u} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_0}{R_u}},$$

si può dire che esso risulta nullo quando $R_u = 0$ (cortocircuito), mentre cresce al crescere del valore di R_u, per tendere ad uno quando R_u tende all' infinito (3). D'altronde quando $R_u = R_0$ il rendimento vale 0,5. La condizione di massimo trasferimento energetico comporta dunque un rendimento elettrico piuttosto basso.

(2) Condizione questa molto pericolosa per i generatori di tensione.

(3) Infatti dalla formula 1.64-8 il rendimento assume il valore 1 per $R_u = \infty$. In questo caso però, poiché la corrente è nulla, e quindi non vi è né potenza generata né potenza utile, non ha più senso parlare di rendimento.

1.65 Applicazioni dell'effetto termico della corrente

Numerose sono le applicazioni pratiche dell'effetto Joule. Già qualche cenno è stato fatto alla fine del § 1.62. Naturalmente accanto alle applicazioni industriali (ad esempio vari tipi di forni), dove possono essere impegnate potenze considerevoli (migliaia di kW), si hanno molte altre applicazioni, pure esse di grande interesse, ove però le potenze in gioco sono molto più modeste.

La lampada ad incandescenza rappresenta ad esempio un'applicazione interessante dell'effetto termico della corrente. Un filo di tungsteno, racchiuso in un'ampolla di vetro entro la quale è stato preventivamente

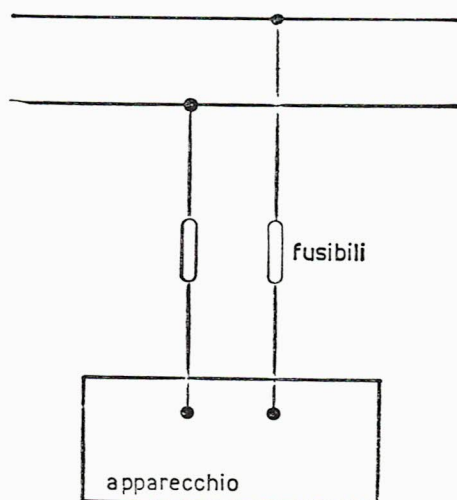



Fig. 1.65-1

fatto il vuoto, viene reso incandescente dal passaggio della corrente: in questo modo una parte dell'energia elettrica si converte in energia luminosa. A tale proposito si ricordi che per una lampadina, più alta è la temperatura raggiunta dal suo filamento, migliore risulta lo spettro della luce prodotta e maggiore diventa la parte di energia calorifica (quindi elettrica) convertita in luminosa, viceversa minore è la sua durata.

Anche il cosiddetto *fusibile* rappresenta un'utile applicazione dell'effetto Joule. Esso è costituito da un filo o da una piattina di materiale avente un relativo basso punto di fusione (lega stagno-piombo, ma anche argento ed alluminio), che fonde quando la corrente che lo attraversa supera un certo valore, aprendo così il circuito (vedi fig. 1.65-1). È chiara quindi l'azione di protezione compiuta dal fusibile nei riguardi dell'apparecchiatura alla cui entrata esso è stato posto. L'apparecchiatura infatti non potrà assorbire dalla linea di alimentazione una corrente di molto superiore a quella di normale esercizio, alla quale il fusibile è stato predisposto.

Un'altra applicazione è costituita dagli strumenti indicatori termici (detti a *filo caldo*). Questi strumenti sono realizzati, si veda la fig. 1.65-2, da un sottile filo dilatabile, generalmente costituito da una lega di platino, teso fra due blocchetti metallici ai quali fanno capo i morsetti dello strumento ; è chiaro che il filo, quando verrà percorso dalla corrente, si allungherà, per cui l' indice collegato rigidamente alla puleggina ruoterà di un certo angolo α, perché sotto l'azione della molla il punto B verrà

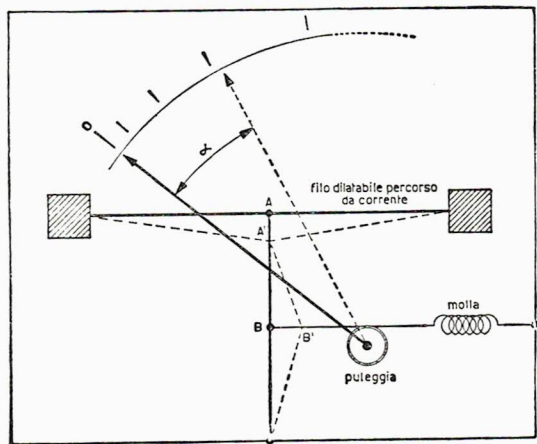



Fig. 1.65-2

in B' in quanto a sua volta il punto A si è spostato in A'. Ora, a questo proposito, si dimostra che l'angolo α di deviazione dell' indice risulta proporzionale al quadrato dell' intensità della corrente che scorre nel filo. Si può perciò scrivere :

1.65-1 $$\alpha = k\, I^2 ,$$

essendo k la costante dello strumento. Questo presenterà perciò una scala quadratica. Ovviamente lo strumento in parola è uno strumento indicatore di *corrente*. Ma con qualche semplice accorgimento esso potrà essere trasformato in un voltmetro e anche, con qualche variante costruttiva, in wattmetro.

Queste poche applicazioni dell'effetto Joule, che si sono qui descritte, fondano la loro essenziale caratteristica sul fatto che un corpo attraversato da corrente si porta ad una temperatura ben determinata, dipendente dalle condizioni ambientali in cui si trova il corpo, dalle caratteristiche del corpo stesso e dall' intensità della corrente che lo attraversa. Tutto questo naturalmente può essere tradotto in formule.

Si consideri infatti un conduttore cilindrico o prismatico di lunghezza l, di sezione S e di perimetro p, avente resistività elettrica ρ, percorso da corrente d'intensità I e posto in un ambiente a tempe-

ratura θ_a. Ora esso raggiungerà in regime termico quella temperatura θ, maggiore di θ_a [1], alla quale tutto il calore prodotto entro il conduttore per effetto Joule verrà smaltito da esso, tramite la sua superficie esterna, all'ambiente in cui si trova.

A questo proposito la fisica insegna che il suddetto conduttore, avente un coefficiente di trasmissione totale del calore c, perde nell' unità di tempo (1 secondo) una quantità di calore ammontante a $cpl\,(\theta - \theta_a)$; d'altronde nella stessa unità di tempo il conduttore di resistenza R produrrà una quantità di calore che vale $0{,}239 \cdot 10^{-3} \cdot RI^2 = 0{,}239 \cdot 10^{-3} \cdot \rho \dfrac{l}{S} I^2$. Ad equilibrio termico raggiunto si potrà perciò scrivere la seguente equazione, poiché il calore prodotto entro il conduttore viene completamente smaltito:

1.65-2
$$cpl\,(\theta - \theta_a) = 0{,}239 \cdot 10^{-3} \rho \frac{l}{S} I^2 .$$

Da questa relazione è possibile ricavare ad esempio il valore della temperatura assunta dal corpo conduttore:

1.65-3
$$\theta = \theta_a + \frac{0{,}239 \cdot 10^{-3} \rho\, I^2}{cpS} .$$

Si noti che dalla formula sopra ricavata emerge come, a parità di ogni altra condizione, si riscaldino meno quei conduttori i quali presentano una sezione avente uno sviluppo periferico maggiore: così la piattina e il nastro si riscaldano assai meno del filo o della corda, a parità di altre condizioni ovviamente.

L'equazione 1.65-2, risolta invece rispetto alla corrente I, porta alla seguente formula:

1.65-4
$$I = \sqrt{\frac{cpS\,(\theta - \theta_a)}{0{,}239 \cdot 10^{-3} \rho}} ,$$

dalla quale tra l'altro si deduce che, fissata per il conduttore una certa sopraelevazione di temperatura, la corrente trasportabile dal conduttore cresce in ragione della radice quadrata del prodotto pS, o anche, poiché per sezioni aventi forme geometricamente simili il perimetro varia secondo la $\sqrt{S}$, in ragione di $\sqrt{S\sqrt{S}}$. Ciò vuol dire che, se la sezione del conduttore raddoppia, la corrente trasportata è solo $\sqrt{2\sqrt{2}} \cong 1{,}6$ volte maggiore, se la sezione del conduttore triplica, la corrente trasportata è solo $\sqrt{3\sqrt{3}} \cong 2{,}3$ volte maggiore, ecc. ....

---

[1] Perché un corpo possa cedere calore al mezzo circostante è necessario che la sua temperatura si sopraelevi rispetto a quella del mezzo circostante.

1.66 Problemi di applicazione al § 1.6

Esercizio 1.661

Si trovi il valore da assegnare alla resistenza di un resistore di nichel-cromo il quale, alimentato a 200 volt, deve fornire 1000 calorie all'ora. Si dica inoltre quanti kWh si sono consumati dopo cinque ore.

Soluzione

Il resistore deve fornire 1000 Cal/ora cioè, poiché d'altra parte 1 caloria $= \dfrac{1}{0{,}239 \cdot 10^{-3}} = 4184$ joule, anche $4{,}184 \cdot 10^6$ joule/ora. In un'ora, cioè in 3600 secondi, il resistore dovrà dissipare in calore un'energia pari a $4{,}184 \cdot 10^6$ joule. Si potrà perciò scrivere la seguente equazione:

$$\frac{(200)^2}{R}\, 3600 = 4{,}184 \cdot 10^6 ,$$

da cui si trova che:

$$R = 34{,}4 \text{ ohm} .$$

Dopo cinque ore il resistore in oggetto avrà smaltito d'altronde 5000 calorie, cioè, poiché la trasformazione dell'energia elettrica in calore avviene con rendimento unitario, esso avrà consumato la seguente energia espressa in kWh:

$$\frac{5000}{860{,}4} = 5{,}81 \text{ kWh} ,$$

dato che ad ogni caloria corrisponde $\dfrac{1}{860{,}4}$ kWh.

Esercizio 1.662

L'indice di un ampermetro a filo caldo va a fondo scala per una

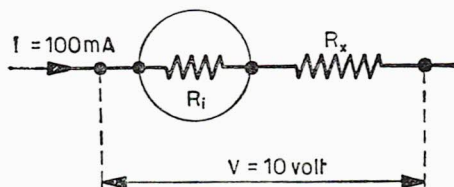



Fig. 1.662-1

corrente di 100 mA. In tali condizioni lo strumento dissipa una potenza di 0,1 watt. Si trovi il valore del resistore addizionale R_x (vedi fig. 1.662-1)

necessario affinché l' indice dello strumento vada a fondo scala per 10 volt.

Soluzione

Lo strumento indicatore di corrente deve essere trasformato dunque in uno strumento indicatore di tensione. Ciò è possibile ponendo in serie alla resistenza interna dello strumento R_i, che nel caso specifico vale :

$$R_i = \frac{P}{I^2} = \frac{0,1}{(0,1)^2} = 10 \text{ ohm},$$

un resistore addizionale R_x di valore tale da limitare la corrente nello strumento a 100 mA, quando all' insieme costituito dallo strumento col suo resistore addizionale saranno applicati 10 volt.

Si potrà scrivere perciò :

$$(R_i + R_x)\, I = V,$$

da cui :

$$R_x = \frac{V - R_i I}{I} = \frac{10 - 10 \cdot 0,1}{0,1} = 90 \text{ ohm}.$$

Esercizio 1.663

Una linea costituita da conduttori di rame ($\rho_{Cu} = 0,0175$ ohm·mm²/m),

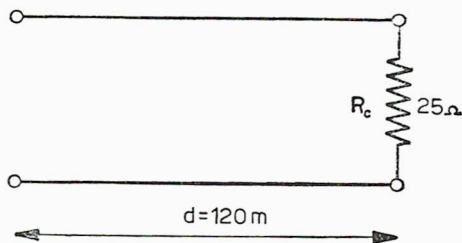



Fig. 1.663-1

lunga $d = 120$ metri, alimenta un carico $R_C = 25$ ohm (vedi fig. 1.663-1).

Si trovi : 1) quale sezione deve avere ciascun conduttore affinché la potenza perduta in linea per effetto Joule costituisca il 2 % di quella trasmessa al carico ; 2) la tensione massima di funzionamento della linea affinché la densità di corrente nei conduttori non superi 2 A/mm².

Soluzione

1) La resistenza della linea dovrà essere il 2 % di quella del carico. Infatti:

$$R_{linea} \cdot I^2 = 0{,}02 \cdot R_C \cdot I^2 ,$$

onde appunto:

$$R_{linea} = 0{,}02 \cdot R_c .$$

Si potrà perciò scrivere:

$$R_{linea} = \rho \frac{2 \cdot d}{S} = 0{,}02 \cdot R_c ,$$

da cui si ricava che:

$$S = \frac{2 \cdot \rho \cdot d}{0{,}02 \cdot R_c} = \frac{2 \cdot 0{,}0175 \cdot 120}{0{,}02 \cdot 25} = 8{,}4 \text{ mm}^2 .$$

2) Poiché la corrente massima che potrà circolare in linea vale:

$$I_{max} = \sigma \cdot S = 2 \cdot 8{,}4 = 16{,}8 \text{ ampere} ,$$

la tensione ai capi del carico ammonterà in queste condizioni a:

$$V_c = R_c \cdot I_{max} = 25 \cdot 16{,}8 = 420 \text{ volt} ,$$

valore che rappresenterà anche la tensione massima di esercizio della linea.

Esercizio 1.664

Si calcoli a quanto ammontano a fine d'anno le perdite, espresse in kWh, relative ad una linea con conduttori in rame ($\rho_{Cu} = 1{,}7\ \mu\Omega \cdot \text{cm}$), lunga 10 km, che per otto ore giornaliere trasporta una potenza di 100 kW. La caduta di tensione nella linea è pari al 3 % della tensione di arrivo, fissata in 5000 volt.

Si trovi inoltre la sovratemperatura del conduttore, assumendo per il coefficiente c il valore di 0,001 Cal/m^2 °C.

Soluzione

Conviene calcolare anzitutto la corrente I circolante nei conduttori della linea, che ammonta a:

$$I = \frac{P}{V_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{5000} = 20 \text{ ampere} ,$$

e la caduta di tensione, che vale (fig. 1.664-1):

$$\Delta V = 0{,}03 \cdot V_2 = 0{,}03 \cdot 5000 = 150 \text{ volt} .$$

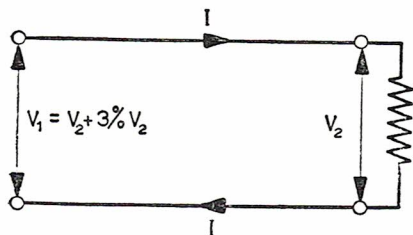



Fig. 1.664-1

La potenza P_d dissipata per effetto Joule nell' intera linea (conduttore di andata e di ritorno) varrà allora:

$$P_d = \Delta V \cdot I = 150 \cdot 20 = 3 \text{ kW} ,$$

per cui a fine d'anno, cioè dopo 365 giorni, l'energia in kWh dissipata in calore ammonterà a:

$$W_{d(kWh)} = P_{d(kW)} \cdot N_{ore} = 3 \cdot 8 \cdot 365 = 8760 \text{ kWh} .$$

La sovratemperatura assunta dal conduttore si calcolerà per mezzo della formula 1.65-3, dove tutto è noto, all' infuori di p e di S. D'altronde la sezione S del conduttore, che è circolare, si ricaverà dalla ben nota formula $R = \rho \dfrac{l}{S}$, dove $\rho = 17\ \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{km}$, $l = 20$ km (andata e ritorno) ed $R = \Delta V / I = 150/20 = 7{,}5$ ohm, per cui:

$$S = \frac{\rho \cdot l}{R} = 17 \frac{20}{7{,}5} = 45{,}3 \text{ mm}^2 ,$$

cui corrisponde un raggio r di 3,8 mm e quindi un perimetro p di $2\pi r = 23{,}8$ mm.

In definitiva dunque si ha, usando le unità del sistema Giorgi:

$$\theta - \theta_a = \frac{0{,}239 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 20^2}{0{,}001 \cdot 23{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 45{,}3 \cdot 10^{-6}} = 1{,}5\ ^\circ\text{C} .$$

Esercizio 1.665

I due generatori della rete riportata in fig. 1.665-1 hanno la stessa tensione a vuoto, ma non sono in grado di fornire la stessa potenza: infatti il primo generatore può fornire una potenza massima n volte quella massima fornibile dal secondo generatore.

Si chiede: 1) in quale rapporto dovranno stare le resistenze interne

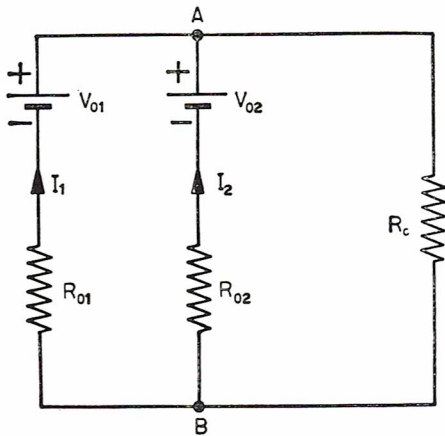



Fig. 1.665-1

dei due generatori affinché i suddetti generatori, chiusi in parallelo su di un carico qualsiasi, eroghino a questo una potenza tale da soddisfare la condizione sopra menzionata? 2) quale valore dovrà avere la resistenza di carico R_c perché il generatore n. 1 non superi la potenza fissata massima che esso può erogare?

Soluzione

1) La potenza erogata dal primo generatore dovrà essere dunque n volte quella erogata dal secondo generatore. Perciò detta I_1 e I_2 la corrente erogata rispettivamente dal primo e dal secondo generatore, sarà:

$$V_{01}I_1 = nV_{02}I_2\,,$$

cioè anche, poiché per ipotesi $V_{01} = V_{02}$:

$$I_1/I_2 = n\,.$$

D'altronde, indicata con V la tensione esistente fra i due nodi A e B (fig. 1.665-1), si avrà che:

$$V_{01} - V = R_{01} I_1$$

$$V_{02} - V = R_{02} I_2 .$$

Ma $V_{01} = V_{02}$, per cui dovrà essere:

$$\frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{I_2}{I_1},$$

e quindi, per quanto trovato più sopra, anche:

$$\frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{1}{n},$$

che rappresenta la condizione cercata.

2) Occorrerà esprimere la potenza del primo generatore in funzione anche della resistenza di carico R_c. A tale scopo la corrente erogata dal generatore verrà espressa nel seguente modo:

$$I_1 = \frac{V_{01} - V}{R_{01}} = \frac{V_{01} - R_c(I_1 + I_2)}{R_{01}} = \frac{V_{01}}{R_{01}} - \left[\frac{R_c}{R_{01}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] I_1 .$$

Da questa relazione si ricava, dopo aver sviluppato e ordinato, che:

$$I_1 = \frac{V_{01}}{R_{01} + R_c \dfrac{n+1}{n}} .$$

Pertanto la potenza erogata dal primo generatore ammonterà a:

$$P_1 = V_{01} I_1 = \frac{V_{01}^2}{R_{01} + R_c \dfrac{n+1}{n}} .$$

Sarà facile ricavare così la resistenza di carico R_c in funzione dei dati del problema, cioè:

$$R_c = \frac{n}{n+1}\left(\frac{V_{01}^2}{P_1} - R_{01}\right).$$

L'espressione ora trovata consentirà di ricavare dunque il valore di R_c corrispondente ad una fissata potenza del primo generatore, ad esempio quella massima come richiesto dall'esercizio.

1.7 Effetti chimici della corrente

1.71 Conduzione nelle soluzioni - Elettrolisi

Il passaggio della corrente elettrica in un corpo può avvenire solamente quando in esso si trovano delle cariche elettriche libere di muoversi. Nel caso specifico di un corpo allo stato liquido, tali cariche elettriche sono costituite da ioni, positivi e negativi, cioè da cariche elettriche elementari.

Il fenomeno della conduzione elettrica nei liquidi si presenterà perciò in maniera tanto più considerevole quanto più forte sarà la concentrazione degli ioni nel liquido stesso, ioni che potranno avere d'altronde qualsiasi provenienza.

È noto infatti dalla chimica che ad esempio l'acqua, se chimicamente purissima, pur presentando una debolissima concentrazione ionica dovuta ad alcune molecole dissociate (H^+, OH^-), risulta un liquido avente caratteristiche abbastanza isolanti [1], e tale rimane anche se si aggiungono delle sostanze chimiche, purché queste non si abbiano a dissociare, cioè non abbiano a dare origine a ioni. Questo è il caso di quasi tutti i composti organici, come ad esempio lo zucchero, ecc. ....

Viceversa, l'acqua diventa buona conduttrice per l'aggiunta di sostanze chimiche appartenenti al gruppo degli acidi, delle basi, dei sali, poiché queste dissociandosi danno luogo a ioni. Queste sostanze, che rendono conduttrice l'acqua, sono state denominate *elettroliti*. L'acido solforico (H_2SO_4), la soda caustica ($NaOH$), il solfato di rame ($CuSO_4$) sono dunque degli elettroliti, perché posti nell'acqua si dissociano rispettivamente negli ioni 2 H^+ ed SO_4^{--}, Na^+ ed OH^-, Cu^{++} ed SO_4^{--}.

Questa dissociazione è d'altronde dovuta alle caratteristiche del solvente [2], nel nostro caso l'acqua. Infatti, non appena viene posto nel solvente l'elettrolita, questo si dissocia (tutto o in parte a seconda della concentrazione) in ioni positivi e negativi (in numero tale che le cariche positive e negative sono eguali), e ciò indipendentemente da qualsiasi fenomeno elettrico cui il liquido è, o è stato, sottoposto.

Si consideri ora un recipiente avente le pareti e il fondo di materiale buon isolante, riempito di una soluzione acquosa, ad esempio di acido cloridrico (HCl) [3], nel quale si trovino immerse due lastre (elet-

---

[1] Appunto perché pochissimi gli ioni presenti nell'acqua : infatti la sua resistività alla temperatura di 20 °C ammonta a $20 \cdot 10^6 \Omega \cdot cm$, cioè qualche trilione di volte quella del ferro.

[2] Dicesi solvente il mezzo liquido nel quale l'elettrolita si dissocia. Il miglior solvente per gli elettroliti è l'acqua.

[3] È questa una soluzione elettrolitica.

trodi) di materiale buon conduttore dell'elettricità, ma tali da non reagire né con l'acqua né con l'elettrolita. Un dispositivo così fatto viene denominato *voltametro* (vedi fig. 1.71-1).

Si applichi quindi fra gli elettrodi una tensione continua. Che cosa succederà? Evidentemente gli ioni presenti nella soluzione, ioni dovuti alla dissociazione elettrolitica, si metteranno in movimento ordinato, dato che essi sono delle cariche elettriche libere. Precisamente gli ioni positivi migreranno verso l'elettrodo negativo (detto anche catodo),

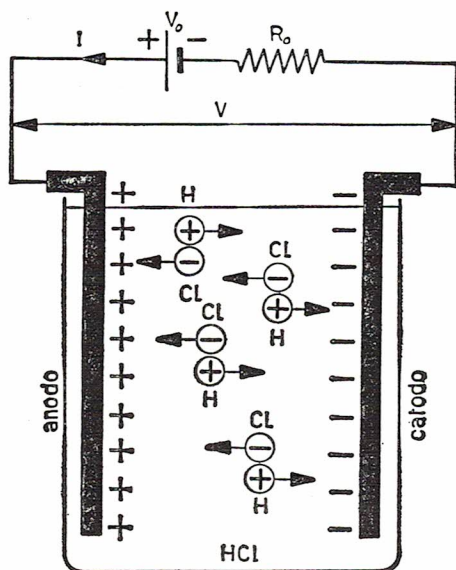



Fig. 1.71-1

cioè quello connesso al polo negativo del generatore elettrico; mentre gli ioni negativi migreranno verso l'altro elettrodo, cioè quello positivo (detto anche anodo).

Nasce così nella soluzione una corrente elettrica, ma, contemporaneamente, si viene a manifestare un fenomeno ben più interessante. Infatti succede che, nel nostro caso, gli ioni idrogeno, positivi, una volta arrivati sull'elettrodo negativo, si neutralizzano, per aver sottratto elettroni all'elettrodo negativo, diventando così normali atomi. Questi si combineranno poi fra di loro due a due per dar luogo a molecole d' idrogeno, elemento come è noto gassoso, e che quindi si libererà dalla soluzione. Ma anche gli ioni cloro, una volta arrivati sull'elettrodo positivo, cederanno a questo gli elettroni posseduti in più, tramutandosi perciò in atomi neutri, i quali si combineranno fra di loro ed, essendo gassosi, anch'essi si libereranno dalla soluzione.

Così, se nel voltametro sopra citato si sostituisce la soluzione di acido cloridrico con una soluzione di solfato di rame, si ha ancora il passaggio di una corrente elettrica, mentre il fenomeno chimico che si viene a manifestare è il seguente. Gli ioni positivi di rame (Cu^{++}), arrivati

sull'elettrodo negativo, gli sottraggono elettroni, diventando perciò neutri, quindi si depositano sopra dato che essi, neutralizzandosi, sono diventati atomi di rame. A poco a poco sull'elettrodo negativo verrà a depositarsi uno strato di rame metallico. Naturalmente nel frattempo anche gli ioni negativi (SO_4^{--}), che arrivano sull'elettrodo positivo, cedendo a questo gli elettroni posseduti in più, diventano neutri, cioè radicali (SO_4), e quindi tali da reagire immediatamente con l'acqua contenuta nel voltametro stesso, secondo la seguente reazione:

1.71-1 $$SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + O\,.$$

Avrà così luogo produzione di ossigeno (O_2) che gorgoglierà dal bagno, e di acido solforico (H_2SO_4) che resterà nel bagno.

E gli esempi potrebbero continuare ancora, ma il meccanismo fondamentalmente rimane sempre lo stesso perché gli ioni, una volta arrivati sui rispettivi elettrodi, diventano sempre atomi o radicali neutri. Questi naturalmente, a seconda delle loro caratteristiche chimiche, reagiranno [4] o con l'acqua della soluzione, o con il metallo di cui l'elettrodo è formato, oppure si depositeranno su quest' ultimo, o lasceranno quest' ultimo allo stato gassoso.

Ora a questo fenomeno abbastanza complesso del passaggio della elettricità attraverso le soluzioni è stato dato il nome di *elettrolisi* [5]. E si comprende come il passaggio di una corrente attraverso un liquido implichi anche uno spostamento di materia verso gli elettrodi, materia fornita dalla soluzione stessa. Naturalmente la mobilità di queste cariche (ioni) risulterà differente a seconda della natura materiale della stessa carica. Così uno ione di idrogeno risulta molto più veloce, a parità di condizioni, di uno di potassio, così come questo a sua volta è più veloce di quello di litio.

1.72 Leggi fondamentali dell'elettrolisi

Il fenomeno del passaggio della corrente elettrica attraverso le soluzioni e il conseguente trasporto e separazione di materia agli elettrodi sono retti da leggi ben precise.

Per quanto riguarda ad esempio la quantità di materia che si viene a separare [1] al contatto degli elettrodi sono fondamentali le due leggi di Faraday.

---

[4] Queste reazioni danno luogo nel voltametro ad azioni secondarie che di solito complicano il fenomeno.

[5] Elettrolisi è anche sinonimo di scomposizione di una sostanza chimica per mezzo della corrente elettrica, fenomeno che, come si è visto, è una conseguenza del passaggio della corrente stessa attraverso la soluzione.

[1] Il termine separare qui è usato in tutta la sua generalità: l'elemento infatti, dopo essersi neutralizzato, potrà in realtà liberarsi sotto forma gassosa, o depositarsi sull'elettrodo stesso, o reagire con esso o con il solvente.

La prima legge stabilisce che il peso degli elementi separati su ciascun elettrodo è direttamente proporzionale alla quantità di elettricità che ha attraversato la soluzione. Si può perciò anche dire che la quantità di materia separata agli elettrodi risulta direttamente proporzionale all' intensità della corrente continua che attraversa la soluzione, se viene fissato un certo intervallo di tempo, oppure all' intervallo di tempo in cui la corrente agisce, se questa rimane di valore costante.

La giustificazione di tale legge è assai semplice, se si considera che, per separare sugli elettrodi una certa quantità di materia, vi deve essere stato nella soluzione un movimento di materia stessa, cioè di ioni. D'altronde, per una ben determinata soluzione, questi possiedono tutti la stessa carica elettrica : per raddoppiare, triplicare, ecc..... la quantità di materia da separare occorrerà ovviamente raddoppiare, triplicare, ecc..... il numero delle cariche in circolazione.

La seconda legge stabilisce invece che, se si collegano in serie più voltametri differenti, sia per la loro costruzione sia per le soluzioni contenute, in modo però che effettivamente in essi abbia a circolare la stessa quantità di elettricità, si ha che i pesi dei diversi elementi separati sui vari elettrodi risultano proporzionali ai rispettivi equivalenti chimici. Si ricordi come per equivalente chimico di un atomo o radicale s' intenda il rapporto fra il peso atomico e la valenza dell'elemento considerato. Ad esempio il rame, che è bivalente e ha peso atomico 63,56, presenta un equivalente chimico di $63{,}56/2 = 31{,}78$.

La seconda legge è basata in sostanza sul fatto che il numero di cariche elementari corrispondenti a quella dell'elettrone ($q_e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C) manifestate da uno ione dipende sempre dalla relativa valenza : infatti uno ione monovalente manifesta una sola carica elementare q_e, uno ione bivalente ne manifesta due, ecc., come già è stato detto nel § 1.13. Perciò, ad esempio, affinché in una soluzione, ove sono presenti ioni bivalenti, passi la stessa quantità di elettricità che in un'altra soluzione, ove sono presenti ioni monovalenti, occorrerà che nella prima soluzione il numero di ioni interessati al trasporto sia naturalmente metà rispetto a quelli della seconda soluzione.

D'altra parte nei processi di elettrolisi si parla sovente di equivalente elettrochimico. Questo non è che il peso in grammi di un elemento che viene liberato dal passaggio di una quantità di elettricità pari ad un coulomb. Risulta così, dopo quanto è stato esposto in questo paragrafo, che gli equivalenti elettrochimici sono sempre proporzionali ai rispettivi equivalenti chimici ([2]). La costante di proporzionalità verrà calcolata fra breve.

È importante ricordare inoltre che un grammo-atomo ([3]) di un qualsiasi elemento chimico è sempre costituito da $N \cong 6{,}03 \cdot 10^{23}$ atomi (N è il

---

([2]) Questo in sostanza è un altro modo di esprimere quanto è contenuto nelle due leggi di Faraday sopra citate.

([3]) Dicesi grammo-atomo la quantità in peso, espresso in grammi, eguale al peso atomico. Ad esempio un grammo-atomo di rame pesa 63,56 grammi.

numero di Avogadro). Ne consegue che, per separare in un processo di elettrolisi un grammo-atomo di materia, sono necessari $6{,}03 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19} \cong 96500$ coulomb *per ogni valenza posseduta dall'elemento ione.* È come dire cioè che, pre liberare un equivalente chimico, è necessario far passare nella soluzione una quantità di elettricità pari a :

$$\text{1.72-1} \qquad \frac{1 \text{ gr. atomo}}{\text{valenza}} = 1 \text{ equivalente chimico} \rightarrow 96500 \text{ coulomb},$$

e quindi che :

$$\text{1.72-2} \qquad 1 \text{ equivalente elettrochimico} = \frac{1 \text{ eq. chimico}}{96500}.$$

La costante di proporzionalità fra equivalente elettrochimico ed equivalente chimico vale dunque $1/96500 = 10{,}36 \cdot 10^{-6}$. L'equivalente elettrochimico ad esempio del rame ammonta a 0,329 milligrammi per coulomb.

1.73 Resistenza elettrica delle soluzioni

Si è detto che il passaggio dell'elettricità attraverso una soluzione elettrolitica si basa sul movimento di ioni positivi e negativi, in versi opposti (vedi fig. 1.71-1). La conduzione in una soluzione elettrolitica risulta dunque una conduzione *ionica*, poiché agli ioni è appunto affidato il compito di trasportare l'elettricità attraverso la soluzione stessa.

È naturale pensare d'altronde che questi ioni in movimento ordinato verso gli elettrodi siano ostacolati nel muoversi entro la soluzione stessa : il movimento ordinato non potrà dunque essere spontaneo, ma avverrà solamente sotto l'azione di una forza esterna (generatore elettrico) che fornisca loro l'energia necessaria per vincere l'azione frenante delle molecole contigue costituenti la soluzione.

La teoria e l'esperienza mostrano a questo proposito che le soluzioni elettrolitiche ubbidiscono alla legge di Ohm, e quindi alla legge di Joule, come un qualsiasi corpo conduttore (1). In sostanza dunque un voltametro presenterà una certa ben definita resistenza ohmica R, il cui valore potrà essere calcolato una volta noto il valore della resistività della soluzione e conoscendo inoltre le dimensioni della cella e degli elettrodi e la loro posizione.

Naturalmente il valore della resistività di una soluzione elettrolitica sarà funzione di diversi parametri : precisamente è stato dimostrato che esso dipende in maniera inversamente proporzionale dalla mobilità, dalla valenza e dalla concentrazione degli ioni nella soluzione data. D'altronde il coefficiente di temperatura α risulta negativo (2), poiché un aumento

---

(1) Il passaggio della corrente attraverso la soluzione riscalderà perciò il voltametro.

(2) Ad esempio per una soluzione di acido solforico a 20 °C, concentrazione dell'acido 5 %, si ha : $\rho = 4{,}80\ \Omega \cdot \text{cm}$ e $\alpha = -0{,}0121$; con concentrazione 30 % si ha : $\rho = 1{,}35\ \Omega \cdot \text{cm}$ e $\alpha = -0{,}0162$.

di temperatura, provocando un aumento del grado di dissociazione dell'elettrolita, determina una diminuzione della sua resistività.

Le soluzioni d'altra parte non vengono impiegate quasi mai specificatamente come sostanze conduttrici dell'elettricità. I resistori a liquido infatti trovano scarsa applicazione per la loro evidente poca praticità ; un po' più diffusi sono invece i reostati a liquido, perché essi sono in grado di dissipare potenze molto grandi con relativa facilità.

1.74 Applicazioni industriali dell'elettrolisi

Diverse sono le applicazioni dell'elettrolisi, soprattutto nel campo industriale.

Mediante processi elettrolitici si producono infatti industrialmente alcuni fra i metalli di grande impiego, come l'alluminio, lo zinco, il rame. A tale scopo può essere usato un bagno in cui sia stato posto un sale del metallo e come catodo una lastra dello stesso metallo da separare. Ma per via elettrolitica si possono ottenere anche altri elementi, come l' idrogeno, l'ossigeno, il cloro, ecc. ... (si pensi ad esempio all'elettrolisi dell'acqua, resa acidula per acido solforico, che dà all'anodo ossigeno e al catodo idrogeno), nonché alcuni composti chimici, come gli idrati (ad esempio la soda caustica), gli ipocloriti, i perfosfati, ecc. ....

Pure mediante un processo di elettrolisi può essere compiuta la raffinazione di diversi metalli, come il rame, lo zinco, l'alluminio, l'argento, ecc. .... Ciò viene ottenuto impiegando un voltametro il cui anodo sia costituito da una lastra del materiale da purificare e il cui bagno sia una soluzione acida che possa reagire con l'anodo. Al catodo si depositerà allora, per azione del passaggio della corrente, il metallo puro ; mentre le impurità, subendo un'azione di trasporto assai limitata, precipiteranno sul fondo del voltametro.

Anche la *galvanostegia* costituisce una importante applicazione pratica dell'elettrolisi. Essa infatti permette di rivestire qualsiasi oggetto metallico e, con qualche accorgimento, anche non metallico (1), di uno strato sottile di altro metallo. Questa pellicola è molto compatta e di solito brillante, pur risultando molto sottile. Mediante galvanostegia si realizza così la ramatura, la nichelatura, la zincatura, l'argentatura, ecc. .... degli oggetti più disparati. In sostanza basterà impiegare un voltametro ove il catodo sia costituito dall'oggetto da rivestire, mentre l'anodo dovrà risultare costituito dal metallo necessario per il rivestimento. D'altra parte il bagno dovrà contenere un sale di quest' ultimo metallo.

E' importante notare come tutti questi processi abbiano in comune, dal punto di vista elettrico, la caratteristica di richiedere forti intensità di corrente. Si consideri infatti che sono necessari 96500 ampere per decom-

---

(1) In questo caso si parla più propriamente di galvanoplastica.

porre o depositare in un secondo una quantità di materia pari ad un equivalente chimico, cioè in sostanza pari a qualche decina di grammi di elemento. Fortunatamente la tensione necessaria per il buon funzionamento di ogni voltametro è di solito molto bassa.

1.75 Problemi di applicazione al § 1.7

Esercizio 1.751

Quanti milligrammi si depositano in ogni secondo al catodo di un voltametro contenente una soluzione di sale d'argento (peso atomico dell'argento 107,9), quando è percorso da una corrente avente l' intensità di un ampere ?

Soluzione

Al catodo del suddetto voltametro si depositerà argento metallico, elemento, come è noto, monovalente. Il suo equivalente chimico vale perciò 107,9. Di conseguenza l'equivalente elettrochimico ammonta a:

$$\text{eq. elettroch. } Ag = \frac{107{,}9}{96500} = 1{,}118 \cdot 10^{-3} \text{ g/C.}$$

Poiché d'altronde in ogni secondo la quantità di elettricità dovuta ad una corrente elettrica di un ampere è di un coulomb, l'argento che si deposita al catodo in questo intervallo di tempo varrà 1,118 milligrammi.

Esercizio 1.752

Si chiede quanto idrogeno e quanto ossigeno si liberano in 5 ore agli elettrodi di un voltametro contenente acqua resa acida per acido solforico ed attraversato da una corrente continua dell' intensità di 100 ampere.

Soluzione

Il passaggio di una corrente di 100 ampere per 5 ore corrisponde al fluire della seguente quantità di elettricità:

$$Q = It = 100 \cdot 5 \cdot 3600 = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ coulomb},$$

la quale separerà su ciascun elettrodo una quantità di materia, espressa in grammo-atomo/valenza, pari a:

$$\frac{1800000}{96500} = 18{,}68 \quad \frac{\text{grammi-atomo}}{\text{valenza}}.$$

Ricordando ora che il peso atomico dell' idrogeno vale 1,008 e che l'elemento è monovalente, mentre il peso atomico dell'ossigeno vale 16 e che l'elemento è bivalente, si potrà affermare subito che l' idrogeno sviluppato al catodo ammonta a: $18{,}68 \cdot 1{,}008 \cong 18{,}82$ grammi, e che l'ossigeno svolto all'anodo ammonta a: $\frac{18{,}68}{2} \cdot 16 \cong 149{,}2$ grammi.

Se il problema avesse fornito i valori degli equivalenti elettrochimici dell' idrogeno ($0{,}01045 \cdot 10^{-3}$ g/C) e dell'ossigeno ($0{,}0829 \cdot 10^{-3}$ g/C), allora in questo caso le quantità d' idrogeno e di ossigeno liberate sarebbero state calcolate più semplicemente come segue:

$$\text{idrogeno} \quad 0{,}01045 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}8 \cdot 10^6 \cong 18{,}82 \text{ grammi}$$
$$\text{ossigeno} \quad 0{,}0829 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}8 \cdot 10^6 \cong 149{,}2 \text{ grammi}.$$

Esercizio 1.753

Sapendo che l'equivalente elettrochimico dell'ossigeno vale $0{,}0829 \cdot 10^{-3}$ g/C, quanti amperora sono necessari per produrre 10 kg di ossigeno?

Soluzione

Per produrre 10000 grammi di ossigeno è necessario far passare nel voltametro una quantità di elettricità Q pari a:

$$Q = \frac{10000}{0{,}0829 \cdot 10^{-3}} = 120{,}5 \cdot 10^6 \text{ coulomb},$$

la quale, espressa in amperora, poiché 1 coulomb = 1 ampersecondo = $= \frac{1}{3600}$ amperora, corrisponde a:

$$Q = \frac{120{,}5 \cdot 10^6}{3600} = 33500 \text{ amperora}.$$

1.8 Accumulatori e pile

1.81 Forza elettromotrice di polarizzazione

Il passaggio dell'elettricità nelle soluzioni elettrolitiche determina, già lo si è visto nei precedenti paragrafi, interessanti processi chimici.

È importante osservare subito come le trasformazioni e i processi chimici che avvengono in un voltametro implichino un assorbimento di energia. Questa energia necessariamente dovrà essere fornita al voltametro dal generatore elettrico il quale, con la sua forza elettromotrice, mantiene il passaggio della corrente elettrica attraverso la soluzione. Un voltametro assorbe dunque dell'altra energia, oltre a quella dissipata in calore per effetto Joule.

È noto infatti che per separare gli elementi chimici di un composto occorre una certa energia, in valore eguale a quella che si è liberata all'atto della formazione del composto stesso. Tutti sanno ad esempio che l' idrogeno e l'ossigeno si combinano assieme per dare acqua, producendo nel contempo notevole energia (termica). La reazione inversa, cioè la scomposizione dell'acqua nei suoi elementi idrogeno e ossigeno, avverrà pertanto solamente apportando energia al processo. L'elettrolisi dell'acqua potrà avvenire solamente quindi fornendo al voltametro quella certa quantità di energia necessaria per la scomposizione [1] oltre a quella dissipata per effetto Joule, ovviamente.

Una spiegazione più convincente di quanto sopra riportato potrà aversi solamente studiando più a fondo il meccanismo del passaggio dell'elettricità nelle soluzioni. Si vedrebbe allora che, data tensione al voltametro, i primi ioni, una volta arrivati sugli elettrodi, non si liberano, o si depositano, ma vi rimangono davanti, formando così alla fine una specie di guaina attorno all'elettrodo stesso. Questa guaina impedisce naturalmente agli altri ioni di poter raggiungere l'elettrodo, a meno che questi non vi abbiano ad arrivare con sufficiente energia, tale cioè da vincere quella repulsione che si manifesta fra cariche dello stesso segno (cioè fra gli ioni fermi attorno all'elettrodo e quelli in arrivo). Ciò equivale a dire dal punto di vista elettrico che, in sostanza, per gli ioni ogni elettrodo manifesta una forza controelettromotrice, e che quindi per poter raggiungere l'elettrodo gli ioni dovranno vincere tale *d.d.p.* È stato dimostrato d'altronde che il valore di questa *f.c.e.m.* è dipendente dalla natura chimica degli elementi separati, ma non dipende dalla forma degli elettrodi o da quella del voltametro.

Questa forza controelettromotrice è stata denominata *tensione di polarizzazione elettrodica.* Essa si localizza dunque in quella sottile guaina che avvolge l'elettrodo (quindi fra la superficie dell'elettrodo e la soluzione immediatamente adiacente), ed assumerà valori diversi per una stessa soluzione secondoché si tratti dell'anodo o del catodo. Tuttavia in pratica ha interesse solamente il valore presentato dalla somma della *f.c.e.m.* anodica e catodica, poiché in definitiva sarà questa *d.d.p.* risultante che verrà ad ostacolare il passaggio dell'elettricità attraverso il

---

(1) Qui per scomposizione non si intende il fenomeno della dissociazione elettrolitica, cioè della scissione della molecola in ioni, bensì la separazione materiale degli ioni di segno opposto in modo tale che essi possano essere raccolti separatamente (ad esempio per l'acqua ciò significa raccogliere separatamente gli ioni idrogeno da quelli ossigeno).

voltametro. Il generatore elettrico dovrà vincere evidentemente questa *d.d.p.*, indicata correntemente col nome di *tensione di polarizzazione* (V_p) [2].

Solamente ora si è in grado di scrivere l'equazione completa del voltametro, poiché si è capito che caduta ohmica (RI) e tensione di polarizzazione (V_p) sono le cause che determinano assieme la caduta di tensione totale in un voltametro. Sarà perciò in formule:

1.81-1 $$V = RI + V_p ,$$

e quindi anche, moltiplicando ambo i membri dell'equazione per It:

1.81-2 $$VIt = RI^2t + V_pIt .$$

La 1.81-2 dimostra così agevolmente che, dell'energia elettrica assorbita dal voltametro (VIt), una parte si dissipa in calore (RI^2t), la restante

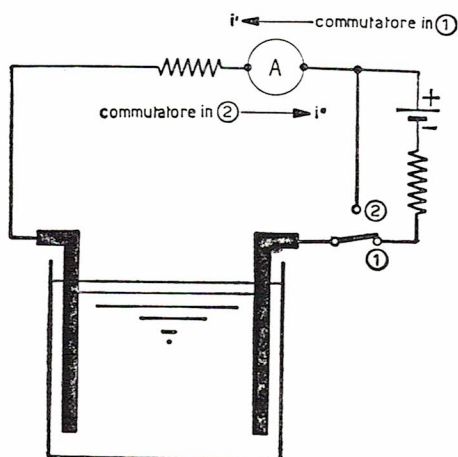



Fig. 1.81-1

parte (V_pIt) invece si tramuta in altra energia, che qui non può essere altro che energia chimica, affinché cioè si possano compiere nel voltametro quei processi chimici che portano in definitiva alla liberazione o alla deposizione degli elementi presenti nella soluzione.

Dalla 1.81-1 scaturisce invece come non sia possibile realizzare un benché minimo processo di elettrolisi se, ai capi di ciascuna cella elettrolitica, la tensione non supera il valore caratteristico della tensione di polarizzazione V_p, valore che d'altronde non è mai molto alto (qualche volt). Ad esempio per l'elettrolisi dell'acqua si ha $V_p \cong 1,5$ volt.

È interessante osservare da ultimo come chiudendo su di un amper-

---

[2] Detta anche tensione di scomposizione.

metro gli estremi di un voltametro, il quale abbia funzionato per un certo tempo, anche breve, si noti un ben deciso passaggio di corrente, di verso contrario a quello presentato dalla corrente quando il voltametro era chiuso sul generatore (vedi fig. 1.81-1). Tale passaggio di corrente dimostra inequivocabilmente che in queste condizioni il voltametro si sta comportando come un generatore elettrico : ovviamente detta corrente non potrà essere causata che dalla tensione di polarizzazione, la quale ora agisce come *f.e.m.* Naturalmente questa corrente, dovuta alla scarica del voltametro, andrà gradualmente esaurendosi.

Il fenomeno è interessante e trova applicazione pratica negli *accumulatori elettrici* i quali sfruttano appunto le *f.e.m.* di polarizzazione, cioè in definitiva l'energia chimica che si è accumulata sugli elettrodi durante il precedente processo di carica. Tutto ciò si vedrà più estesamente nel prossimo paragrafo.

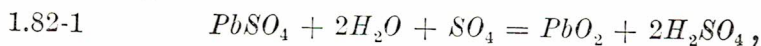
1.82 Accumulatori elettrici

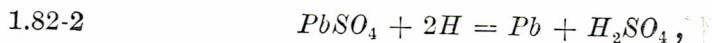
Un accumulatore elettrico è un voltametro nel quale il passaggio della corrente in un certo verso determina un fenomeno di polarizzazione agli elettrodi molto cospicuo, tale quindi da poter fornire successivamente in fase di scarica una notevole quantità di energia elettrica. Un accumulatore è dunque una cella elettrolitica perfettamente reversibile, nella quale si sfruttano le forze elettromotrici di polarizzazione.

In sostanza, nell'accumulatore si compiranno certe reazioni chimiche al passaggio della corrente in fase di carica, quando cioè il voltametro è connesso al generatore elettrico, reazioni che si svolgeranno successivamente in maniera opposta quando il voltametro sarà connesso ad un carico, cioè quando sarà il voltametro ad erogare corrente. Naturalmente nella prima fase, quella di carica, la cella assorbirà energia elettrica che, in parte, le reazioni chimiche in atto trasformeranno in energia chimica ; nella successiva seconda fase, quella cioè di scarica, l'energia chimica accumulata si trasformerà in energia elettrica, poiché le reazioni chimiche avverranno in maniera opposta.

Per una maggiore comprensione di quanto detto sopra, si vuole qui ricordare il meccanismo con il quale avviene il fenomeno della carica e della scarica in un tipo di accumulatore molto usato, quello cosiddetto *al piombo.* È questo un accumulatore costituito sostanzialmente da una cella elettrolitica contenente una soluzione di acqua (H_2O) ed acido solforico (H_2SO_4), molto diluito, e da due elettrodi di piombo (Pb, elemento bivalente). Questi, per l'azione dell'acido solforico, saranno inizialmente entrambi ricoperti da un sottile strato di solfato di piombo ($PbSO_4$), mentre la soluzione conterrà ioni positivi di idrogeno ($2H^+$) e ioni negativi del radicale acido (SO_4^{--}).

Facendo ora attraversare la cella da una corrente elettrica (vedi fig. 1.82-1*a*) si avrà che gli ioni negativi (SO_4^{--}), una volta arrivati all'anodo e neutralizzata la loro carica, reagiranno con il solfato che ricopre l'elettrodo e con l'acqua della soluzione nel seguente modo :

$$PbSO_4 + 2H_2O + SO_4 = PbO_2 + 2H_2SO_4 \,, \tag{1.82-1}$$

trasformando cioè il solfato in biossido di piombo e producendo acido solforico ; mentre gli ioni idrogeno ($2H^+$), arrivati al catodo e neutralizzatisi, reagiranno anch'essi col solfato di piombo, di cui è ricoperto l'elettrodo, nel seguente modo :

$$PbSO_4 + 2H = Pb + H_2SO_4 \,, \tag{1.82-2}$$

trasformando cioè il solfato di piombo in piombo metallico, spugnoso, e producendo acido solforico.

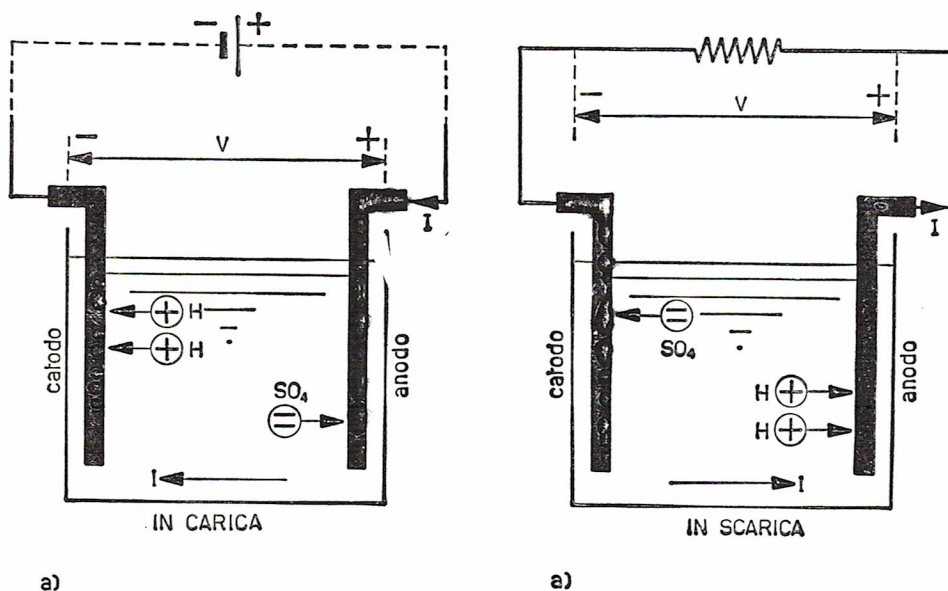



Fig. 1.82-1

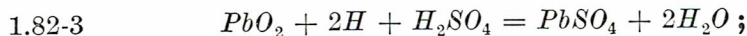
Alla fine della carica si avrà dunque che l'elettrodo positivo sarà ricoperto da uno strato di biossido di piombo, mentre l'elettrodo negativo sarà nella sua parte più esterna allo stato di piombo spugnoso. La carica avrà termine precisamente quando l'energia elettrica fornita all'accumulatore non potrà più essere immagazzinata sotto forma di energia chimica, cioè quando l' idrogeno e il radicale acido non riusciranno più a penetrare entro il solfato di piombo che ricopre gli elettrodi per reagire secondo le equazioni scritte in 1.82-1 e 2. Da questo momento in poi ogni ulteriore apporto di energia elettrica determinerà solamente [1]

---

[1] Si prescinde dall'effetto Joule, sempre presente quando vi è circolazione di corrente elettrica.

il fenomeno dell'elettrolisi dell'acqua contenuta nella cella, fenomeno che porta come è noto allo svolgimento di bolle gassose d'idrogeno e di ossigeno, caratterizzando così questa seconda fase, inutile al fine della carica dell'accumulatore, con un forte *bollore* della soluzione.

Nel processo di scarica (vedi fig. 1.82-1*b*), le reazioni chimiche che avvengono nell'accumulatore, a causa del passaggio della corrente in senso inverso a quello che si aveva in carica, sono le seguenti. Per la piastra positiva (anodo), ove ora arrivano gli ioni di idrogeno, perché la corrente ha invertito verso, si ha:

1.82-3 $$PbO_2 + 2H + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2H_2O\,;$$

cioè gli ioni idrogeno, dopo aver ceduto la loro carica positiva all'anodo, reagiscono con il biossido di piombo e l'acido solforico per riformare sull'elettrodo solfato di piombo e produrre acqua; mentre per la piastra negativa (catodo), ove arrivano ora gli ioni del radicale SO_4, poiché la corrente ha invertito verso entro la cella, si ha:

1.82-4 $$Pb + SO_4 = PbSO_4\,,$$

cioè gli ioni negativi del radicale acido, dopo aver ceduto la loro carica negativa al catodo, riformano pure su questo elettrodo il solfato di piombo.

Il processo di scarica avrà termine quando tutto il biossido di piombo e il piombo spugnoso si saranno trasformati in solfato di piombo. In pratica non conviene spingere la scarica fino a tale punto, ma è necessario arrestarla ad un certo grado. Si provvederà quindi a ricaricare subito l'accumulatore, poiché solo così sarà possibile far durare a lungo l'apparecchiatura.

Le equazioni riportate in 1.82-1, 2, 3, 4, che rappresentano le reazioni chimiche fondamentali che presiedono al fenomeno dell'accumulo e della restituzione dell'energia elettrica, mostrano chiaramente come durante i processi di carica e scarica la concentrazione dell'acido solforico nella soluzione della cella abbia a variare, ma anche come, alla fine di ogni ciclo completo di scarica e successiva carica, la cella si riporti sempre allo stesso identico stato di partenza. Teoricamente dunque un accumulatore, una volta posto in regolare funzionamento, potrebbe essere scaricato e caricato all' infinito senza il bisogno di dover apportare nuovo materiale (elettrolita e piombo). In pratica l'accumulatore abbisognerà sempre di una certa manutenzione per mantenere la soluzione nella concentrazione voluta; d'altronde, dopo un certo numero (abbastanza elevato) di scariche, le sue piastre saranno fuori uso e dovranno essere sostituite.

In fig. 1.82-2 si è riportata per una cella al piombo la caratteristica tensione-tempo relativa alla fase di carica e di scarica. Essa è importante, poiché mostra come varia in funzione del tempo la tensione ai capi di una cella. Si può vedere così come in fase di scarica il valore di questa *d.d.p.* sia molto costante (circa 2 volt) entro un intervallo di tempo abba-

stanza notevole. Ed è proprio entro quest' intervallo che l'accumulatore viene usato.

Oltre alla tensione dell'accumulatore, è pure importante la conoscenza della quantità di elettricità che esso può dare normalmente nel

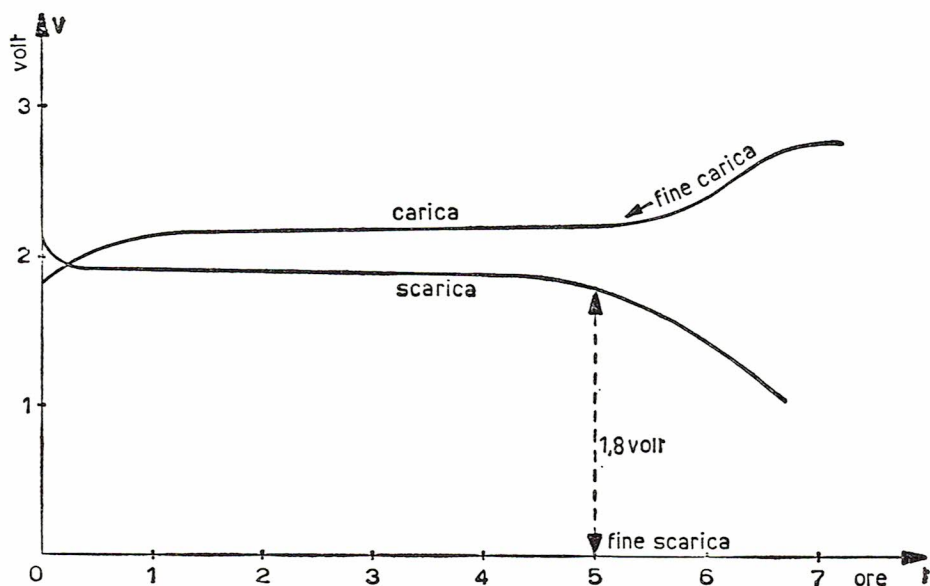



Fig. 1.82-2.

processo di scarica ([2]), dopo essere stato caricato a fondo. Questa quantità di elettricità rappresenta la cosiddetta *capacità* dell'accumulatore e viene indicata di solito in amperora, anziché in coulomb.

1.83 Effetto Volta

Tutte le volte che due corpi conduttori, aventi natura fisica o chimica differente, vengono a contatto fra di loro danno luogo ad una *d.d.p.* detta *forza elettromotrice di contatto* (vedi fig. 1.83-1). Ciò costituisce appunto il cosiddetto *effetto Volta*.

A questo proposito è importante notare che:

1) il valore della *f.e.m.* di contatto fra due corpi conduttori differenti dipende dalla loro natura fisica, chimica, dalla temperatura, ma non dipende dalle dimensioni del contatto e dalla forma geometrica dei corpi (prima legge di Volta). Ad esempio fra ferro e rame si ha una *d.d.p.*

([2]) Per normalmente s' intende una scarica né troppo violenta né troppo lenta. Di solito ci si riferisce ad una scarica continua in cinque ore.

del valore di 0,13 volt con il ferro positivo rispetto al rame, fra zinco e rame si manifesta invece una *d.d.p.* del valore di 0,78 volt, con lo zinco positivo rispetto al rame (¹) ;

2) ponendo più corpi diversi, purché metallici, in serie fra di

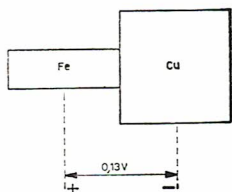



Fig. 1.83-1

loro (vedi fig. 1.83-2), il valore risultante della *f.e.m.* di contatto fra il primo e l' ultimo corpo è eguale alla *f.e.m.* di contatto che si sarebbe avuta ponendo il primo e l' ultimo corpo direttamente a contatto (seconda legge di Volta) (²). Ciò naturalmente è vero soltanto se tutti i contatti sono alla stessa temperatura (³).

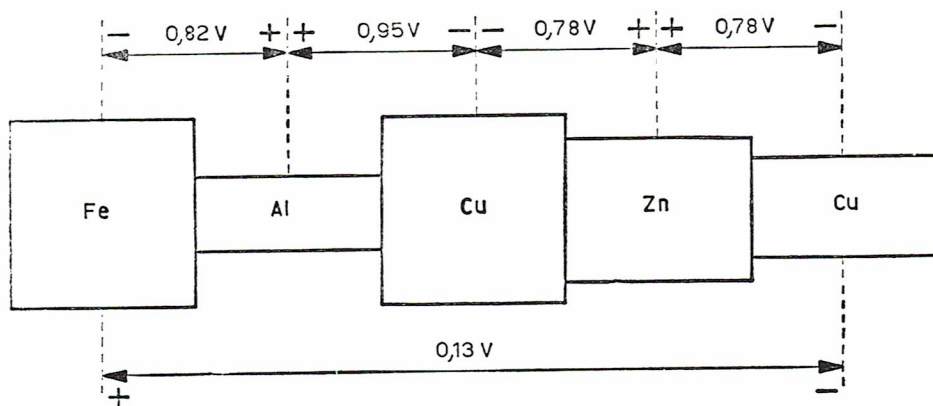



Fig. 1.83-2

È necessario ricordare però che quanto espresso dalla seconda legge di Volta cade in difetto quando fra i vari corpi posti in contatto sia stato interposto uno o più conduttori elettrolitici. In questo caso è bene precisare subito che la tensione di contatto fra il metallo e la soluzione elet-

---

(¹) I valori della *d.d.p.* di contatto fra i vari corpi sono tutti dell'ordine della frazione del volt o, al massimo, del volt.

(²) In una catena chiusa di materiali eterogenei tutti metallici la *f.e.m.* di contatto risultante è dunque nulla, così come in una catena aperta quando il primo e l'ultimo conduttore sono costituiti da due metalli eguali.

(³) Caso contrario si dovrà tener conto anche delle cosiddette *f.e.m.* termoelettriche (effetto Seebeck).

trolitica risulta generalmente tanto più grande quanto più il metallo è attaccabile dalla soluzione elettrolitica. Inoltre il metallo sarà negativo rispetto alla soluzione se manderà ioni nella soluzione, viceversa, se sono gli ioni positivi della soluzione a depositarsi sul metallo, questo risulterà positivo.

1.84 Generatori voltaici - Pile

Un generatore voltaico (pila) è composto da due corpi metallici differenti (elettrodi) immersi in una soluzione elettrolitica (vedi fig. 1.84-1). In tal caso, per quanto è stato richiamato nel precedente paragrafo,

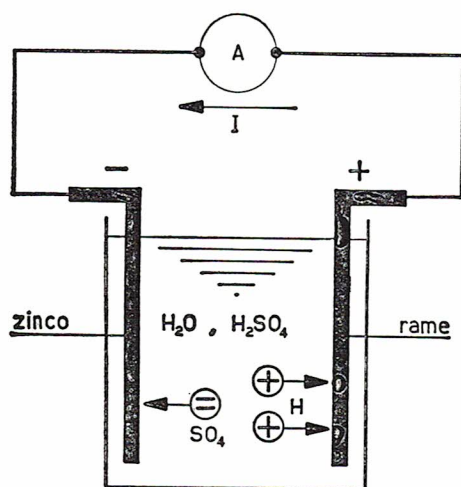



Fig. 1.84-1

chiudendo i due corpi conduttori su se stessi, la *f.e.m.* risultante, che verrà ad agire nell'anello chiuso, non sarà più nulla a causa della presenza nella catena di una soluzione elettrolitica. Pertanto il circuito verrà percorso da corrente.

Il generatore voltaico rappresentato in fig. 1.84-1 ricorda quello di Volta [1] (pila a tazza), ove gli elettrodi erano costituiti rispettivamente da una lastra di rame (polo positivo) e di zinco (polo negativo), immersi in una soluzione acida (ad esempio per acido solforico). La tensione risultante a morsetti aperti vale in questo caso 1,08 volt.

Si è detto che il generatore voltaico, se chiuso esternamente su di un circuito, mette in circolazione una corrente elettrica. Questa natural-

---

(1) La originaria pila di Volta era costituita da una serie di dischetti di rame e zinco alternati con dischi di panno imbevuto di acqua acidula, donde il nome di *pila*. Tale nome è rimasto tutt'oggi per indicare un elemento il quale fornisce energia elettrica per trasformazione di energia chimica.

mente dovrà attraversare il generatore stesso. Quali saranno i fenomeni cui questa corrente darà luogo ? Ovviamente si inizierà entro il generatore stesso, che ha la struttura di un voltametro (vedi fig. 1.84-1), un fenomeno di elettrolisi della soluzione acida, elettrolisi che porterà a sviluppare idrogeno all'elettrodo positivo (rame) ed ossigeno a quello negativo (zinco) (²). Nascerà così una *f.c.e.m.* di polarizzazione per ciascun elettrodo (³) che in breve tempo tenderà ad annullare l'azione della *f.e.m.* di contatto. La corrente elettrica dopo un po' di tempo si ridurrà pertanto a zero.

Perché un generatore voltaico si comporti effettivamente da generatore elettrico, cioè affinché esso possa erogare in continuità della corrente elettrica, è dunque necessario combattere il fenomeno della polarizzazione elettrolitica. Ciò si raggiunge in pratica adoperando delle particolari sostanze chimiche (depolarizzanti) le quali, poste nell' intorno degli elettrodi, abbiano ad impedire la formazione delle guaine gassose, che sono la causa appunto delle *f.e.m.* di polarizzazione. In generale è sufficiente neutralizzare quella dovuta all' idrogeno, la cui azione è pre-

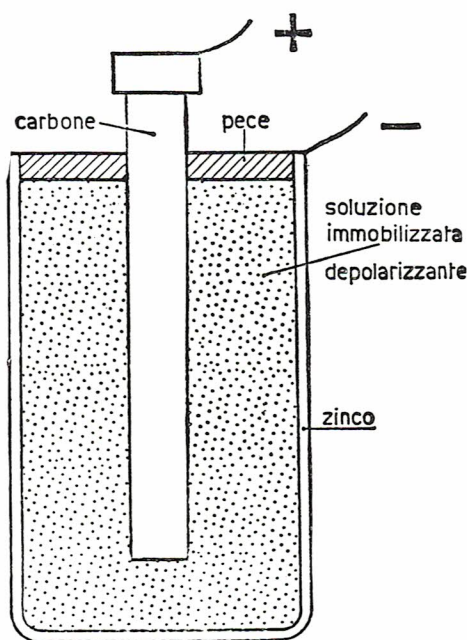



Fig. 1.84-2

(²) Nel generatore voltaico la corrente ha verso opposto rispetto alla corrente circolante nel voltametro : infatti nel generatore la corrente esce dall'anodo, nel voltametro esce dal catodo, poiché il primo caso rappresenta un bipolo attivo, il secondo un bipolo passivo.

(³) Notevole quella dovuta all' idrogeno, trascurabile quella dovuta all'ossigeno.

ponderante come accennato nella nota 3. In questo modo il generatore voltaico potrà erogare con continuità corrente al circuito esterno, cioè potrà fornire una certa quantità di energia elettrica, energia che ovviamente proverrà dalla trasformazione di quell'energia chimica posseduta dalle sostanze costituenti il generatore stesso.

Diversi sono i vari tipi di pile che oggi si possono trovare ancora in uso. Si ricorda qui la pila Weston, avente per elettrodi il mercurio, come anodo, e l'amalgama di cadmio, come catodo, e per elettrolita il solfato di cadmio. Tale pila viene impiegata nei laboratori come generatore campione di tensione, poiché la sua tensione a vuoto ($V_0 = 1{,}019$ a $20\,^{\circ}C$) si mantiene costante nel tempo e varia pochissimo con la temperatura e perché inoltre elemento di grande durata, facilmente trasportabile e facilmente riproducibile.

La pila Leclanché, oggi molto usata nella variante del cosiddetto tipo a secco (vedi fig. 1.84-2), è costituita invece da un catodo di zinco (polo negativo), che fa le funzioni anche di contenitore, e da un anodo di carbone (polo positivo); l'elettrolita è una soluzione di cloruro di ammonio immobilizzato, affinché esso non abbia ad uscire dall' involucro. L' immobilizzo è fatto con sostanze inerti e gelatinose, le quali hanno anche lo scopo di separare i due elettrodi. Il depolarizzante risulta costituito

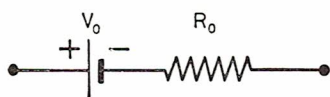



Fig. 1.84-3

da una miscela di polvere di carbone cocke, grafite e biossido di manganese. Quest' ultimo è molto avido di idrogeno. Il depolarizzante riempie un sacchettino di tela che contiene l'anodo. La *f.e.m.* di un elemento di questo tipo ammonta a 1,6 volt, quando perfettamente nuovo, a $1{,}4 \div 1{,}5$ volt, dopo molto tempo.

Si noti da ultimo che nei circuiti elettrici i generatori voltaici (pile ed accumulatori) vengono schematizzati col graficismo riportato in fig. 1.84-3, simbolo che già è stato introdotto nel testo a proposito dei generatori di *f.e.m.* continue per ragione di semplicità. Infatti non tutti i generatori di *f.e.m.* continue sono generatori voltaici.

1.85 Problemi di applicazione al § 1.8

Esercizio 1.851

Quale valore ha l' intensità di corrente erogata con uniformità da una pila tipo Leclanché il cui catodo ha perso due grammi di zinco in un'ora? (eq. elettroch. dello zinco $0{,}339 \cdot 10^{-3}$ g/C).

Soluzione

Se il catodo ha perso due grammi di zinco vuol dire che ha anche mandato in soluzione tanti ioni quanti nel loro insieme corrispondono ad una quantità di elettricità Q tale da soddisfare la seguente proporzione, impostata sulla stessa definizione di equivalente elettrochimico:

$$0{,}339 \cdot 10^{-3} \text{ gr. zinco} : 1 \text{ coulomb} = 2 \text{ gr. zinco} : Q\,,$$

da cui si ricava facilmente che:

$$Q = \frac{2}{0{,}339 \cdot 10^{-3}} = 5900 \text{ coulomb}\,.$$

L' intensità della corrente I erogata varrà perciò, poiché un'ora equivale a 3600 secondi,

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{5900}{3600} = 1{,}64 \text{ ampere}\,.$$

Esercizio 1.852

Si trovino le caratteristiche elettriche di una batteria di pile a secco, la quale eroga una corrente media del valore $I = 10$ mA per duecento ore ad un carico che assorbe la potenza $P = 1\ W$.

Si sa inoltre che a carico ogni elemento dà mediamente una tensione del valore $V' = 1{,}47$ volt; mentre la sua *f.e.m.* è di $V_0' = 1{,}50$ volt.

Soluzione

La tensione ai morsetti della batteria di pile, a carico, vale:

$$V = \frac{P}{I} = \frac{1}{10^{-2}} = 100 \text{ volt}\,.$$

Gli elementi che costituiscono la batteria di pile sono perciò in numero di:

$$\frac{100}{1{,}47} = 68\,,$$

e saranno posti tutti in serie. La capacità di ciascun elemento è di 2 ampere-ora, poiché ogni elemento eroga una corrente di 10 mA per 200 ore. Tale capacità si identifica perciò con quella dell' intera batteria.

La resistenza interna R_0' di ciascun elemento ammonta d'altronde a:

$$R'_0 = \frac{V'_0 - V'}{I} = \frac{1,50 - 1,47}{10^{-2}} = 3 \text{ ohm},$$

e quindi la resistenza interna R_0 della batteria varrà:

$$R_0 = 3 \cdot 68 = 204 \text{ ohm},$$

che rappresenta il 2,04 % del valore della resistenza di carico (infatti $R_c = 100/10^{-2} = 10000$ ohm).

1.9 26 esercizi completamente svolti sulla corrente continua

Esercizio 1.91

Quattro palline cariche, portanti ciascuna una quantità di elettricità pari a 0,5 microcoulomb, sono solidali con un supporto circolare di materiale isolante, avente un raggio di 30 centimetri (fig. 1.91-1).

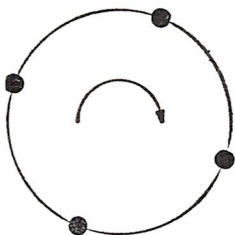



Fig. 1.91-1

Quanti giri al secondo dovrà compiere il supporto affinché equivalga ad un circuito percorso da una corrente d'intensità eguale a 0,1 mA?

Soluzione

Detto n il numero di giri al secondo, in una sezione S, posta sul percorso delle palline, transiterà, nell'intervallo di tempo pari ad 1 secondo, una quantità di elettricità del valore $4n$ volte quello di una

pallina, cioè $4n \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ C. Questa è d'altronde la corrente elettrica che si viene in tal modo a generare, poiché è la quantità di elettricità che fluisce con continuità in un secondo attraverso la sezione S. Pertanto si avrà che $2 \cdot 10^{-6} \cdot n = 0{,}1$ mA, da cui quindi:

$$n = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ giri/sec} .$$

Il risultato come si vede è indipendente dal valore del raggio del supporto: ciò perché non è stata chiesta la velocità, bensì la velocità angolare con la quale si devono muovere le quattro palline.

Esercizio 1.92

Sapendo che il numero di atomi contenuti in un mm^3 di rame ammonta a $8{,}4.10^{19}$, si trovi la velocità con la quale gli elettroni di conduzione (uno per ogni atomo) si spostano entro la massa del rame stesso per dare luogo ad una corrente elettrica la cui densità è di 4 A/mm^2.

Soluzione

Si consideri nella massa del rame un cubetto avente un millimetro di lato (vedi fig. 1.92-1) e tale che una faccia, ad esempio quella indicata

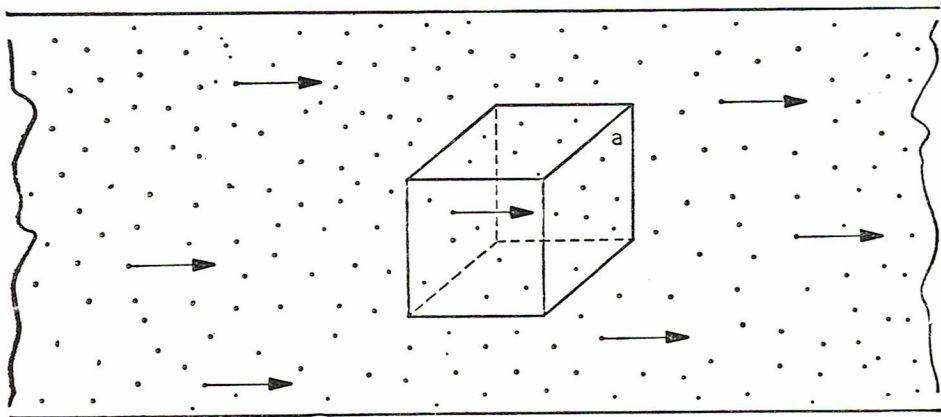



Fig. 1.92-1

con a, sia ortogonale al movimento degli elettroni. Attraverso la superficie di questa faccia dovrà passare allora una corrente la cui intensità è di 4 ampere.

D'altronde, considerando ad esempio gli elettroni di conduzione (liberi) presenti nel cubetto sopra menzionato, questi impiegheranno un certo tempo t per fluire tutti attraverso la superficie a; nello stesso

tempo dovranno però dare luogo con il loro movimento ad una corrente di 4 ampere. Si potrà perciò scrivere, ricordando la definizione di corrente $\left(I = \frac{Q}{t}\right)$, che:

$$\frac{8{,}4 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{t} = 4 .$$

Ma il tempo t potrà essere espresso in funzione della velocità u posseduta dagli elettroni e dallo spazio da essi percorso nel tempo t stesso, spazio il cui valore corrisponde a quello di un lato del cubetto [1] ($d = 1$ mm $= 10^{-3}$ m), cioè:

$$t = \frac{d}{u} = \frac{10^{-3}}{u} .$$

Pertanto, sostituendo quest'ultima espressione nella prima e ricavandone la velocità, si otterrà finalmente:

$$u = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{8{,}4 \cdot 1{,}60} = 0{,}297 \cdot 10^{-3} \text{ m/sec} ;$$

vale anche a dire una velocità pari a 1,07 metri all'ora.

Esercizio 1.93

Un elettrone percorre una volta sola una traiettoria rettilinea lunga l alla velocità u. Si chiede a quale fenomeno esso darà luogo.

Soluzione

Il movimento di un elettrone isolato lungo una traiettoria porta a fenomeni del tutto eguali a quelli di una minuscola corrente i, la quale però esista solamente là dove l'elettrone si sta muovendo [2], vale a dire cioè che esista solo per un tratto piccolissimo Δl della traiettoria (vedi fig. 1.93-1). Ciò è ovvio se si pensa che lungo il tragitto, al di fuori del tratto Δl considerato, la corrente non può essere che nulla.

È interessante calcolare il valore della corrente i sopra accennata. Si farà ricorso alla formula $i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, dove ΔQ rappresenta la quantità

---

[1] Infatti t rappresenta il tempo che trascorre affinché l'elettrone più distante dalla faccia a arrivi anch'esso ad attraversarla.

[2] È cioè un impulso di corrente che si sposta con la velocità u lungo la traiettoria considerata.

di elettricità che dà luogo alla corrente, cioè nel nostro caso l'elettrone, quindi $\Delta Q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$, mentre Δt potrà essere espresso in funzione della velocità u, perché supposta nota, e dello spazio percorso in tale tempo, cioè Δl, quindi $\Delta t = \dfrac{\Delta l}{u}$, per cui in definitiva:

$$i = \frac{u \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{\Delta l}.$$

A questo punto non è possibile procedere oltre. Va ricordato però che la formula ora ricavata è assai importante per alcune applicazioni.

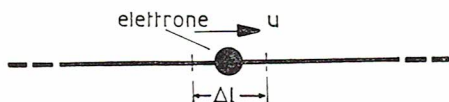



Fig. 1.93-1

Essa vale infatti, poiché Δl è piccolissimo, anche per traiettorie qualsiasi, cioè non rettilinee.

Esercizio 1.94

Si trovi la temperatura di un resistore costruito con filo di nichelcromo ($\alpha_0 = 0{,}10 \cdot 10^{-3}$), il quale presenta una resistenza del valore di 5,10 ohm, mentre alla temperatura di 20 °C aveva una resistenza del valore di 5,05 ohm.

Soluzione

La variazione relativa di resistenza che il resistore ha subìto nel passaggio dalla temperatura di 20 °C a quella incognita θ_x è di:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{5{,}10 - 5{,}05}{5{,}05} \backsimeq 0{,}01 \text{ (uno per cento).}$$

Quindi per mezzo della formula 1.46-7, ove $\theta_2 = \theta_x$ e $\theta_1 = 20\ ^0\mathrm{C}$, si ricaverà che:

$$\theta_x = \frac{1 + \alpha_0\theta_1}{\alpha_0}\ \frac{\Delta R}{R} + \theta_1 = \frac{1{,}002 \cdot 0{,}01}{0{,}10 \cdot 10^{-3}} + 20 = 120{,}2\ ^0\mathrm{C}.$$

Esercizio 1.95

Si trovi la resistenza esistente fra due armature cilindriche conduttrici, coassiali, lunghe 10 m, la cui intercapedine è stata riempita con

un liquido di resistività $\rho = 100\ \Omega\cdot$cm, sapendo che il raggio del cilindro interno r_1 vale 10 cm, mentre quello del cilindro esterno r_2 vale 20 cm.

Soluzione

Si potrà calcolare la resistenza offerta dal liquido esistente fra le due armature cilindriche coassiali come somma delle resistenze offerte radialmente (cioè lungo i raggi) dai vari tubi cilindrici di lunghezza l, aventi per sezione la corona circolare di spessore Δr e contenenti il liquido

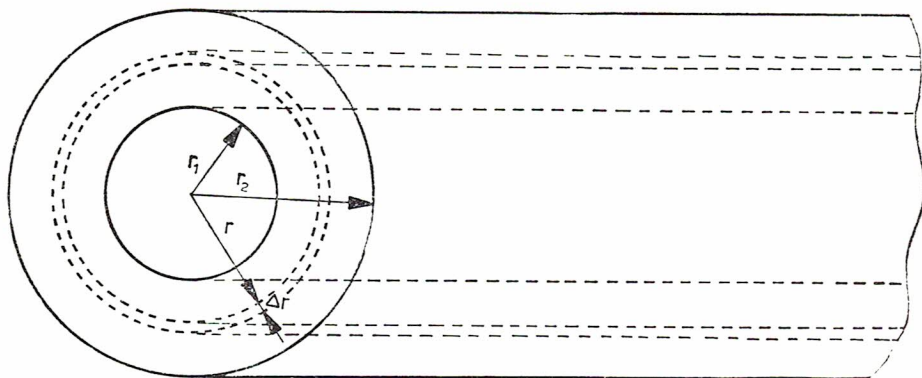



Fig. 1.95-1

dato (vedi fig. 1.95-1). Tali resistenze si calcoleranno con la formula:

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{2\pi r l},$$

essendo r il raggio interno della corona circolare.

Perché il calcolo risulti abbastanza approssimato occorrerà suddividere l'intera corona circolare $(r_2 - r_1)$ in un certo numero di corone, di spessore Δr non molto grande. Qui sarà sufficiente assumere $\Delta r = 1$ cm. Ciò equivale ad aver suddiviso in dieci elementi l'intercapedine contenente il liquido dato.

Il calcolo della resistenza dei vari elementi procederà, incominciando da quello più interno, come segue [1]:

$$1^0 \text{ elemento } \Delta R_1 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi r_1 l} = \frac{100}{6{,}28\cdot 10\cdot 1000} = 1{,}59\cdot 10^{-3}\ \Omega\,;$$

---

[1] Per comodità è stato scelto il centimetro come unità di lunghezza.

$$2^0 \text{ elemento } \Delta R_2 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + \Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 11 \cdot 1000} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$3^0 \text{ elemento } \Delta R_3 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 2\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 12 \cdot 1000} = 1{,}32 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$4^0 \text{ elemento } \Delta R_4 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 3\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 13 \cdot 1000} = 1{,}22 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$5^0 \text{ elemento } \Delta R_5 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 4\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 14 \cdot 1000} = 1{,}13 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$6^0 \text{ elemento } \Delta R_6 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 5\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 15 \cdot 1000} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$7^0 \text{ elemento } \Delta R_7 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 6\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 16 \cdot 1000} = 0{,}995 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ ;$$

$$8^0 \text{ elemento } \Delta R_8 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 7\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 17 \cdot 1000} = 0{,}936 \cdot 10^{-3}\ \Omega;$$

$$9^0 \text{ elemento } \Delta R_9 = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 8\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 18 \cdot 1000} = 0{,}884 \cdot 10^{-3}\ \Omega;$$

$$10^0 \text{ elemento } \Delta R_{10} = \frac{\rho \Delta r}{2\pi(r_1 + 9\Delta r)l} = \frac{100}{6{,}28 \cdot 19 \cdot 1000} = 0{,}838 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

La resistenza R offerta dal liquido fra le due armature cilindriche varrà perciò la somma delle resistenze dei dieci elementi, poiché essi sono in serie. Sarà perciò :

$$R = \Sigma \Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 + \Delta R_3 + \dots = (1{,}59 + 1{,}44 + 1{,}32 + \dots)\ 10^{-3} =$$

$$= 11{,}4 \cdot 10^{-3}\ \Omega\ (^2).$$

Esercizio 1.96

Si vuole costruire un resistore con un filo di ferro, nel quale dovrà cadere una tensione di 60 volt quando esso sarà percorso da una corrente

---

(2) Il valore trovato, come è già stato detto, risulta approssimato. Per la conoscenza precisa di tale valore si deve infatti fare ricorso al calcolo integrale, il quale porta, in questo caso, alla seguente formula : $R = \frac{\rho}{2\pi l}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi l}\, ln \frac{r_2}{r_1}$. Con questa espressione, e con i dati del problema, R vale $11{,}03 \cdot 10^{-3}\ \Omega$. Lo scostamento, come si vede, non è quindi molto grande ($< 4\ \%$).

avente un' intensità di 2 ampere. Si calcoli la sezione e la lunghezza del filo in modo tale che il peso ammonti a 20 kg (resistività del ferro $\rho = 15\ \mu\Omega\cdot\text{cm}$; peso specifico $\gamma = 7860\ \text{kg/m}^3$).

Si controlli alla fine il valore della densità di corrente.

Soluzione

La resistenza ohmica del conduttore ammonta a $R = 60/2 = 30$ ohm. D'altronde la sezione S e la lunghezza l di questo conduttore dovranno soddisfare contemporaneamente le seguenti due equazioni:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad , \quad \text{Peso} = \gamma\, l\, S \quad ,$$

dove tutto è noto all' infuori appunto di l ed S. Risolvendo ad esempio rispetto ad S si ha:

$$S = \sqrt{\frac{\rho\ \text{Peso}}{\gamma R}} = \sqrt{\frac{15\cdot 10^{-8}\cdot 20}{7860\cdot 30}} = 10^{-6}\sqrt{12{,}7} = 3{,}56\ \text{mm}^2\,,$$

e quindi:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{30\cdot 3{,}56\cdot 10^{-6}}{15\cdot 10^{-8}} = 712\ \text{m}\,.$$

La densità di corrente ammonta perciò a $\sigma = I/S = 2/3{,}56 =$ $= 0{,}56\ \text{A/mm}^2$.

Esercizio 1.97

Una linea elettrica aerea lunga 700 m è costituita da conduttori di rame i quali presentano una resistenza di 0,75 Ω/km alla temperatura di 20 °C. Si calcoli la caduta di tensione quando la linea è percorsa da una corrente di 50 ampere e si trova alla temperatura di — 10 °C ($\alpha_{Cu} = 0{,}0042$).

Soluzione

La resistenza alla temperatura di — 10 °C di uno dei due conduttori costituenti la linea si potrà calcolare con la formula 1.46-6 del testo, ove R_1 ammonta a $0{,}75\cdot 0{,}700 = 0{,}525\ \Omega$:

$$R_{(-10\,^0\text{C})} = 0{,}525\,\frac{1 - 0{,}0042\cdot 10}{1 + 0{,}0042\cdot 20} = 0{,}525\,\frac{0{,}958}{1{,}084} = 0{,}464\ \text{ohm}\,.$$

La caduta di tensione lungo la linea, tenendo conto che questa è costituita da due conduttori (uno per l'andata, l'altro per il ritorno della corrente), varrà perciò :

$$\Delta V = 2\, RI = 2 \cdot 0{,}464 \cdot 50 = 46{,}4 \text{ volt}\,.$$

Esercizio 1.98

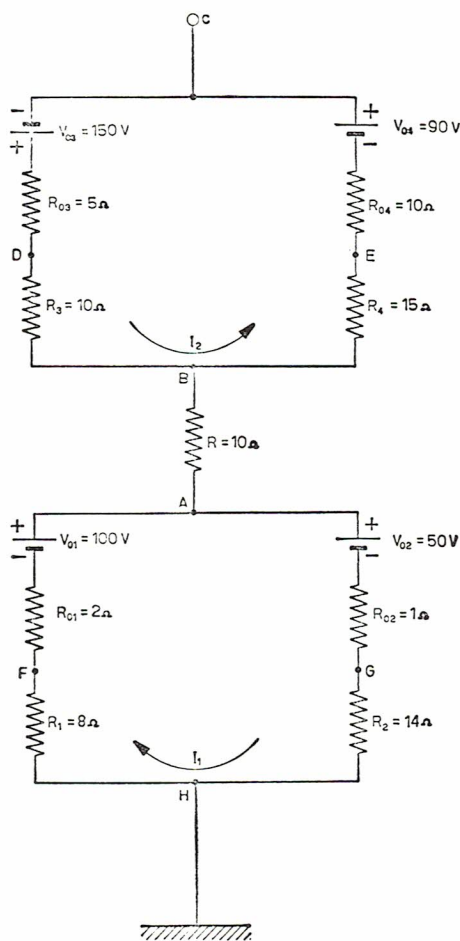



Fig. 1.98-1

Con riferimento alla rete elettrica riportata in fig. **1.98-1**, si dica a quanto ammonta :

a) la *d.d.p.* fra i punti *A* e *H* ;
b) la *d.d.p.* fra i punti *E* e *H* ;
c) la *d.d.p.* fra i punti *D* e *H* ;
d) la *d.d.p.* fra i punti *C* e *B* ;
e) la *d.d.p.* fra i punti *C* e *H* .

Soluzione

La rete elettrica data è sede di corrente solamente nelle due maglie chiuse; nel conduttore di massa e nel tronco *AB* la corrente infatti è nulla.

La corrente nella maglia inferiore, assumendo come verso di percorrenza quello coincidente con il verso della *f.e.m.* maggiore, cioè quello della V_{01}, vale:

$$I_1 = \frac{V_{01} - V_{02}}{R_{01} + R_1 + R_{02} + R_2} = \frac{100 - 50}{2 + 8 + 1 + 14} = 2 \text{ ampere};$$

mentre la corrente nella maglia superiore, assumendo come verso di percorrenza quello coincidente con il verso delle due *f.e.m.* V_{03} e V_{04}, che sono concordi, varrà:

$$I_2 = \frac{V_{03} + V_{04}}{R_{03} + R_3 + R_{04} + R_4} = \frac{150 + 90}{5 + 10 + 10 + 15} = 6 \text{ ampere}.$$

Pertanto:

a) Calcolo di V_{AH}: applicando la formula 1.52-6 del testo al ramo *AGH* si ottiene:

$$V_{AH} = V_{02} + (R_{02} + R_2)I_1 = 50 + (1 + 14)\,2 = 80 \text{ volt}.$$

b) Calcolo di V_{EH}: questa differenza di potenziale si otterrà come somma delle seguenti *d.d.p.* parziali:

$$V_{EH} = V_{EB} + V_{BA} + V_{AH} = -R_4 I_2 + 0 + V_{AH} = -90 + 80 = $$
$$= -10 \text{ volt};$$

il punto *E* è negativo rispetto a massa (punto *H*).

c) Calcolo di V_{DH}: questa *d.d.p.* si otterrà come somma delle seguenti *d.d.p.* parziali:

$$V_{DH} = V_{DB} + V_{BA} + V_{AH} = R_3 I_2 + 0 + V_{AH} = 60 + 80 = 140 \text{ volt};$$

il punto *D* è positivo rispetto a massa.

d) Calcolo di V_{CB}: applicando la formula 1.52-6 del testo al ramo *CDB* si ottiene:

$$V_{CB} = -V_{03} + (R_{03} + R_3)I_2 = -150 + (5 + 10)\,6 = -60 \text{ volt}.$$

e) Calcolo di V_{CH}: questa *d.d.p.* si otterrà come somma delle seguenti *d.d.p.* parziali:

$$V_{CH} = V_{CB} + V_{BA} + V_{AH} = -60 + 0 + 80 = 20 \text{ volt};$$

il punto *C* è positivo rispetto a massa.

Esercizio 1.99

Trovare valore e verso della corrente che percorre la resistenza R_2 facente parte della rete elettrica riportata in fig. 1.99-1.

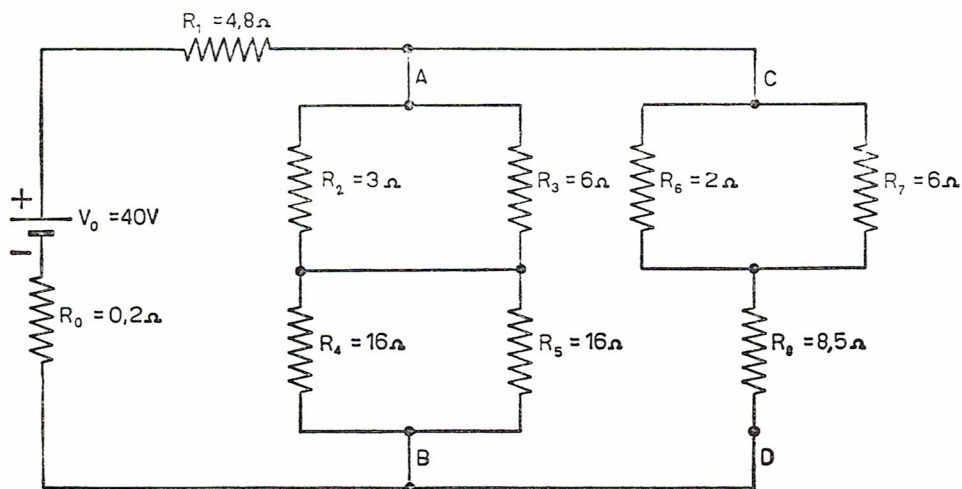



Fig. 1.99-1

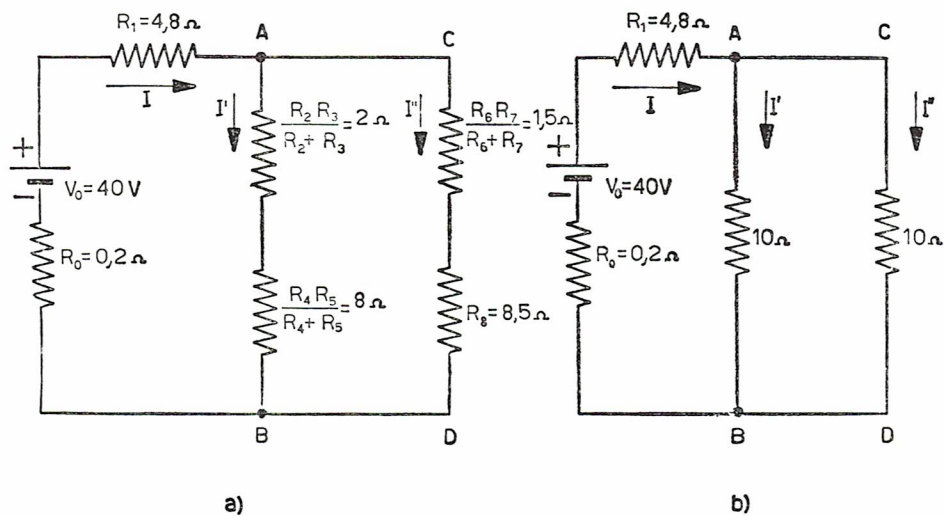



Fig. 1.99-2

Soluzione

Per poter trovare il valore della corrente che circola nella resistenza R_2 è necessario calcolare, come prima cosa, il valore della corrente erogata dal generatore all' intero circuito. A tale scopo la rete di fig. 1.99-1

è stata ridotta in maniera più semplice, come appare in fig. 1.99-2*a* e *b*, ove sono stati riportati i valori dei vari rami equivalenti.

La corrente I erogata dal generatore varrà allora, con riferimento al circuito di fig. 1.99-2*b* :

$$I = \frac{40}{0,2 + 4,8 + 5} = 4 \text{ ampere} .$$

D'altronde la corrente I' che circola nel tronco AB ammonta a 2 ampere, cioè la metà della corrente I, poiché le resistenze equivalenti dei due tronchi AB e CD risultano eguali.

In definitiva dunque la corrente in R_2 avrà il seguente valore:

$$I_{R_2} = I' \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \frac{6}{3 + 6} = 1,333 \text{ ampere} ,$$

con il verso che va da A a B.

Esercizio 1.910

In una sezione di un cavo bifilare lungo 10 metri è avvenuto un guasto (difetto di isolamento) per cui i due conduttori costituenti il cavo stesso non sono più isolati fra di loro.

Si sa che ogni conduttore del cavo ha una resistenza di 0,02 Ω/m e che misurando la resistenza all'entrata del cavo con l' uscita aperta si trova il valore di 0,96 ohm, mentre misurando la resistenza all' uscita del cavo con l'entrata ancora aperta si trova il valore di 1,04 ohm. Calcolare la distanza della sezione di guasto dall'entrata.

Soluzione

Indicata con R_x la resistenza di quella parte di conduttore compresa fra la sezione di entrata e quella di guasto, e quindi con $0,2 - R_x$ la resistenza della rimanente parte di conduttore (0,2 ohm è la resistenza di ciascun conduttore, lungo 10 metri), il cavo potrà essere schematizzato come in fig. 1.910-1. Nella sezione A-B è presente il guasto che ha determinato la perdita d' isolamento fra i due conduttori. Se ne terrà conto introducendo fra i punti A e B stessi una resistenza equivalente del guasto, indicata nello schema con R_g.

In base ai dati forniti dal problema si potranno scrivere allora per il circuito di fig. 1.910-1 le seguenti due equazioni:

$$2R_x + R_g = 0,96$$
$$2(0,2 - R_x) + R_g = 1,04 ,$$

cioè sviluppando ed ordinando, anche:

$$2R_x + R_g = 0{,}96$$
$$-2R_x + R_g = 0{,}64\ ,$$

da cui si otterrà facilmente che:

$$R_x = 0{,}08 \text{ ohm}\ ,\ R_g = 0{,}80 \text{ ohm}\ .$$

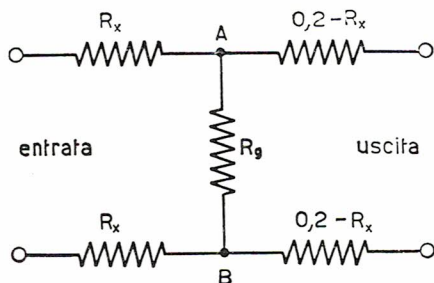



Fig. 1.910-1

La distanza d del guasto dalla sezione di entrata ammonta perciò a:

$$d = \frac{R_x}{\text{resistenza unitaria conduttore}} = \frac{0{,}08}{0{,}02} = 4 \text{ metri}\ .$$

Esercizio 1.911

Si trovi il valore da assegnare alla resistenza R_x, facente parte del circuito elettrico di fig. 1.911-1, affinché nel ramo MN non passi corrente quando il tasto T verrà abbassato.

Soluzione

Nel ramo MN non passerà corrente a tasto chiuso quando la *d.d.p.* fra i punti M e D avrà lo stesso valore e la stessa polarità della *d.d.p.* esistente fra i punti N ed E. Quest' ultima, a tasto aperto, poiché la corrente nella maglia costituita dal generatore V_{04} e dalle resistenze R_{04}, R_5 è di 2 ampere, vale:

$$V_{NE} = V_{04} - R_{04}I = 44 - 2 \cdot 2 = 40 \text{ volt}\ .$$

La tensione V_{MD}, che è funzione del valore assunto dalla resistenza R_x, sarà facilmente esprimibile solo dopo aver trovato l'espressione della corrente I_{AD}, cioè della corrente che circola nel circuito AD, a tasto aperto. D'altronde la resistenza equivalente di detto circuito AD ammonta a:

$$R_{AD} = R_1 + \frac{R_2(R_x + R_3)}{R_2 + R_x + R_3} + R_4 = \frac{30R_x + 800}{R_x + 30}.$$

per cui:

$$I_{AD} = \frac{V_1}{R_{AD}} = \frac{100(R_x + 30)}{30R_x + 800}.$$

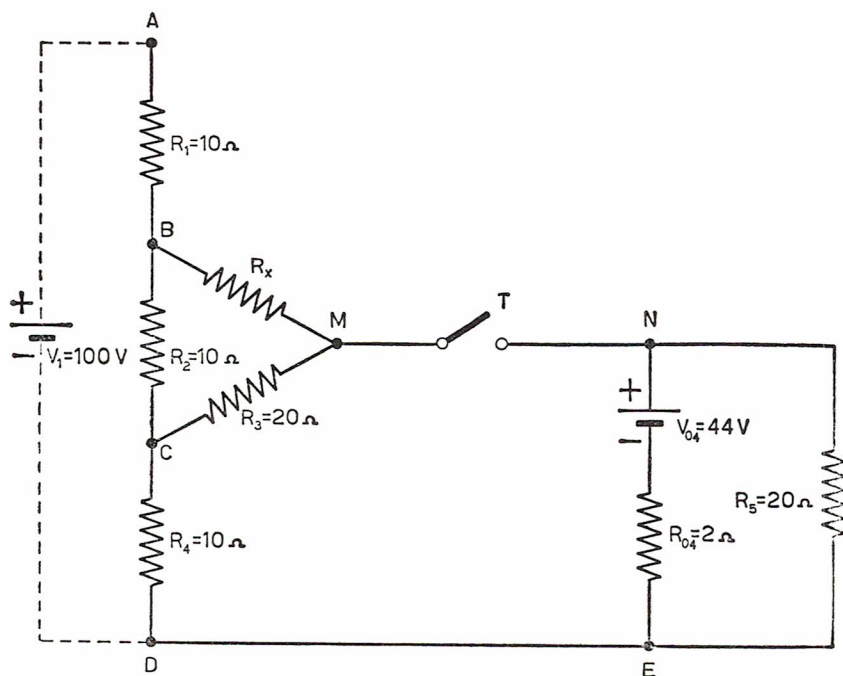



Fig. 1.911-1

La corrente che circola nel ramo MC varrà allora:

$$I_{MC} = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_x} I_{AD} = \frac{10}{30 + R_x} I_{AD}.$$

La *d.d.p.* fra i punti M e D si calcolerà quindi come somma delle *d.d.p.* V_{MC} e V_{CD}, cioè:

$$V_{MD} = V_{MC} + V_{CD} = R_3 I_{MC} + R_4 I_{AD} = \left(\frac{20 \cdot 10}{30 + R_x} + 10\right) I_{AD} =$$

$$= \left(\frac{200}{30 + R_x} + 10\right) \frac{100(R_x + 30)}{30\,R_x + 800} = \frac{50000 + 1000R_x}{30R_x + 800}.$$

Si noti che effettivamente il punto M ha la stessa polarità (positiva) del punto N rispetto al punto comune D.

Come già detto, a tasto chiuso, nel ramo MN non passerà corrente se $V_{MD} = V_{NE}$, quindi se verrà soddisfatta la seguente condizione:

$$\frac{50000 + 1000\, R_x}{30R_x + 800} = 40 ,$$

la quale, risolta, dà per R_x il valore di 90 ohm.

Esercizio 1.912

Il circuito elettrico riportato in fig. 1.912-1 fa parte di una rete elettrica più complessa. Gli elementi che compongono i tre rami di questa

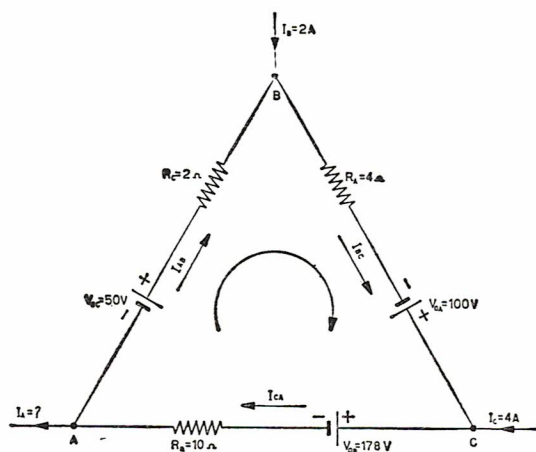



Fig. 1.912-1

maglia sono noti, così pure due delle tre correnti che alimentano il circuito. In tali condizioni si trovino i valori delle correnti nei tre rami e quello della corrente uscente dal nodo A.

Soluzione

Dopo aver assegnato il verso destrogiro alle tre correnti incognite I_{AB}, I_{BC}, I_{CA} e il verso uscente dal nodo A alla corrente I_A, si scrivano le seguenti equazioni dedotte dai principi di Kirchhoff:

1.912-1 $\qquad I_{CA} - I_{AB} - I_A = 0 \qquad$ nodo A ,

1.912-2 $\qquad I_B + I_{AB} - I_{BC} = 0 \qquad$ nodo B ,

1.912-3 $\qquad I_C + I_{BC} - I_{CA} = 0 \qquad$ nodo C ,

1.912-4 $\qquad V_{OA} - V_{OB} + V_{OC} = R_A I_{BC} + R_B I_{CA} + R_C I_{AB} \qquad$ maglia $ABCA$.

La soluzione di questo sistema è assai facile, poiché è possibile far comparire nell'equazione 1.912-4 una sola incognita, ad esempio la corrente I_{BC}. Infatti dall'equazione 1.912-3 si ricava $I_{CA} = I_C + I_{BC}$ e dall'equazione 1.912-2 $I_{AB} = I_{BC} - I_B$, per cui in definitiva l'equazione 1.912-4 diventa:

$$V_{OA} - V_{OB} + V_{OC} = R_A I_{BC} + R_B(I_C + I_{BC}) + R_C(I_{BC} - I_B),$$

cioè sviluppando e ordinando:

$$V_{OA} - V_{OB} + V_{OC} = (R_A + R_B + R_C)\, I_{BC} + R_B I_C - R_C I_B .$$

Passando ai numeri si ottiene la seguente equazione:

$$-28 = 16 I_{BC} + 40 - 4 ,$$

dalla quale si ricava facilmente $I_{BC} = -4$ ampere. La corrente nel ramo BC vale dunque 4 ampere e ha il verso opposto a quello segnato in fig. 1.912-1, verso che era stato posto all'inizio in modo del tutto arbitrario.

Dall'equazione 1.912-3 è ora possibile ricavare il valore della corrente I_{CA}, infatti:

$$I_{CA} = I_C + I_{BC} = 4 - 4 = 0 .$$

La corrente nel ramo CA è dunque nulla.

Dall'equazione 1.912-2 si ricaverà finalmente il valore della corrente I_{AB}:

$$I_{AB} = I_{BC} - I_B = -4 - 2 = -6 \text{ ampere} .$$

La corrente nel ramo AB vale 6 ampere e ha verso opposto a quello segnato in fig. 1.912-1, cioè a quello che era stato scelto arbitrariamente all' inizio.

Dall'equazione 1.912-1 si è ora in grado di ricavare il valore della corrente I_A, precisamente:

$$I_A = I_{CA} - I_{AB} = 6 \text{ ampere}$$

Si noti che quest'ultimo risultato era prevedibile senza dover ricorrere alla soluzione del sistema di equazioni scritte in principio dell'esercizio, poiché, per la particolare configurazione del circuito in oggetto, è sempre verificata la condizione:

$$I_A = I_B + I_C .$$

Esercizio 1.913

Il bipolo attivo raffigurato in fig. 1.913-1 è percorso da una corrente continua del valore di 10 ampere. Per detto tronco di circuito: 1) si scriva la legge generale di Ohm; 2) si faccia un esame delle potenze elettriche in gioco.

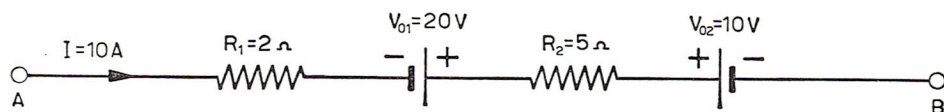



Fig. 1.913-1

Soluzione

1) La legge di Ohm generalizzata stabilisce che la tensione V_{AB} presente fra i punti A e B del bipolo dato ha l'espressione:

$$V_{AB} = (R_1 + R_2)\, I - V_{01} + V_{02}\,,$$

cioè con i dati del problema:

$$V_{AB} = 7 \cdot 10 - 20 + 10 = 60 \text{ volt}\,.$$

2) L'esame delle potenze elettriche consisterà nel trovare l'ammontare della potenza elettrica di ciascun componente il tronco dato, precisando nel contempo se si tratterà di potenza fornita (generata) o assorbita (dissipata).

a) Potenza nelle resistenze R_1 ed R_2:

$$P_R = (R_1 + R_2)\, I^2 = 7 \cdot 10^2 = 700 \text{ watt};$$

tale potenza, come è noto, è dissipata.

b) Potenza del generatore V_{01}:

$$P_1 = V_{01}\, I = 20 \cdot 10 = 200 \text{ watt};$$

tale potenza è generata poiché la corrente esce dal morsetto positivo del generatore.

c) Potenza del generatore V_{02}:

$$P_2 = V_{02}\, I = 10 \cdot 10 = 100 \text{ watt};$$

questa potenza è assorbita, poiché la corrente entra nel morsetto positivo del generatore.

d) Potenza totale del bipolo: la potenza assorbita globalmente dal bipolo potrà essere calcolata in due modi e cioè come potenza di un ele-

mento bipolare che ha ai suoi capi la tensione V_{AB} ed è percorso dalla corrente I, quindi:

$$P_{AB} = V_{AB} I = 60 \cdot 10 = 600 \text{ watt},$$

potenza questa che è assorbita [1]; oppure come somma algebrica delle potenze in gioco nel bipolo, per cui si potrà scrivere, assegnando il segno più alle potenze assorbite (dissipate) e quindi il segno meno a quelle fornite (generate):

$$P_{AB} = P_R - P_1 + P_2 = 700 - 200 + 100 = 600 \text{ watt}.$$

Concludendo il bipolo assorbe 600 watt dal circuito che lo alimenta. Il bipolo genera d'altronde 200 watt (P_1) che vengono però assorbiti dal bipolo stesso. Quest' ultimo infatti ha elementi *passivi* per 800 watt.

Esercizio 1.914

Si trovi l'ammontare della potenza elettrica dei tre generatori facenti parte della rete dell'esercizio 1.912, precisando inoltre se si tratta di potenza fornita o assorbita.

Soluzione

a) Generatore V_{OA}:

$$P_A = V_{OA} I_{BC} = 100 \cdot 4 = 400 \text{ watt};$$

si tratta di potenza assorbita.

b) Generatore V_{OB}:

$$P_B = 0.$$

c) Generatore V_{OC}:

$$P_C = V_{OC} I_{AB} = 50 \cdot 6 = 300 \text{ watt};$$

ed è ancora potenza assorbita.

Si noti perciò che il circuito riportato in fig. 1.912-1 si comporta in maniera completamente passiva per la rete elettrica di cui esso fa parte.

Esercizio 1.915

Un generatore, avente *f.e.m.* $V_0 = 100$ volt e resistenza interna $R_0 = 1$ ohm, alimenta un carico $R_c = 10$ ohm tramite una linea lunga

---

[1] Poiché la corrente I entra nel morsetto A che si è trovato essere positivo rispetto a B (infatti la *d.d.p.* V_{AB} è risultata positiva).

7 metri costruita con conduttori in ferro della sezione di 1 mm² e resistività $\rho = 14,3 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot$m.

In queste condizioni si trovi:

a) l' intensità della corrente che circola nella linea;

b) l'energia, in joule e in kWh, dissipata dal carico nel tempo di 15 minuti primi;

c) la potenza dissipata dalla linea.

Soluzione

Generatore, linea e carico possono essere schematizzati come nel circuito di fig. 1.915-1, del quale tutto è noto all' infuori della resistenza R_l

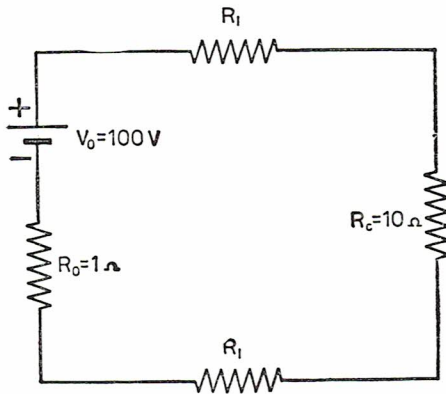



Fig. 1.915-1

di ciascun conduttore della linea. Questa resistenza è d'altronde facilmente calcolabile con la formula:

$$R_l = \rho \frac{l}{S} = 14,3 \cdot 10^{-8} \frac{7}{10^{-6}} \cong 1 \text{ ohm}.$$

Pertanto:

a) l' intensità della corrente circolante nella linea varrà:

$$I = \frac{V_0}{R_0 + 2R_l + R_c} = \frac{100}{1 + 2 + 10} \cong 7,7 \text{ ampere};$$

b) l'energia dissipata nel carico R_c sarà data da:

$$W_{R_c} = R_c I^2 t = 10 \cdot 7,7^2 \cdot 15 \cdot 60 = 533 \cdot 10^3 \text{ joule},$$

che corrisponde a $533 \cdot 10^3 / 3,6 \cdot 10^6 = 0,148$ kWh;

c) la potenza dissipata nella linea ammonterà invece a:

$$P_l = 2R_l I^2 = 2 \cdot 1 \cdot 7,7^2 = 118,5 \text{ watt}.$$

Esercizio 1.916

Si trovi quale condizione devono soddisfare i valori delle resistenze R_1, R_2 ed R affinché, alla chiusura del tasto T (vedi fig. 1.916-1), non passi corrente attraverso la resistenza R.

Soluzione

Alla chiusura del tasto T non passerà corrente attraverso la resistenza R se, a tasto aperto, si verificherà la condizione per cui $V_{MN} = 0$. Ciò avverrà d'altronde indipendentemente dal valore di R, il quale quindi potrà essere qualsiasi.

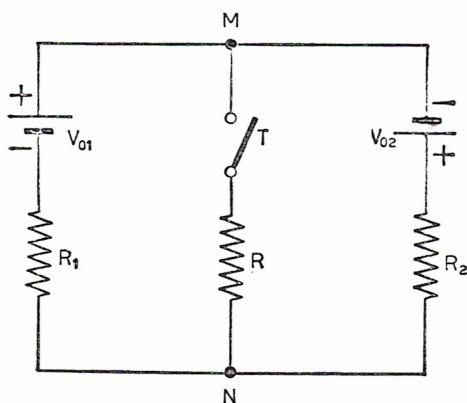



Fig. 1.916-1

S' incominci dunque a calcolare l'espressione della *d.d.p.* V_{MN} a tasto aperto (vedi fig. 1.916-2):

$$V_{MN} = V_{01} - R_1 \frac{V_{01} + V_{02}}{R_1 + R_2}.$$

La condizione $V_{MN} = 0$ porterà a scrivere subito che:

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{V_{01} + V_{02}}{V_{01}}.$$

e quindi anche che:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{V_{02}}{V_{01}}.$$

Questa è la sola condizione che i valori delle due resistenze R_1 ed R_2 dovranno verificare per soddisfare quanto chiesto dal problema.

Il problema può essere risolto anche in altro modo, ad esempio cercando l'espressione generale della corrente I_R attraverso la resistenza R a tasto chiuso, e quindi trovando per quali valori di R_1 ed R_2 questa corrente diventa nulla.

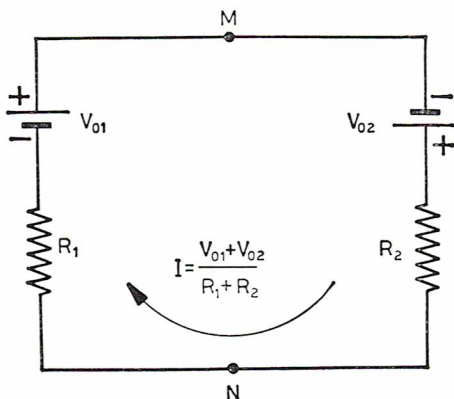



Fig. 1.916-2

Calcolata così la corrente I_R mediante i principi di Kirchhoff (o altri principi):

$$I_R = \frac{V_{01}R_2 - V_{02}R_1}{R_1R + R_2R + R_1R_2},$$

la condizione $I_R = 0$ porta subito a vedere che dovrà essere $V_{01}R_2 = V_{02}R_1$, cioè anche $R_2/R_1 = V_{02}/V_{01}$, come già trovato sopra.

Esercizio 1.917

All'apertura del tasto T (vedi fig. 1.917-1) la tensione ai capi della resistenza R_u aumenta del 4 %. Di quanto si dovrà diminuire percentualmente la *f.e.m.* V_0 affinché la tensione ai capi di R_u ritorni allo stesso valore che aveva quando il tasto era chiuso?

Soluzione

Il nuovo valore V'_0 della *f.e.m.* dovrà essere $\frac{1}{1 + 0,04}$ volte quello precedente V_0 [cioè dovrà diminuire di circa il 4 % (1)].

Una semplice dimostrazione, anche se un po' lunga, può essere la

(1) Più precisamente del 3,9 %, poiché $1/1,04 = 0,961 = 1 - 0,039$.

seguente. Indicato con R_{eq} il parallelo di R_u con R_2 e con V'_u la tensione ai capi di R_u con tasto chiuso, si cerchi l'espressione della tensione V_u a tasto aperto:

$$V_u = \frac{V_0}{R_1 + R_u} R_u = 1{,}04\,V'_u = 1{,}04 \frac{V_0}{R_1 + R_{eq}} R_{eq} .$$

Da questa relazione si deduce subito che:

1.917-1
$$\frac{R_u}{R_1 + R_u} = 1{,}04 \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} .$$

D'altronde a tasto aperto, dopo aver portato la *f.e.m.* dal valore

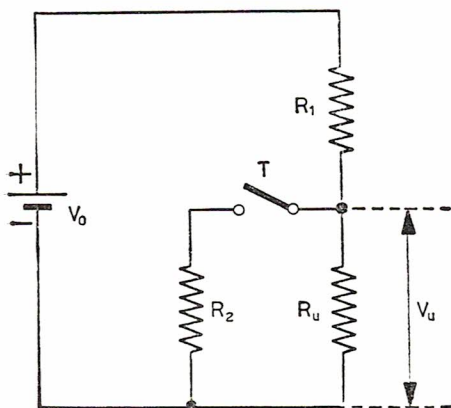



Fig. 1.917-1

V_0 a quello V'_0, la tensione ai capi di R_u dovrà risultare eguale a V'_u. Si potrà scrivere perciò la seguente equazione:

$$\frac{V'_0}{R_1 + R_u} R_u = V'_u = \frac{V_0}{R_1 + R_{eq}} R_{eq} ,$$

dalla quale, per quanto trovato in 1.917-1, scende subito che:

$$V'_0 = \frac{1}{1{,}04} V_0 .$$

Esercizio 1.918

Sei resistenze sono collegate fra di loro come in fig. 1.918-1 e devono assorbire complessivamente una corrente $I = 1$ ampere. Si determini il valore da assegnare alla resistenza R_5 affinché la resistenza R_6 assorba

una corrente di 100 mA e dissipi una potenza di 200 mW. Il valore della resistenza R_3 non è noto, però si sa che essa in queste condizioni è percorsa da una corrente del valore di 200 mA.

Soluzione

Si indichi con I_1 la corrente circolante nella resistenza R_1. Allora la corrente circolante nella resistenza R_2 varrà $I - I_1 = 1 - I_1$. Si osservi

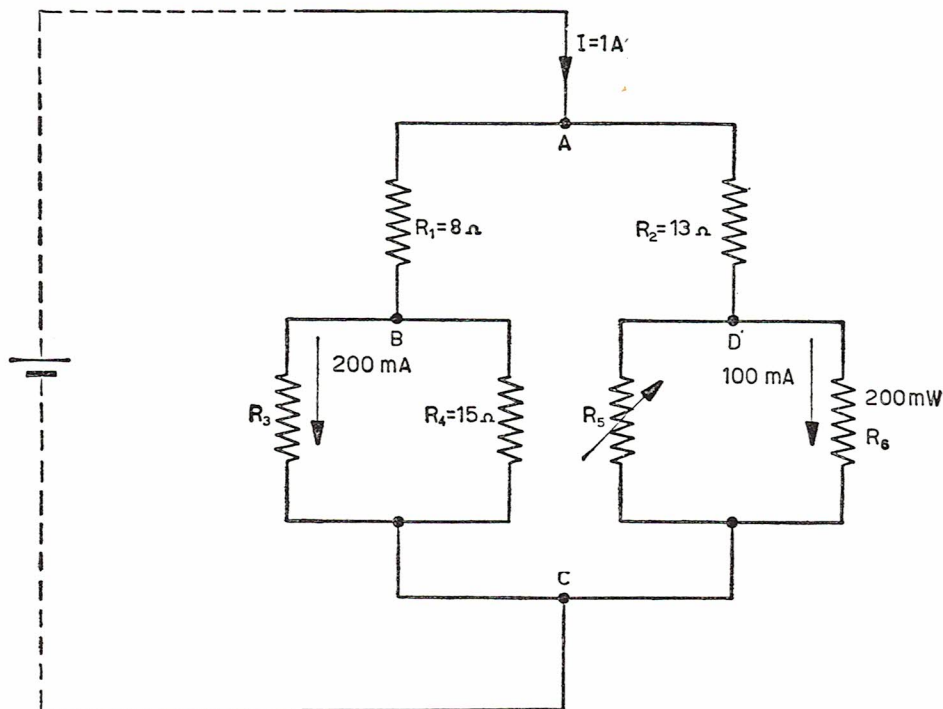



Fig. 1.918-1

d'altronde che i due rami *ABC* e *ADC* sono in parallelo, per cui essi saranno sottoposti alla stessa *d.d.p.*, il che porta a scrivere :

$$R_1 I_1 + R_4(I_1 - 0{,}2) = R_2(1 - I_1) + V_{R6} .$$

Ma la tensione V_{R6}, cioè la *d.d.p.* ai capi della resistenza R_6, è facilmente ricavabile se si considera che questa resistenza deve dissipare 0,2 watt con 0,1 ampere. Sarà così :

$$V_{R6} = \frac{P}{I_{R6}} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2 \text{ volt} .$$

L'equazione scritta precedentemente è dunque in realtà nella sola incognita I_1, perciò facilmente ricavabile. Infatti, con i dati del problema, si ha subito:

$$I_1 = \frac{R_2 + 0{,}2R_4 + V_{R6}}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{13 + 0{,}2 \cdot 15 + 2}{8 + 13 + 15} = 0{,}5 \text{ ampere} .$$

Nota la corrente I_1, sarà così calcolabile il valore della corrente circolante nella resistenza R_5. Infatti:

$$I_{R5} = I_{R2} - I_{R6} = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4 \text{ ampere} ,$$

e quindi, poiché ai capi di R_5 devono cadere 2 volt come già trovato, la resistenza R_5 avrà il valore:

$$R_5 = \frac{V_{R5}}{I_{R5}} = \frac{2}{0{,}4} = 5 \text{ ohm} .$$

Il problema può essere impostato anche in altro modo. Ad esempio, poiché il valore della resistenza R_6 è noto (infatti esso vale $R_6 = P/I_{R6}^2 = 0{,}2/0{,}01 = 20$ ohm), l'eguaglianza della *d.d.p.* dei due rami *ABC* e *ADC* porta a scrivere questa equazione:

$$R_1 I_1 + R_4(I_1 - 0{,}2) = R_2(1 - I_1) + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}(1 - I_1) ,$$

nelle due sole incognite I_1 ed R_5. A questa equazione si aggiungerà quella che esprime la *d.d.p.* ai capi della resistenza R_5, valore che è noto (2 volt):

$$R_5(1 - I_1 - 0{,}1) = 2 .$$

Dal sistema delle due equazioni ora scritte sarà quindi possibile ricavare il valore della resistenza R_5.

Esercizio 1.919

Un microampermetro, di resistenza interna $R_i = 1000$ ohm e portata 100 μA, deve essere trasformato in un voltmetro caratterizzato da 10 volt di portata e tale da assorbire in queste condizioni una corrente di 500 μA. Pertanto lo strumento verrà inserito in un circuito come quello riportato in fig. 1.919-1, per il quale si dovranno calcolare i valori delle resistenze R_s ed R_p.

Soluzione

La resistenza R_p da porre in parallelo allo strumento dovrà risultare di valore tale da essere attraversata da una corrente $I_p = 400\ \mu A$

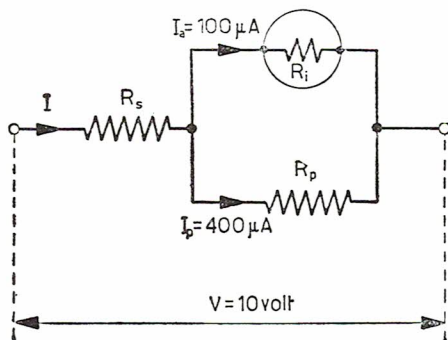



Fig. 1.919-1

($I_p = I - I_a$) quando nello strumento circolano 100 μA. D'altronde si potrà scrivere subito la seguente relazione:

$$R_p\, I_p = R_i\, I_a\,,$$

da cui si trova:

$$R_p = R_i \frac{I_a}{I_p} = 1000 \frac{100}{400} = 250 \text{ ohm}\,.$$

Lo strumento d'altra parte presenta una caduta di tensione del valore:

$$R_i\, I_a = 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0{,}10 \text{ volt},$$

per cui ai capi della resistenza addizionale R_s dovranno cadere i rimanenti $V - R_i\, I_a = 9{,}90$ volt. Pertanto la resistenza R_s varrà:

$$R_s = \frac{V - R_i\, I_a}{I} = \frac{9{,}90}{500 \cdot 10^{-6}} = 19800 \text{ ohm}\,.$$

Esercizio 1.920

Nel circuito riportato in fig. 1.920-1 si vuole misurare la tensione esistente fra i punti A e B. Si trovi il valore che deve presentare la resistenza interna R_v del voltmetro affinché la *d.d.p.* misurata differisca dell'1 % dal valore reale, cioè a strumento disinserito.

Soluzione

Indicata con V_{AB} la tensione esistente fra i punti A e B prima dell'inserzione e con V'_{AB} la tensione dopo l'inserzione del voltmetro, si potrà scrivere dunque che:

$$V'_{AB} = (1 - 0.01)\ V_{AB}\,,$$

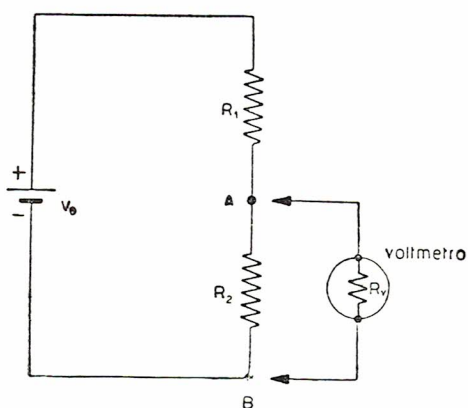



Fig. 1.920-1

cioè, con i dati del problema, e indicando con R il parallelo fra R_2 ed R_v:

$$\frac{V_0}{R_1 + R}\, R = 0{,}99\, \frac{V_0}{R_1 + R_2}\, R_2\,,$$

ossia anche:

$$(R_1 + R_2)\ R = 0{,}99\ (R_1 + R)\ R_2\,,$$

da cui:

$$R = \frac{0{,}99\ R_1\ R_2}{R_1 + 0{,}01\ R_2}\,.$$

Sviluppando e semplificando si ha quindi ricordando che $R = \dfrac{R_2\ R_v}{R_2 + R_v}$:

$$R_v = 99\, \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

La condizione è dunque questa: la resistenza interna del voltmetro dovrà essere 99 volte più grande della resistenza equivalente del parallelo formato dalle resistenze R_1 ed R_2. Naturalmente quando R_1 risulta molto grande rispetto ad R_2, allora basterà che sia ovviamente

$R_v \cong 99\, R_2$, cioè la resistenza del voltmetro dovrà essere 99 volte la resistenza che va direttamente in parallelo al voltmetro stesso.

Esercizio 1.921

Una stufa elettrica assorbe 3 kW a 220 volt. Di quanto deve essere diminuita percentualmente la tensione affinché la stufa diminuisca la potenza assorbita del 40 % ?

Soluzione

Si indichi con P_1 e V_1, rispettivamente con P_2 e V_2, la potenza e la tensione nella condizione data e nella nuova condizione. Ora la stufa nella nuova condizione deve assorbire una potenza del valore:

$$P_2 = P_1(1 - 0{,}40) = 0{,}60\, P_1 \,.$$

D'altronde, supponendo per semplicità che la resistenza della stufa elettrica rimanga costante al variare della tensione di alimentazione, si può scrivere subito che:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 ,$$

da cui si ricava:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \,;$$

e quindi nel nostro caso che:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{0{,}60} = 0{,}775 \,.$$

Si deduce dunque da quest' ultima relazione che la nuova tensione deve essere il 77,5 % di quella precedente V_1, cioè che questa tensione dovrà essere diminuita del 22,5 % (infatti $1 - 0{,}225 = 0{,}775$).

Esercizio 1.922

Si dica quali provvedimenti occorrerà prendere affinché due lampadine elettriche, costruite entrambe per la stessa tensione ($V_1 = V_2 = 100$ volt), ma per potenza differente ($P_1 = 40$ watt, $P_2 = 50$ watt), possano essere alimentate in serie alla tensione $V = 220$ volt.

Si calcoli inoltre il rendimento di tale inserzione.

Soluzione

Le due lampadine nel collegamento in serie devono dare naturalmente le stesse prestazioni che fornirebbero isolatamente. D'altronde le due lampadine hanno caratteristiche elettriche differenti, basti pensare che la prima lampadina assorbe una corrente del valore $I_1 = P_1/V_1 = 0{,}4$ ampere, mentre la seconda assorbe una corrente del valore $I_2 = P_2/V_2 = 0{,}5$ ampere.

Ora nel collegare in serie le due lampadine (così come due qualsiasi altri dispositivi) è necessario tener presenti due fattori e cioè:

1) che il valore della corrente nel circuito è imposto dalla lampadina che presenta l'amperaggio più elevato ($I_2 = 0{,}5$ A), per cui l'altra lampadina dovrà essere shuntata con un resistore R_p;

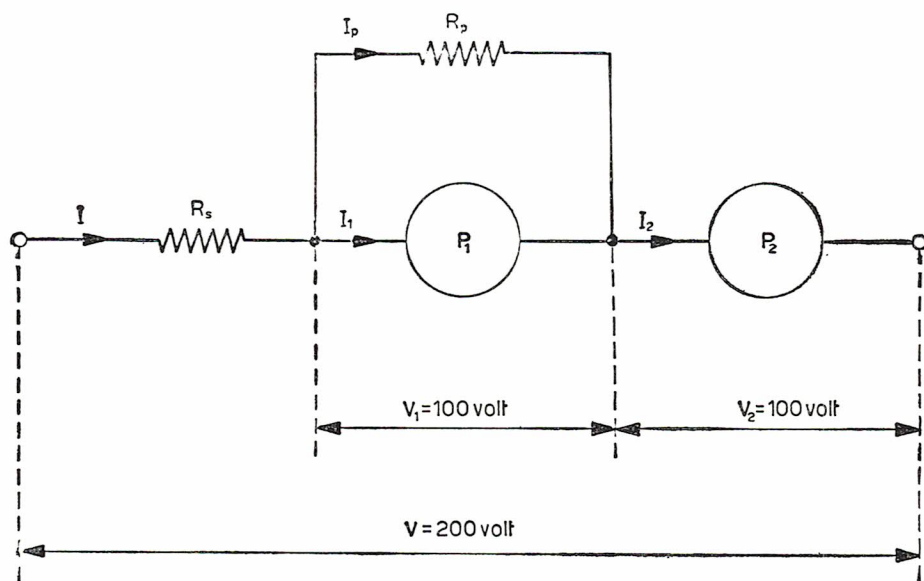



Fig. 1.922-1

2) che la differenza fra la somma delle tensioni delle due lampadine e la tensione di alimentazione dovrà cadere ai capi di un resistore addizionale R_s.

Il circuito elettrico in definitiva verrà realizzato come quello riportato in fig. 1.922-1, dove, essendo con i dati del problema $I = I_2 = 0{,}5\ A$, si avrà subito che:

$$R_s = \frac{V - (V_1 + V_2)}{I} = \frac{220 - 200}{0{,}5} = 40 \text{ ohm},$$

e, poiché $I_p = I - I_1 = 0{,}1$ A, si otterrà facilmente anche che:

$$R_p = \frac{V_1}{I_p} = \frac{100}{0{,}1} = 1000 \text{ ohm} .$$

Con tale inserzione la potenza dissipata nei due resistori R_s ed R_p ammonta a:

$$P_d = \frac{20^2}{40} + \frac{100^2}{1000} = 10 + 10 = 20 \text{ watt} .$$

D'altronde tale potenza deve ritenersi perduta, poiché non va a vantaggio delle due lampade: per questo motivo il circuito presenterà il seguente rendimento:

$$\eta = \frac{P_1 + P_2}{P_1 + P_2 + P_d} = \frac{40 + 50}{40 + 50 + 20} = 0{,}818 .$$

Esercizio 1.923

Si deve argentare mediante processo galvanico un oggetto avente una superficie $S = 40 \times 50$ centimetri. Quale sarà lo spessore δ dell'argento depositato da una corrente continua dell' intensità di 50 ampere che ha agito per due ore? (equiv. elettrochim. $Ag = 1{,}118 \cdot 10^{-3}$ g/C; peso specifico $Ag = 10500$ kg/m^3).

Soluzione

L'argento depositato è dovuto al passaggio della seguente quantità di elettricità Q:

$$Q = 50 \cdot 2 = 100 \text{ amperora} ;$$

cioè anche, in ampersecondo:

$$Q = 100 \cdot 3600 = 360 \cdot 10^3 \text{ coulomb} .$$

A tale quantità di elettricità corrisponderà il seguente peso d'argento, in grammi:

$$\text{Peso } Ag = 1{,}118 \cdot 10^{-3} \cdot 360 \cdot 10^3 = 402 \text{ grammi} .$$

Lo spessore δ varrà perciò, esprimendo tutte le grandezze secondo il sistema Giorgi:

$$\delta = \frac{\text{Peso } Ag}{S\gamma} = \frac{0,402}{0,2 \cdot 10500} = 0,192 \cdot 10^{-3} \text{ metri},$$

cioè $\delta = 0,19$ millimetri.

Esercizio 1.924

Due voltametri, di cui uno contiene una soluzione acquosa di HCl e l'altro di H_2SO_4, sono collegati in serie. Quanto idrogeno (peso atomico 1,008) si libererà al passaggio di una quantità di elettricità pari a 1000 coulomb ?

Soluzione

Per liberare in un voltametro un grammo-atomo d'idrogeno, cioè 1,008 grammi d'idrogeno, occorrono 96500 coulomb, come è stato dimostrato nel § 1.72 del testo, poiché l'idrogeno è monovalente. Pertanto con 1000 coulomb si potranno liberare:

$$\frac{1,008 \cdot 1000}{96500} = 0,0105 \text{ grammi idrogeno}.$$

D'altronde i voltametri sono due, per cui in totale l'idrogeno liberato ammonterà a $0,0105 \cdot 2 = 0,0210$ grammi. Il fatto che nel secondo voltametro l'idrogeno provenga da una soluzione ove ciascuna molecola dell'elettrolita dà luogo a due ioni, anziché ad uno solo come nel primo voltametro, non ha qui alcuna importanza.

Esercizio 1.925

Conoscendo l'equivalente elettrochimico dell'argento ($1,118 \cdot 10^{-3}$ g/C) nonché il peso atomico (107,9) e la valenza (uno), si trovi il valore dell'equivalente elettrochimico dell'oro, che ha peso atomico 197,2 ed è trivalente.

Soluzione

La formula 1.72-2 riportata nel testo indica chiaramente che il rapporto fra l'equivalente elettrochimico e l'equivalente chimico di uno stesso elemento è costante, e che la costante è eguale per tutti gli elementi. Per questa ragione si potrà scrivere subito che:

$$\left(\frac{\text{equiv. elettrochim.}}{\text{equiv. chimico}}\right)_{Au} = \left(\frac{\text{equiv. elettrochim.}}{\text{equiv. chimico}}\right)_{Ag}.$$

Del resto l'equivalente chimico è eguale al rapporto fra il peso atomico e la valenza, per cui dall'eguaglianza sopra scritta si ricava subito che:

$$\text{equiv. elettrochim. } Au = \frac{1{,}118 \cdot 10^{-3}}{107{,}9} \cdot \frac{197{,}2}{3} = 0{,}681 \cdot 10^{-3} \text{g/C} .$$

Esercizio 1.926

Sapendo che la tensione di polarizzazione V_p di un voltametro, in cui si compie l'elettrolisi dell'acqua con elettrodi inattaccabili di superficie utile $S = 40$ cm^2 e distanti $d = 4$ cm, è circa 1,5 volt e che la resistività della soluzione è $\rho = 2\ \Omega \cdot$cm, si trovi il valore della tensione da applicare al voltametro stesso affinché si possano separare 0,2 grammi d'idrogeno all'ora (equiv. elettrochimico $0{,}01045 \cdot 10^{-3}$ g/C).

Soluzione

Per separare 0,2 grammi d'idrogeno occorre una quantità di elettricità Q che potrà essere ricavata dalla seguente proporzione:

$$1 \text{ coulomb} : 0{,}01045 \cdot 10^{-3} \text{ grammi} = Q : 0{,}2 ,$$

dalla quale si ottiene subito che:

$$Q = \frac{0{,}2}{0{,}01045 \cdot 10^{-3}} = 19{,}15 \cdot 10^3 \text{ coulomb} .$$

L'intensità della corrente continua, che dovrà trasportare ogni ora la suddetta quantità di elettricità Q, si troverà immediatamente invece dalla seguente formula:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{19{,}15 \cdot 10^3}{3600} = 5{,}32 \text{ ampere} .$$

D'altronde la resistenza ohmica della cella si potrà calcolare, con una certa approssimazione, mediante la nota formula [1]:

$$R = \rho \frac{d}{S} = 2 \frac{4}{40} = 0{,}20 \text{ ohm} .$$

In definitiva dunque la tensione V da applicare al voltametro, affinché si possa compiere la voluta operazione di elettrolisi, ammonta a:

$$V = V_p + RI = 1{,}50 + 0{,}20 \cdot 5{,}32 = 2{,}56 \text{ volt} .$$

---

[1] La formula $R = \rho \dfrac{d}{S}$ non può che fornire nel nostro caso un valore approssimato della resistenza elettrica fra le piastre di superficie S a causa della presenza di altra soluzione attorno alle piastre stesse.

RETI ELETTRICHE LINEARI IN REGIME STAZIONARIO 2

2.1 Introduzione

In questo capitolo verranno descritti i vari modi con i quali è possibile risolvere una rete elettrica in regime stazionario, cioè in regime di corrente continua, nonché alcuni importanti principi che possono permettere in casi particolari soluzioni molto semplici.

Già si è detto al § 1.54 che cosa si debba intendere per una rete elettrica. Verrà precisato ora invece che cosa significhi *risolvere* una rete elettrica. Questa sarà completamente risolta solamente quando saranno note tutte le correnti circolanti in ciascun ramo della rete data, ovvero quando sarà definito il potenziale di ciascun punto della stessa rete rispetto ad un punto preso come riferimento e naturalmente quando tutti gli elementi che costituiscono la rete risulteranno completamente definiti.

Per arrivare a questo stato finale di cose si rende necessario *in pratica*, assegnata una certa rete elettrica, vedere quale metodo, o *principio*, convenga applicare al fine di risparmiare tempo, permettendo così contemporaneamente di aumentare notevolmente la probabilità di ottenere una soluzione priva di errori (1).

Non sempre però basterà l'applicazione di un solo *principio* per raggiungere celermente la soluzione cercata, poiché converrà applicare talvolta più principi. In sostanza, si renderà necessario manipolare la rete data in modo da arrivare con passaggi successivi a quella forma che consentirà il facile calcolo dei valori incogniti richiesti.

Quanto ora esposto trova importante applicazione soprattutto quando

---

(1) È a tutti noto infatti che più numerosi sono i passaggi e le operazioni da compiere in un certo problema più facile è cadere in qualche errore.

della rete data non interessa immediatamente la soluzione completa, cioè tutte le correnti dei vari rami o tutti i potenziali dei vari nodi ecc., ma solamente la corrente di un particolare ramo, oppure la *d.d.p.* fra due particolari punti, ecc. ....

Ai principi di Kirchhoff, che servono per risolvere interamente la rete elettrica, si aggiungono così altri principi il cui scopo è quello di fornire appunto una parziale soluzione della rete stessa. Sono questi ad esempio i principi di Thévenin, Norton, Millman, ecc. ...., principi che verranno descritti nei paragrafi seguenti dopo aver fatto alcune importanti precisazioni sugli elementi che entrano a far parte delle reti elettriche e sugli stessi principi di Kirchhoff.

2.2 Elementi lineari

Generalità

Le reti elettriche sono costituite da un certo numero di *elementi* collegati fra di loro. Si è già visto infatti che una rete elettrica a corrente continua comprende, si osservi ad esempio la fig. 1.54-1, generatori elettrici di tensione continua e resistori. Questi ultimi rappresentano sia gli utilizzatori sia i loro collegamenti.

È bene precisare però che lo studio dei circuiti elettrici, e quindi quello delle reti, può essere impostato in maniera assai semplice solo supponendo che gli elementi componenti la rete soddisfino alcune ipotesi, fra le quali la più importante è quella cosiddetta di *linearità*. Gli elementi che costituiscono la rete si diranno allora *lineari* e la rete stessa sarà *lineare*.

Va detto a questo proposito che in pratica molte reti elettriche si possono considerare lineari. A tale scopo verrà subito qui precisato che cosa si debba intendere per elemento lineare. Converrà distinguere però gli elementi lineari passivi (resistori, conduttori) da quelli attivi (generatori).

Elementi lineari passivi

Sono quelli che stabiliscono fra tensione e corrente una relazione di proporzionalità e in modo tale che il valore assoluto della caduta di

tensione dovuta alla corrente che attraversa l'elemento non dipende dalla polarità della tensione applicata (vedi caratteristica data in fig. 2.2-1*a*). Si dicono anche elementi *normali* (1).

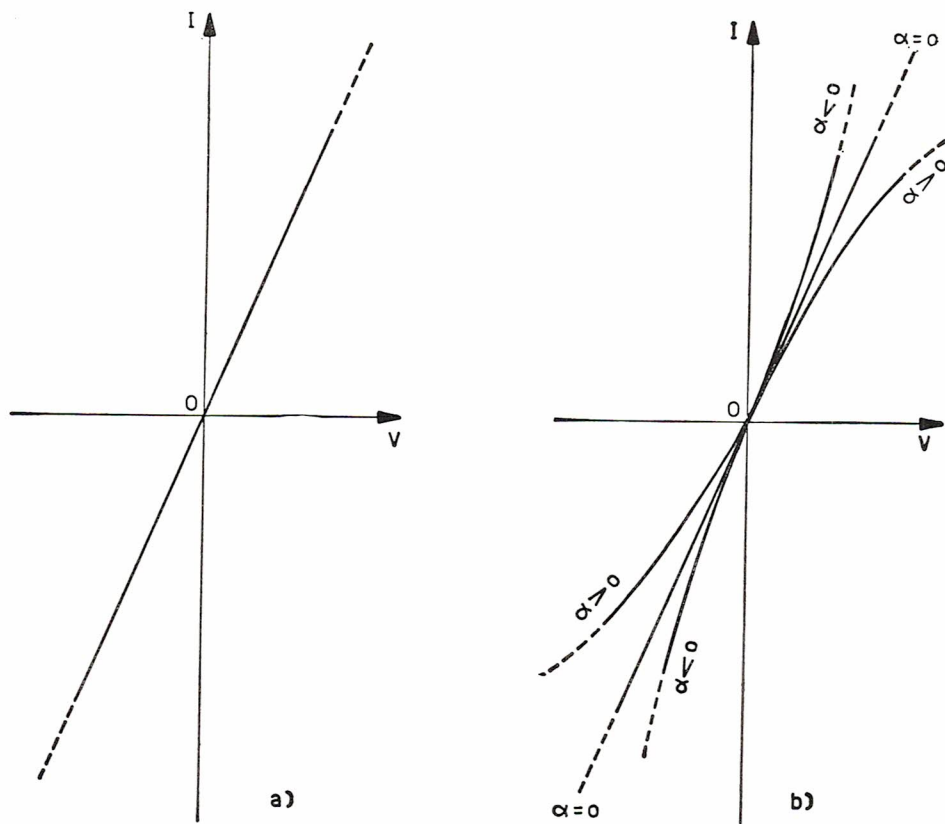



Fig. 2.2-1

I conduttori e i resistori studiati nel primo capitolo soddisfano in pratica a tale condizione (2).

Elementi lineari attivi

Sono quei generatori elettrici per i quali la relazione fra tensione ai morsetti e corrente erogata ubbidisce ad una legge lineare. Occorre pre-

---

(1) Sono detti *normali* appunto tutti gli elementi passivi che seguono la legge di Ohm, cioè quelli per i quali il valore della resistenza R è costante ossia indipendente dal valore e dal segno della tensione applicata.

(2) A stretto rigore la caratteristica di un resistore, il quale ovviamente al passaggio della corrente si riscalda in maniera sempre più considerevole all'aumentare della intensità della corrente, non può essere rappresentata rigorosamente con una retta, bensì con una curva tangente all'origine alla suddetta retta (vedi fig. 2.2-1*b*).

cisare però subito che oltre ai generatori elettrici di *tensione* si devono considerare anche i cosiddetti generatori di *corrente* (3).

Prima di procedere oltre sarà bene perciò incominciare a definire che cosa si intende per generatore ideale di tensione e di corrente.

a) *Generatore ideale di tensione*: è un generatore che mantiene ai suoi morsetti una *d.d.p.* costante V_0 al variare della corrente erogata (fig. 2.2-2*a*). Un generatore ideale di tensione è dunque un generatore

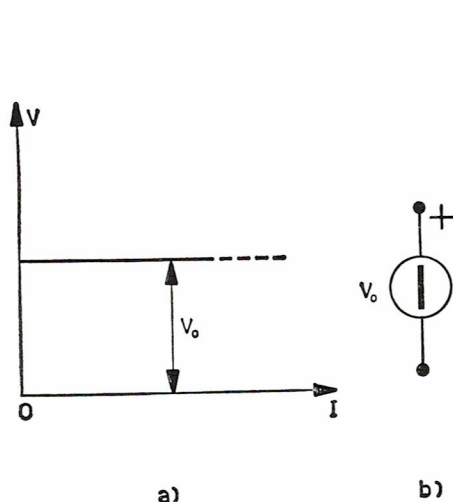



Fig. 2.2-2

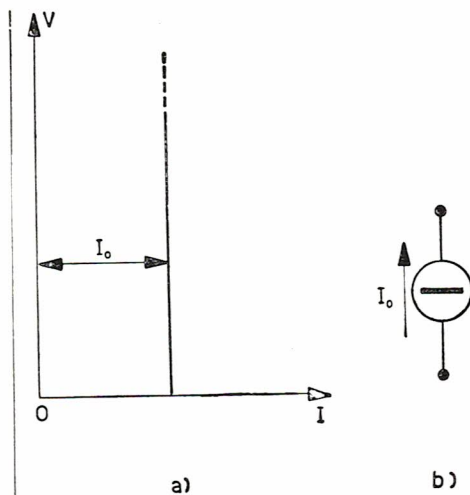



Fig. 2.2-3

elettrico avente resistenza interna nulla. In pratica non esistono generatori ideali di tensione. Nella teoria delle reti elettriche il generatore ideale di tensione viene indicato con il simbolo riportato in fig. 2.2-2*b*. Si noti il segno + posto ad uno dei morsetti. Come è noto la conoscenza della polarità dei morsetti è essenziale per un generatore.

b) *Generatore ideale di corrente*: è un generatore che eroga una corrente costante I_0 al variare del valore della *d.d.p.* ai suoi morsetti (fig. 2.2-3*a*). È questo cioè un generatore che mantiene nel circuito di cui fa parte una corrente d' intensità costante, nonostante che il circuito possa variare la sua resistenza totale. In pratica non esiste un generatore ideale di corrente (questo infatti corrisponderebbe ad un generatore di tensione avente resistenza interna di valore infinito). Il simbolo del generatore ideale di corrente è stato riportato in fig. 2.2-3*b*. Si noterà come

(3) Nel linguaggio usuale il termine generatore di tensione e generatore di corrente viene usato indifferentemente per indicare un generatore di energia elettrica; nella teoria dei circuiti, nell'elettronica, nella radiotecnica invece il significato che si dà ai due termini è un po' differente come si vedrà tra breve pur indicando entrambe le parole ovviamente ancora un generatore di energia elettrica.

vicino al simbolo che indica la corrente (I_0) sia stata posta una freccia. Questa serve ad indicare il verso della corrente entro il generatore: la indicazione di tale verso è ovviamente indispensabile.

Così è necessario precisare subito che cosa si debba intendere per generatore reale di tensione e di corrente.

c) Generatore reale di tensione: è un generatore che non riesce a mantenere costante la *d.d.p.* ai suoi morsetti al variare della corrente erogata I. Indice di questo fatto è la ben nota caduta di tensione interna, la cui causa risulta dovuta alla resistenza interna R_0 del generatore. Un generatore reale di tensione viene indicato di solito secondo il graficismo riportato in fig. 2.2-4, poiché esso può sempre essere pensato costituito da

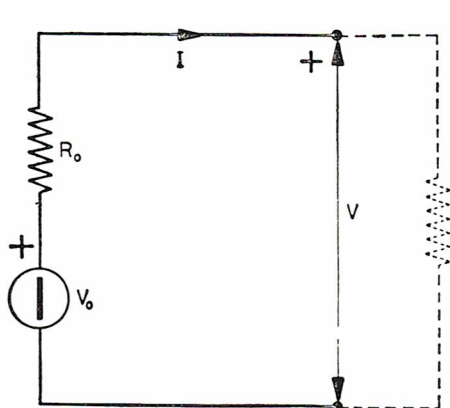



Fig. 2.2-4

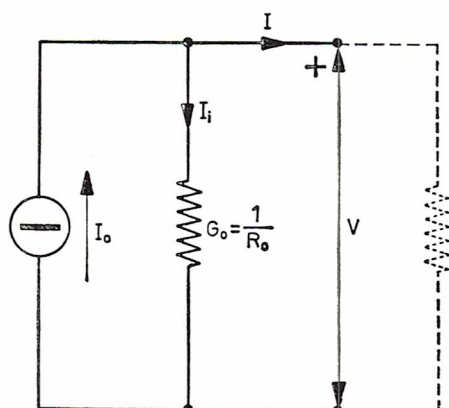



Fig. 2.2-5

un generatore ideale di tensione di *f.e.m.* V_0 avente in serie la resistenza interna R_0.

d) Generatore reale di corrente: è un generatore che non riesce a mantenere nel circuito la corrente ad un valore costante, cioè quello caratteristico I_0, poiché una parte della corrente viene shuntata dalla conduttanza interna G_0 del generatore stesso. Un generatore reale di corrente viene di solito indicato con il graficismo riportato in fig. 2.2-5, poiché esso può sempre essere pensato costituito da un generatore ideale di corrente I_0 avente in parallelo la conduttanza G_0 che shunta appunto parte della corrente I_0. Nella fig. 2.2-5 si può vedere infatti come I, corrente nel circuito esterno, sia sempre minore di I_0 a causa appunto della corrente I_i derivata dalla conduttanza interna G_0 del generatore.

Tenuto conto di quanto riportato nei punti *a*), *b*), *c*), *d*) si dirà allora che un generatore reale di tensione è lineare quando la caduta interna risulterà proporzionale alla corrente erogata I [4] cosicché la caratteri-

---

[4] Cioè il valore di R_0 è indipendente dal valore della corrente erogata I.

stica di questo generatore si presenterà come quella riportata in fig. 2.2-6. Così un generatore di corrente sarà lineare quando la corrente derivata dalla conduttanza interna G_0 del generatore risulterà proporzionale alla tensione V presente ai suoi morsetti [5], come appare in fig. 2.2-7.

Si vuole da ultimo richiamare l'attenzione ancora sul fatto che un generatore reale di energia, cioè qualsiasi generatore *purché lineare*, può essere schematizzato indifferentemente:

— con un generatore ideale di tensione di *f.e.m.* V_0 avente in serie una resistenza R_0 (fig. 2.2-4);

— con un generatore ideale di corrente, la cui intensità è I_0, avente in parallelo una conduttanza G_0 (fig. 2.2-5).

La perfetta equivalenza delle due schematizzazioni si basa sul fatto

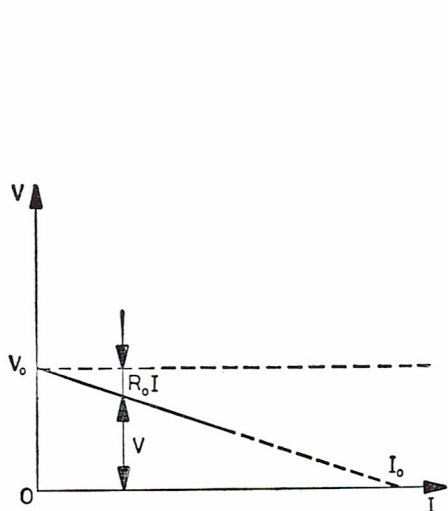
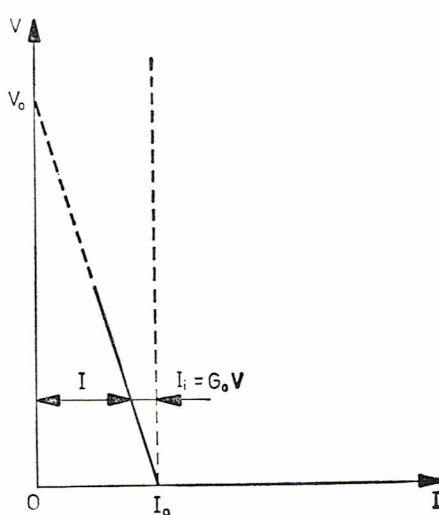



Fig. 2.2-6 *Fig. 2.2-7*

che qualsiasi generatore reale di energia, purché lineare, presenta una unica e ben determinata tensione a vuoto V_0 e un'unica e ben determinata corrente di cortocircuito I_0, grandezze legate fra di loro dalle seguenti semplicissime relazioni:

$$V_0 = R_0 I_0 \quad , \quad I_0 = \frac{V_0}{R_0} = G_0 V_0 \, ; \tag{2.2-1}$$

per cui se il generatore verrà considerato di *tensione* sarà rappresentato col circuito di fig. 2.2-4 mentre se di *corrente* lo stesso sarà rappresentato col circuito di fig. 2.2-5 ed il passaggio dall' uno all'altro

---

(5) Cioè il valore di G_0 è indipendente dal valore della tensione V ai morsetti.

(e viceversa) avverrà tenendo conto solamente delle condizioni date in 2.2-1 (si veda ad esempio l'esercizio 2.131 riportato nel § 2.13).

La rappresentazione di un generatore elettrico con l'uno o con l'altro schema è questione quindi solamente di convenienza e di praticità; mentre in realtà un generatore apparterrà all'uno o all'altro tipo a seconda delle sue vere prestazioni. Precisamente sarà detto di tensione se la caduta interna dovuta alla corrente di carico risulterà una piccola percentuale della tensione a vuoto, cioè se la tensione ai suoi capi non varierà di molto al variare (entro certi limiti) del carico oppure anche se la corrente di cortocircuito risulterà molto grande rispetto alla corrente di carico; sarà detto di corrente invece quando la caduta interna sarà molto grande e la corrente di cortocircuito differirà di assai poco da quella di carico, ovvero se la corrente attraverso il carico rimarrà praticamente costante al variare (entro certi limiti) del carico stesso.

Esercizio 2.21

Un generatore di energia (fig. 2.21-1) presenta le seguenti caratteristiche: tensione a vuoto $V_0 = 300$ volt, resistenza interna $R_0 =$

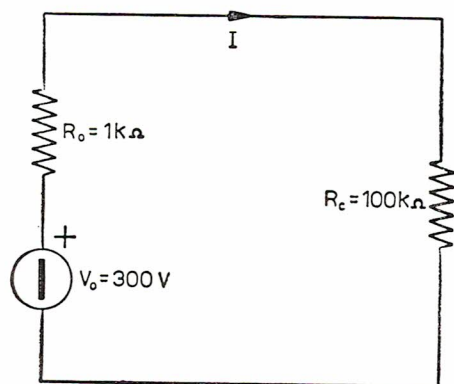



Fig. 2.21-1

$= 1000$ ohm. Si dica, nel caso che il carico sia costituito da una resistenza R_c del valore di 100 kohm:

1) se il generatore si comporta in realtà come generatore di tensione o di corrente;

2) l'errore commesso nel trascurare la resistenza interna del generatore;

3) a quanto ammonta la corrente di cortocircuito.

Soluzione

Il generatore si comporta come generatore di tensione poiché la caduta di tensione che si ha nella resistenza interna R_0 è assai modesta rispetto alla *f.e.m.* V_0. Questa caduta infatti vale:

$$\Delta V = \frac{R_0}{R_0 + R_c} V_0 = \frac{10^3}{101 \cdot 10^3} 300 = 2{,}97 \cong 3 \text{ volt},$$

rappresentando quindi circa l'1 % della *f.e.m.* del generatore. Trascurando pertanto la sua resistenza interna, il che significa considerare come ideale il generatore assegnato, si commetterà nelle condizioni di carico dato un errore dell'1 %, risultando infatti la tensione ai capi del carico in quest'ultimo caso di 300 volt anziché di circa 297, come è in realtà.

La corrente di cortocircuito ammonta d'altronde a

$$I_0 = \frac{V_0}{R_0} = \frac{300}{1000} = 0{,}3 \text{ ampere};$$

mentre la corrente di carico, nelle condizioni date, vale:

$$I_0 = \frac{V_0}{R_0 + R_c} = \frac{300}{101 \cdot 10^3} \cong 0{,}003 \text{ ampere},$$

cioè circa cento volte minore di quella di cortocircuito. Confrontando i valori di queste due correnti si ha per altra via la conferma come il generatore in oggetto sia da considerarsi, nelle condizioni date, di tensione, poiché appunto grande è il valore della corrente di cortocircuito rispetto a quella di carico.

Esercizio 2.22

Un generatore di corrente (fig. 2.22-1), caratterizzato da una corrente di cortocircuito $I_0 = 1$ mA e da una conduttanza interna

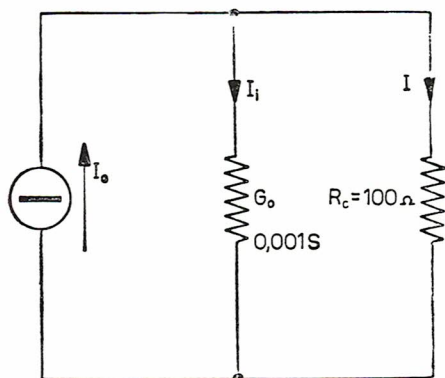



Fig. 2.22-1

$G_0 = 0{,}001$ siemens, è chiuso su di un carico $R_c = 100$ ohm. Si trovi:

1) la corrente shuntata dalla conduttanza interna in valore assoluto e relativo rispetto alla corrente I_0;

2) quale valore deve superare la resistenza del carico perché il generatore si comporti effettivamente come generatore di tensione.

Soluzione

1) Con riferimento al circuito elettrico riportato in fig. 2.22-1, il valore assoluto della corrente I_i shuntata dalla conduttanza interna ammonta a:

$$I_i = \frac{R_c}{R_0 + R_c} I_0 = \frac{100}{1000+100} 10^{-3} = 0{,}091 \cdot 10^{-3} \text{ ampere},$$

che rappresenta in valore relativo il 9,1 % della corrente di cortocircuito del generatore.

2) Perché il generatore dato si comporti effettivamente come generatore di tensione, cioè affinché la tensione ai suoi morsetti fra vuoto e carico non abbia a differire per più di qualche percento (ad esempio 5 %), basterà che la resistenza di carico R_c soddisfi la condizione:

$$\frac{R_0}{R_0 + R_c} \leq 0{,}05 ,$$

poiché, per il circuito dato, $\dfrac{R_0}{R_0 + R_c} = \dfrac{V_0 - V}{V_0}$ e il termine $\dfrac{V_0 - V}{V_0}$ rappresenta appunto la variazione di tensione relativa fra vuoto e carico. L'espressione sopra scritta, risolta rispetto a R_c, ricordando che ora sarà $R_0 + R_c \cong R_c$ per essere $R_c >> R_0$, fornirà pertanto la condizione cercata:

$$R_c \geq \frac{1}{0{,}05} R_0 \geq 20000 \text{ ohm} .$$

2.3 Principi di Kirchhoff

Data una rete, formata da n nodi e da r rami, comunque complessa, ad esempio come quella rappresentata in fig. 2.3-1, è possibile scrivere un certo numero di equazioni, precisamente:

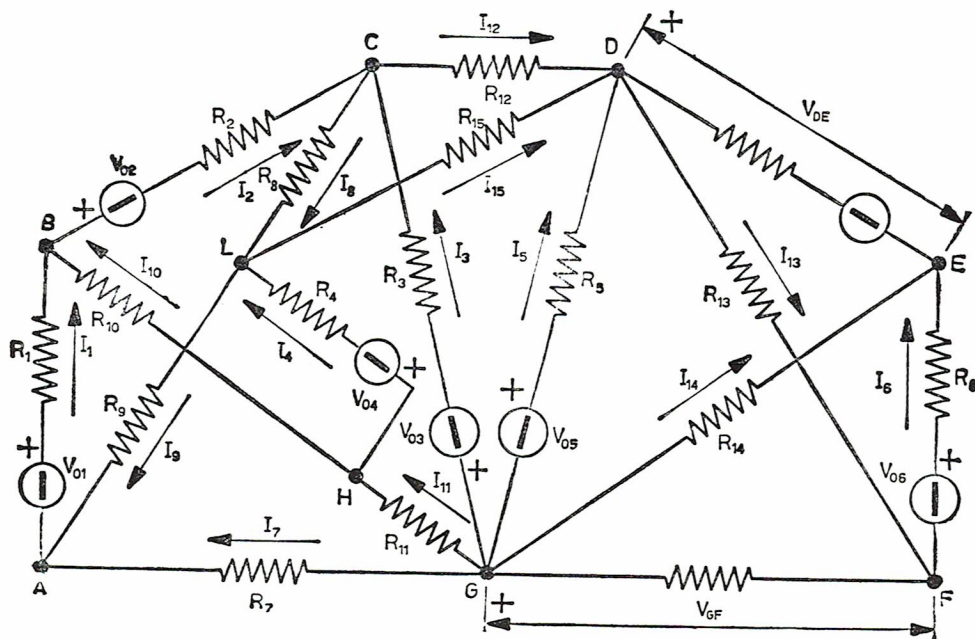



Fig. 2.3-1

EQUAZIONI AI NODI

Per $n-1$ degli n nodi [1] costituenti la rete l'espressione della costanza dei potenziali di detti nodi, conseguenza del fatto che in ogni nodo, in regime elettrico permanente, le cariche elettriche non si possono accumulare o rarefare, porta alla seguente condizione:

$$\Sigma I = 0 \qquad (1^0 \text{ principio di Kirchhoff}), \tag{2.3-1}$$

valida naturalmente per ciascun nodo della rete. La 2.3-1 stabilisce in

---

[1] I nodi indipendenti sono n-1 e non n, poiché l'equazione dell'ennesimo nodo si può sempre ottenere come somma delle equazioni scritte per due o più nodi della rete stessa. È come dire cioè che una delle n equazioni è conseguenza delle altre n-1.

sostanza che per ciascun nodo la somma di tutte le correnti entranti deve anche essere eguale alla somma di tutte le correnti uscenti (equilibrio delle correnti).

Il primo principio di Kirchhoff, applicato in questa seconda forma ad esempio al nodo A della rete di fig. 2.3-1, porterà a scrivere la seguente equazione:

2.3-2 $$I_7 + I_9 = I_1 ,$$

cioè appunto:

2.3-3 $$I_7 + I_9 - I_1 = 0 .$$

EQUAZIONI ALLE MAGLIE

Per una qualsiasi maglia della rete, ma una rete elettrica avente n nodi ed r rami possiede solamente $r - n + 1$ maglie indipendenti [2], alle *f.e.m.* impresse dovranno fare equilibrio le varie cadute di tensione negli elementi passivi presenti nei rami della maglia stessa, cioè si potrà scrivere:

2.3-4 $$\Sigma V_0 = \Sigma RI , \qquad (2^0 \text{ principio di Kirchhoff})$$

o anche:

2.3-5 $$\Sigma V_0 - \Sigma RI = 0 .$$

Si voglia scrivere ad esempio il secondo principio di Kirchhoff per la maglia $ABCGA$ della rete data in fig. 2.3-1. Si avrà partendo dal punto A:

2.3-6 $$V_{01} - V_{02} + V_{03} = \mathrm{R}_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_7 I_7 .$$

Per la maglia $GDEFG$, sempre della rete riportata in fig. 2.3-1, dove di due rami sono note le relative tensioni V_{DE} e V_{GF}, il secondo principio di Kirchhoff scritto invece nella forma riportata in 2.3-5, porta alla seguente relazione, partendo dal punto G,

2.3-7 $$V_{05} - R_5 I_5 - V_{DE} + R_6 I_6 - V_{06} + V_{GF} = 0 .$$

---

(2) La loro individuazione è importante, pur non essendo facile se la rete è molto complessa. Sono maglie indipendenti quelle maglie le cui equazioni non risultano essere la somma di due o più equazioni di altre maglie della rete stessa, cioè non siano una conseguenza delle rimanenti altre equazioni.

Si ricorderà naturalmente che per poter scrivere il primo principio di Kirchhoff è necessario stabilire i versi alle correnti che percorrono i vari rami della rete, così come per poter scrivere il secondo principio di Kirchhoff è necessario conoscere, oltre al verso delle correnti, i punti a potenziale più elevato (+) dei vari bipoli sia attivi che passivi [3] e il

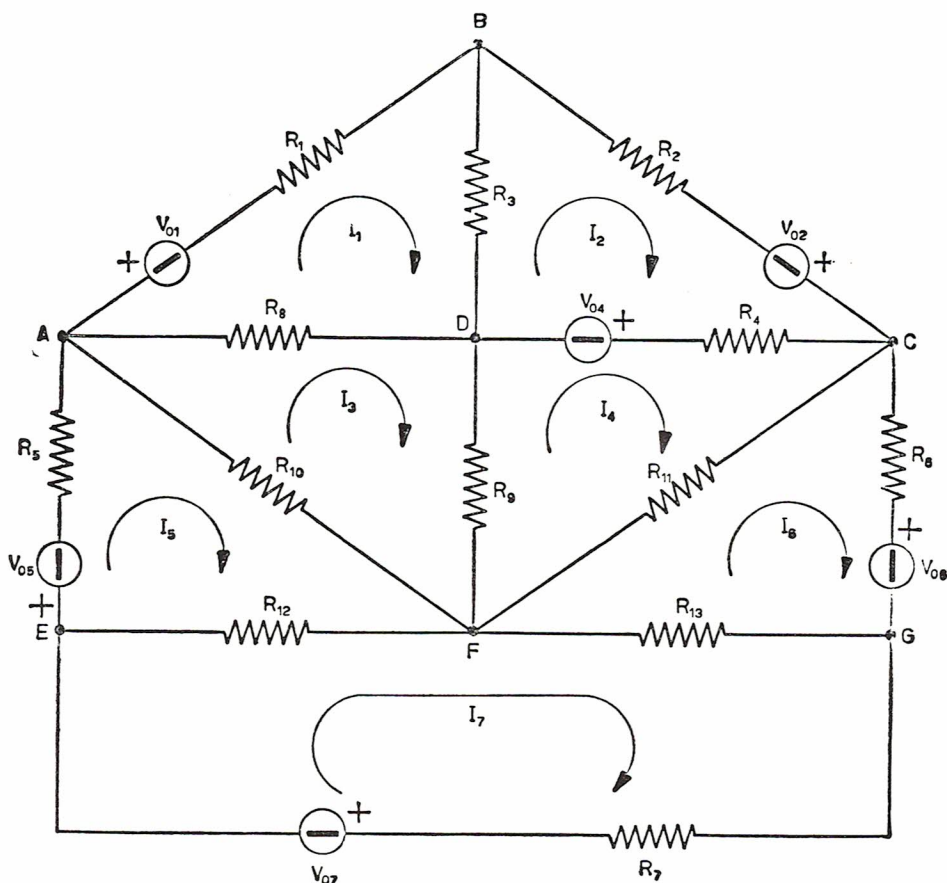



Fig. 2.3-2

verso di percorrenza nelle maglie. Si tenga presente che i versi delle correnti sono del tutto arbitrari, qualora non si conosca la loro effettiva situazione nella rete, e che per verso di percorrenza si assume di solito quello destrogiro.

---

[3] Se si sono fissati a priori i versi delle correnti, i punti a potenziale più alto (+) dei bipoli passivi saranno quelli in cui entra la corrente.

Si tenga presente ancora che le reti elettriche, comunque complesse, si dividono in due grandi categorie; quelle cosiddette *non piane* e quelle *piane*. Alla prima categoria appartiene certamente la rete data in fig. 2.3-1 poiché in questa rete alcuni rami s' intrecciano fra di loro: ad esempio il ramo AC s' interseca con il ramo BH (si osservi che il ramo DF invece non si incrocia con quello GE perché il ramo DF può essere disegnato più fuori, oltre il nodo E). Alla categoria delle reti piane

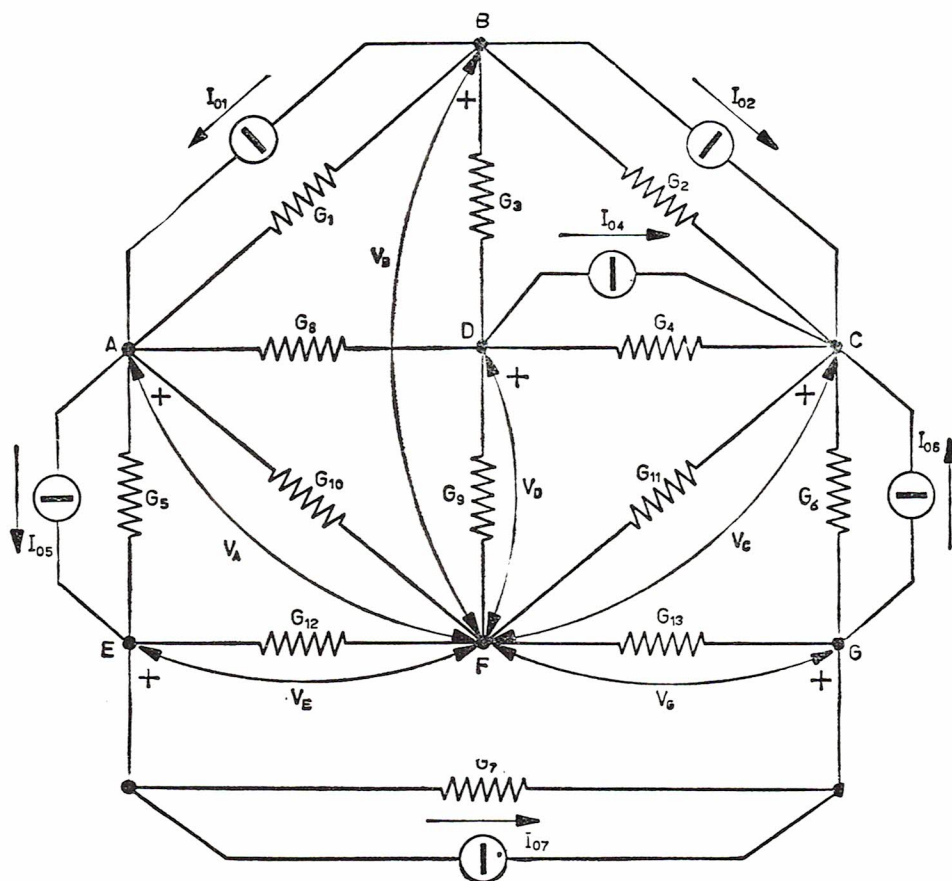



Fig. 2.3-3

appartengono ad esempio quelle riportate in fig. 2.3-2 e 2.3-4*a*, poiché non vi sono rami che s' intersecano fra di loro.

Ora la soluzione di una rete elettrica qualsiasi, piana o non piana, dopo quanto è stato detto in merito ai principi di Kirchhoff, potrà essere impostata dunque nel seguente modo: scritte le $n - 1$ equazioni ai nodi si andrà a cercare le $r - n + 1$ maglie indipendenti della rete e per ognuna di queste si scriverà poi il secondo principio di Kirchhoff. In questo

modo si verrà a disporre in totale di un numero $(n-1)+(r-n+1)=r$ di equazioni indipendenti, cioè tante quanti sono i rami della rete. La soluzione del sistema formato da r equazioni in r incognite porterà perciò alla conoscenza di tutte le correnti della rete elettrica data.

Però l' impostazione delle equazioni necessarie e sufficienti per la soluzione di una rete elettrica, *nel caso che questa sia piana*, può essere condotta in maniera differente ([4]), ma assai più facile, rispetto a quella sopra indicata ([5]). S' incominci a considerare infatti la rete data come formata esclusivamente dalle sole maglie contigue, cioè da quelle maglie che sono una vicina all'altra (nel caso di fig. 2.3-2 le maglie in parola sono in numero di sette); quindi, se i generatori di energia sono tutti di tensione e noti ([6]), si imponga in ciascuna maglia una circolazione fittizia di corrente. Per ogni maglia si potrà scrivere così il secondo principio di Kirchhoff. Poiché nella rete vi saranno m maglie contigue, e quindi m correnti fittizie incognite, si potrà arrivare ad un sistema di m equazioni in m incognite, perciò perfettamente risolubile. D'altronde le correnti circolanti effettivamente nei vari rami si troveranno facilmente come differenza fra le correnti fittizie di quelle due maglie contigue aventi in comune il ramo interessato.

Ad esempio, con riferimento alla rete riportata in fig. 2.3-2, volendo esprimere la corrente nel ramo DF, cioè la corrente I_{DF} (corrente che va dal nodo D verso quello F), si potrà scrivere:

2.3-8 $$I_{DF}=I_3-I_4\,,$$

corrente che risulterà quindi nota non appena calcolati i valori delle correnti fittizie I_3 e I_4, mentre per la stessa rete il secondo principio di Kirchhoff applicato alle varie maglie contigue porterà alle seguenti equazioni:

2.3-9 $$-V_{01}=R_1I_1+R_3(I_1-I_2)+R_8(I_1-I_3) \qquad 1^a \text{ maglia}$$

2.3-9′ $$V_{02}-V_{04}=R_2I_2+R_3(I_2-I_1)+R_4(I_2-I_4) \qquad 2^a \text{ maglia}$$

....

.................................,

cioè sviluppando ed ordinando:

2.3-10 $$(R_1+R_3+R_8)I_1-R_3I_2-R_8I_3=-V_{01}$$

([4]) Questo metodo, detto *delle correnti di maglia*, è dovuto a Maxwell.

([5]) Si vedrà infatti che con questo metodo si evita la ricerca delle maglie indipendenti della rete e si riduce il numero delle equazioni da risolvere inizialmente.

([6]) Noti sia come valore della tensione che come polarità.

$$2.3\text{-}10' \qquad -R_3I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4I_4 = V_{02} - V_{04}$$

....

....

Si ottiene così un sistema di equazioni più facilmente risolvibile. Per esempio si potrà applicare il metodo di Cramer.

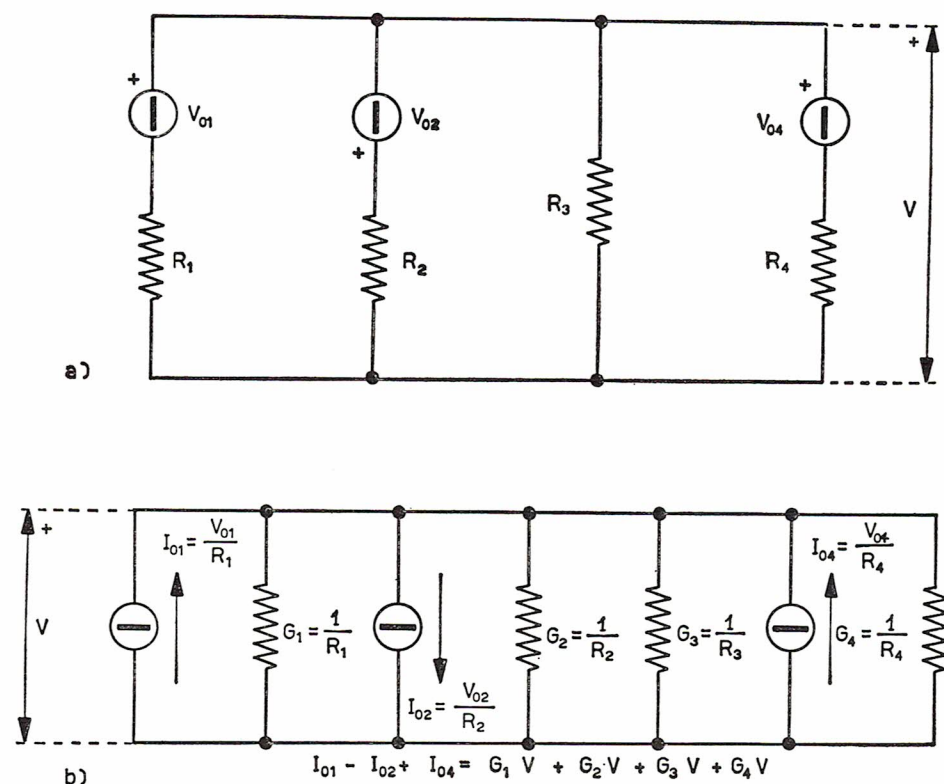



Fig. 2.3-4

Nel caso in cui i generatori che compaiono nella rete elettrica siano di corrente ([7]), si veda la rete riportata in fig. 2.3-3, allora si lavorerà ai nodi, anziché alle maglie (*metodo dei potenziali ai nodi*). Si imporranno cioè dei potenziali ai vari nodi della rete, rispetto ad uno preso come riferimento, e si scriverà per ciascun nodo il primo principio di

---

([7]) In questo caso non occorre che la rete sia piana.

Kirchhoff [8]. Poiché i nodi della rete sono n, le *d.d.p.* così poste risultano in numero di $n-1$, d'altronde anche $n-1$ sono le equazioni indipendenti che scendono dal primo principio di Kirchhoff: il problema è pertanto risolubile.

Si voglia applicare quanto esposto ad esempio alla rete di fig. 2.3-3, ove compaiono solo generatori di corrente. I nodi sono in numero di sette. Come nodo di riferimento per le tensioni è stato scelto il punto F. Questa scelta, come si è già detto, è del tutto arbitraria. D'altronde in questo modo sarà possibile esprimere assai facilmente la *d.d.p.* fra due nodi qualsiasi della rete elettrica data. Ad esempio la tensione V_{AB} vale $V_A - V_B$, quella V_{BG} si può analogamente esprimere come $V_B - V_G$, e così via.

Le equazioni ai nodi sono dunque sei:

2.3-11 $$I_{01} - I_{05} = G_5(V_A - V_E) + G_{10} V_A + G_8(V_A - V_D) + G_1(V_A - V_B) \qquad \text{nodo } A$$

2.3-11′ $$-I_{01} - I_{02} = G_1(V_B - V_A) + G_3(V_B - V_D) + G_2(V_B - V_C) \qquad \text{nodo } B$$

....

....,

cioè sviluppando ed ordinando:

2.3-12 $$(G_1 + G_5 + G_8 + G_{10}) V_A - G_1 V_B - G_8 V_D - G_5 V_E = I_{01} - I_{05}$$

$$-G_1 V_A + (G_1 + G_2 + G_3) V_B - G_2 V_C - G_3 V_D = -I_{01} - I_{02}$$

....

....

Il sistema di equazioni che così si ottiene è dunque risolubile, ad esempio col metodo di Cramer.

Si noti da ultimo come nel caso in cui nella rete elettrica abbiano a comparire sia generatori di tensione che di corrente sia bene ridurre tutti i generatori ad un solo tipo: quello che determina maggiore convenienza. Ciò è sempre possibile, dopo quanto è stato precisato nel § 2.2.

---

(8) Le equazioni risultano dunque del tipo $\Sigma I = \Sigma G V$, dove I rappresenta la corrente di quei generatori che fanno capo al nodo interessato e V rappresenta la *d.d.p.* che agisce ai capi di quelle conduttanze G aventi un estremo nello stesso nodo.

Così come può essere conveniente trasformare tutti i generatori di tensione che compaiono nella rete in quelli equivalenti di corrente al fine di poter applicare il metodo dei potenziali ai nodi (incogniti gli n-1 potenziali dei nodi) anziché quello delle correnti di maglia (incognite le m correnti fittizie delle maglie) o quello che impiega contemporaneamente il 1° e il 2° principio di Kirchhoff (nodi e maglie, incognite cioè le r correnti dei rami) se la rete ad esempio non è piana.

Questa trasformazione si giustifica soprattutto per quelle reti che possiedono un numero di nodi indipendenti inferiore al numero delle maglie indipendenti (contigue), per cui le equazioni dei nodi da risolvere sono in numero inferiore a quelle deducibili con uno degli altri due metodi. È questo ad esempio il caso rappresentato dalla rete elettrica di fig. 2.3-4*a* (e di molte altre analoghe) che ha quattro rami, tre maglie contigue, ma solamente un nodo indipendente. Il vantaggio dell'applicazione del metodo dei potenziali ai nodi (rete equivalente di fig. 2.3-4*b* ottenuta da quella di fig. 2.3-4*a* trasformando i generatori di tensione in generatori di corrente) è evidente poiché richiede la soluzione di una sola equazione (quella che appare sotto al circuito di fig. 2.3-4*b*). Naturalmente con ciò la rete non è del tutto risolta poiché si dovranno calcolare le correnti nei vari rami, cosa però assai semplice dato che ora si conosce la *d. d. p.* V presente agli estremi di ciascun ramo.

Concludendo si può affermare che la risoluzione di una rete elettrica con i principi di Kirchhoff verrà affrontata con quel metodo (delle correnti dei rami, delle correnti fittizie di maglia, dei potenziali ai nodi) che consentirà maggiore comodità di calcolo (di solito si assume quello che conduce ad un minor numero di equazioni da risolvere); tuttavia si potrà scegliere quel metodo che consente di utilizzare direttamente i dati assegnati, senza ricorrere a preliminari e quindi finali trasformazioni, o che direttamente fornisce la soluzione nei termini (di tensione o di corrente) richiesti.

N. B. Una rete elettrica può essere costituita dunque in sostanza o da generatori ideali di tensione (V_0) e da resistenze (R) (fig. 2.3-2) o da generatori ideali di corrente (I_0) e da conduttanze (G) (fig. 2.3-3). Ora i relativi metodi di risoluzione esposti in questo paragrafo, cioè i principi di Kirchhoff applicati nei vari modi, così come altri principi che verranno enunciati in questo capitolo, confermano che esiste per le reti elettriche lineari una legge di *dualità* in base alla quale da un qualsiasi principio è possibile dedurne un altro (principio duale) semplicemente scambiando alcuni termini come qui sotto indicato:

↓ termine di partenza	tensione	resistenza	serie	maglia	termine duale ↑
termine duale	corrente	conduttanza	parallelo	nodo	termine di partenza

Infatti, ad esempio, stabilito che per le *maglie* (termine di part.) di una rete elettrica caratterizzata dall'avere generatori di tensione (termine di part.) e quindi resistenze (termine di part.) i principi di Kirchhoff danno luogo al seguente tipo di equazione $\Sigma V = \Sigma RI$, per la rete avente generatori di corrente (term. duale) e conduttanze (term. duale) dagli stessi principi, in base alla legge di dualità, si potrà dedurre che per i *nodi* (term. duale) valgono le seguenti espressioni $\Sigma I = \Sigma GV$ (di questo tipo sono appunto le equazioni date in 2.3-11) ottenute dalla precedente con lo scambio dei termini come indicato nella tabellina sopra riportata.

Esercizio 2.31

Si risolva la rete elettrica riportata in fig. 2.31-1 mediante i principi di Kirchhoff (nodi e maglie).

Soluzione

La rete possiede quattro nodi e sei rami. Le correnti incognite sono dunque le sei correnti circolanti in questi sei rami. Le equazioni ai nodi

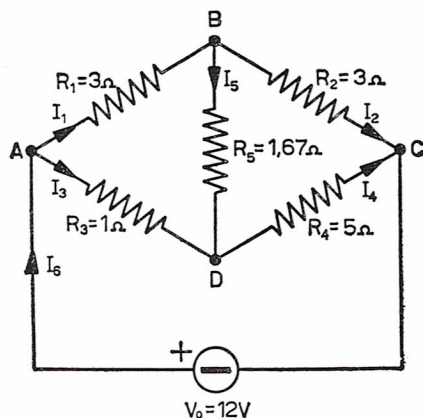



Fig. 2.31-1

sono ovviamente tre, quindi tre $(6 - 4 + 1 = 3)$ saranno le equazioni alle maglie. Si potranno scegliere ad esempio i nodi A, B, C e le maglie $ABDA$, $BCDB$, $ADCA$ che costituiscono tre maglie certamente indipendenti. Infatti ognuna delle maglie citate non risulta composta dalla somma delle altre due maglie (1).

(1) La maglia $ABCDA$ ad esempio non è indipendente perché risulta essere costituita dalle maglie $ABDA$ e $BCDB$. Infatti la sua equazione è $R_1I_1 + R_2I_2 - R_3I_3 - R_4I_4 = 0$, che si può ottenere sommando l'equazione 2.31-4 con la 2.31-5. Così il nodo D non è indipendente perché la sua equazione $I_4 + I_5 - I_3 = 0$ può essere ottenuta sommando fra loro le equazioni 2.31-1,2,3.

Si scriverà dunque:

2.31-1 $$I_6 - I_1 - I_3 = 0 \qquad \text{nodo } A$$

2.31-2 $$I_1 - I_2 - I_5 = 0 \qquad \text{» } B$$

2.31-3 $$I_2 + I_4 - I_6 = 0 \qquad \text{» } C$$

2.31-4 $$R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0 \qquad \text{maglia } ABDA$$

2.31-5 $$R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0 \qquad \text{» } BCDB$$

2.31-6 $$R_3 I_3 + R_4 I_4 = V_0 \qquad \text{» } ADCA\,.$$

La soluzione del sistema può essere condotta come segue. S'incominci col sommare fra di loro le equazioni 2.31-4 e 5, si otterrà così l'espressione:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4\,,$$

che per la 2.31-6 diventa anche:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - V_0 = 0\,;$$

cioè passando ai numeri:

2.31-7 $$I_1 + I_2 = 4\,.$$

D'altronde, sostituendo nella 2.31-4 al posto di I_3 il valore ricavato dalla 2.31-1, cioè $I_3 = I_6 - I_1$ e al posto di I_5 l'espressione ricavata dalla 2.31-2, cioè $I_5 = I_1 - I_2$, si ottiene:

$$R_1 I_1 - R_3(I_6 - I_1) + R_5(I_1 - I_2)\,,$$

ossia sviluppando e raccogliendo:

$$(R_1 + R_3 + R_5) I_1 - R_5 I_2 - R_3 I_6 = 0\,,$$

dalla quale si può ricavare l'espressione di I_6, che con i dati del problema, diventa:

2.31-8 $$I_6 = (3 + 1 + 1{,}67)\, I_1 - 1{,}67\, I_2 = 5{,}67\, I_1 - 1{,}67\, I_2\,.$$

Prendendo ora l'equazione 2.31-6 e sostituendovi al posto di I_3 e I_4 le espressioni ricavate rispettivamente da 2.31-1 e 3 si ha la seguente relazione:

$$R_3(I_6 - I_1) + R_4(I_6 - I_2) = V_0\,,$$

che sviluppata ed ordinata diventa:

$$-R_3I_1 - R_4I_2 + (R_3 + R_4)\,I_6 = V_0\,,$$

la quale a sua volta in base alla 2.31-8, e passando ai numeri, fornisce la seguente equazione nelle sole due incognite I_1 e I_2:

$$-I_1 - 5\,I_2 + 6\,(5{,}67\,I_1 - 1{,}67\,I_2) = 12\,,$$

da cui si ottiene, sviluppando e semplificando:

$$33\,I_1 - 15\,I_2 = 12\,.$$

Poiché per la 2.31-7 $I_2 = 4 - I_1$, si ha subito che:

$$33\,I_1 - 15\,(4 - I_1) = 12\,,$$

cioè:

$$I_1 = \frac{72}{48} = 1{,}50 \text{ ampere}\,,$$

e quindi anche che:

$$I_2 = 4 - I_1 = 2{,}50 \text{ ampere}\,.$$

D'altronde dalla 2.31-2 si otterrà immediatamente il valore della corrente I_5:

$$I_5 = I_1 - I_2 = -1{,}00 \text{ ampere}\,.$$

La corrente nella resistenza R_5 fluisce perciò da D verso B.

Dalla 2.31-8 si ha quindi che:

$$I_6 = 5{,}67 \cdot 1{,}5 - 1{,}67 \cdot 2{,}5 = 4{,}33 \text{ ampere}\,,$$

per cui dalla 2.31-1 si ottiene il valore della corrente I_3:

$$I_3 = I_6 - I_1 = 2{,}83 \text{ ampere}\,,$$

cioè la corrente nella resistenza R_3 fluisce realmente da A verso D.

Dall'equazione 2.31-3 si otterrà finalmente il valore della corrente I_4:

$$I_4 = I_6 - I_2 = 1{,}83 \text{ ampere}\,.$$

La corrente nella resistenza R_4 fluisce dunque da D verso C, cioè come era stato posto intuitivamente all' inizio del problema.

La rete con ciò è completamente risolta.

Esercizio 2.32

Si risolva la rete precedente col metodo delle correnti di maglia (Maxwell).

Soluzione

Le maglie contigue sono tre. Dopo aver imposto in ciascuna di esse

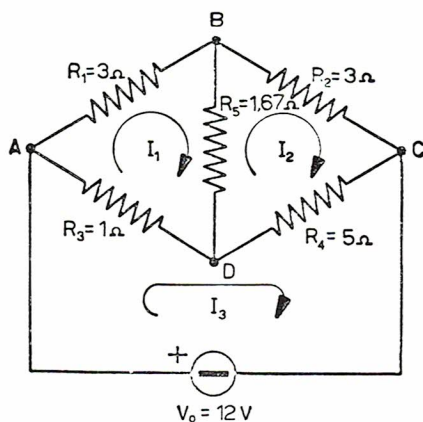



Fig. 2.32-1

una circolazione fittizia di corrente (vedi fig. 2.32-1), si potrà scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$R_1 I_1 + R_5(I_1 - I_2) + R_3(I_1 - I_3) = 0 \qquad 1^a \text{ maglia}$$

$$R_2 I_2 + R_4(I_2 - I_3) + R_5(I_2 - I_1) = 0 \qquad 2^a \text{ maglia}$$

$$R_3(I_3 - I_1) + R_4(I_3 - I_2) = V_0 \qquad 3^a \text{ maglia}$$

il quale, passando ai numeri ed ordinando, diventa:

2.32-1 $$5,67\, I_1 - 1,67\, I_2 - I_3 = 0$$

2.32-2 $$-1,67\, I_1 + 9,67\, I_2 - 5\, I_3 = 0$$

2.32-3 $$-I_1 - 5\, I_2 + 6\, I_3 = 12\ .$$

Il sistema potrà essere risolto in questo modo. Si ricavi l'espressione di I_2 dalla 2.32-3 e la si sostituisca nelle equazioni 2.32-1 e 2. Si otterranno allora due equazioni nelle due sole incognite I_2 e I_3, precisamente:

$$-30\,I_2 + 33\,I_3 = 68 \tag{2.32-4}$$

$$18\,I_2 - 15\,I_3 = -20. \tag{2.32-5}$$

Ricavando l'espressione di I_3 dalla 2.32-4, cioè $I_3 = \dfrac{68 + 30\,I_2}{33}$, e sostituendola nella 2.32-5, si ottiene l'equazione:

$$18\,I_2 - 15\left(\frac{68 + 30\,I_2}{33}\right) = -20$$

che sviluppata, ordinata e risolta dà per I_2 il seguente valore:

$$I_2 = 2{,}50 \text{ ampere} ;$$

per cui immediatamente I_3 varrà:

$$I_3 = \frac{68 + 30\,I_2}{33} = \frac{68 + 30 \cdot 2{,}5}{33} = 4{,}33 \text{ ampere} .$$

Ricorrendo ora all'equazione 2.32-3 si potrà conoscere finalmente il valore di I_1, poiché:

$$I_1 = -12 - 5\,I_2 + 6\,I_3 = -12 - 5 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 4{,}33 \cong 1{,}50 \text{ ampere}.$$

La rete a questo punto è quindi praticamente risolta. Infatti I_1 e I_2 sono le correnti nelle resistenze R_1 ed R_2. D'altronde per trovare ad esempio la corrente nella resistenza R_5 cioè la I_{BD} basterà eseguire l'operazione:

$$I_{BD} = I_1 - I_2 = 1{,}5 - 2{,}5 = -1{,}0 \text{ ampere} .$$

Così dicasi per le rimanenti correnti.

Come si sarà potuto osservare, l'applicazione del metodo delle correnti di maglia (Maxwell) ha permesso una soluzione assai più semplice della precedente e ciò a causa del più ridotto numero di incognite.

Esercizio 2.33

Si calcoli a quanto ammonta complessivamente la potenza dissipata dagli elementi resistivi costituenti la rete elettrica riportata in fig. 2.33-1.

Soluzione

Per calcolare la potenza dissipata per effetto Joule da ciascun elemento resistivo occorre conoscere il valore della corrente che percorre ciascuna resistenza. In definitiva perciò si dovrà risolvere la rete data. A tale scopo conviene applicare il metodo delle correnti di maglia (Maxwell).

Dopo aver imposto allora in ciascuna delle tre maglie una circola-

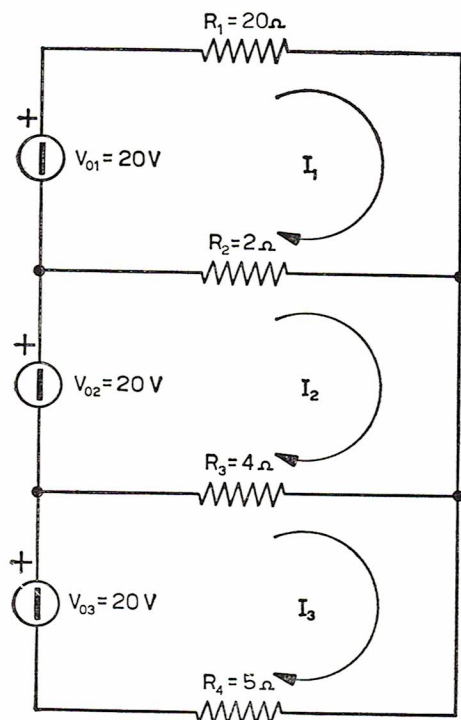



Fig. 2.33-1

zione fittizia di corrente, come è stato riportato sulla stessa fig. 2.33-1, si potranno scrivere le seguenti equazioni, impiegando subito i dati forniti dal problema:

$$20\,I_1 + 2(I_1 - I_2) = 20 \qquad 1^a \text{ maglia},$$

$$2(I_2 - I_1) + 4(I_2 - I_3) = 20 \qquad 2^a \text{ maglia},$$

$$5\,I_3 + 4(I_3 - I_2) = 20 \qquad 3^a \text{ maglia};$$

per cui, dopo aver sviluppato ed ordinato, si otterrà:

2.33-1 $$22\, I_1 - 2\, I_2 = 20$$

2.33-2 $$-2\, I_1 + 6\, I_2 - 4\, I_3 = 20$$

2.33-3 $$-4\, I_2 + 9\, I_3 = 20\,.$$

Questo sistema di tre equazioni in tre incognite risulta risolubile in modo assai facile. Infatti basterà ricavare dall'ultima equazione 2.33-3 l'espressione della corrente I_2:

2.33-4 $$I_2 = \frac{9I_3 - 20}{4}$$

per sostituirla nelle prime due equazioni, cioè 2.33-1 e 2. Dopo aver sviluppato e semplificato si avrà così:

$$22\, I_1 - 4{,}5\, I_3 = 10$$

$$-\ 2\, I_1 + 9{,}5\, I_3 = 50\,.$$

Da questo sistema di due equazioni in due incognite si ricaveranno, con uno dei tanti modi di risoluzione, i seguenti dati:

$$I_1 = 1{,}60\ \mathrm{A} \qquad I_3 = 5{,}60\ \mathrm{A}\,,$$

e quindi, in virtù dell'espressione 2.33-4, finalmente anche:

$$I_2 = 7{,}60\ \mathrm{A}\,.$$

Risulta così che:

a) la resistenza R_1 verrà percorsa da una corrente del valore eguale a I_1, cioè di 1,60 A, per cui dissiperà la potenza $P' = R_1 I_1^2 = 20 \cdot 1{,}60^2 = 51{,}2$ W;

b) la resistenza R_2 verrà percorsa da una corrente I'' del valore eguale a $I_2 - I_1 = 7{,}60 - 1{,}60 = 6$ A, per cui dissiperà una potenza $P'' = R_2 I''^2 = 2 \cdot 6^2 = 72$ W;

c) la resistenza R_3 verrà percorsa da una corrente I''' del valore eguale a $I_2 - I_3 = 7{,}60 - 5{,}60 = 2$ A, per cui dissiperà una potenza $P''' = R_3 I'''^2 = 4 \cdot 2^2 = 16$ W;

d) la resistenza R_4 verrà percorsa da una corrente del valore eguale a quello della corrente I_3, cioè di 5,60 A, per cui dissiperà una potenza $P'''' = R_4 I_3^2 = 5 \cdot 5{,}60^2 = 156{,}8$ W.

In definitiva quindi gli elementi passivi della rete assegnata dissiperanno complessivamente la seguente potenza P:

$$P = P' + P'' + P''' + P'''' = 51{,}2 + 72 + 16 + 156{,}8 = 296 \text{ watt.}$$

2.4 Principio della sovrapposizione degli effetti

Questo principio stabilisce che la corrente circolante in un punto qualsiasi di una rete comunque complessa, purché lineare, corrente dovuta all'azione degli n generatori elettrici ivi presenti, può considerarsi come somma algebrica delle successive correnti circolanti in quello stesso punto dovute ai generatori agenti separatamente, cioè uno alla volta. Così analogamente la differenza di potenziale fra due punti di una rete può pensarsi come somma algebrica delle successive differenze di potenziale fra quegli stessi punti dovuti ai generatori agenti separatamente, cioè uno alla volta.

È importante notare che quando si considera agente nella rete un solo generatore gli altri generatori, quelli di tensione, dovranno essere posti in cortocircuito, o meglio con forza elettromotrice nulla, e quelli di corrente dovranno essere aperti, o meglio con corrente nulla. È come dire che le resistenze interne di tutti i generatori rimangono inalterate e presenti anche quando si considera agente nella rete, per l'applicazione del principio della sovrapposizione degli effetti, un solo generatore, cioè la *f.e.m.* o la corrente di quel generatore.

Gli esercizi che seguono chiariranno meglio l'applicazione di questo importante principio.

Esercizio 2.41

Si calcoli mediante il principio della sovrapposizione degli effetti il valore e il verso della corrente I_3 che attraversa la resistenza R_3 facente parte della rete elettrica studiata nell'esercizio 1.593.

Soluzione

La rete contiene tre generatori di tensione i quali, per il principio della sovrapposizione degli effetti, si potranno considerare agenti nella rete data successivamente, uno alla volta. Lo studio della rete data, che è stata riportata in fig. 2.41-1*a*, viene quindi ad essere trasportato a quello delle tre reti riportate rispettivamente in fig. 2.41-1*b*, *c*, *d* ; dopodiché naturalmente si dovranno sommare algebricamente le correnti ottenute per ciascun ramo.

Nel nostro caso il calcolo della corrente I_3 verrà condotto come segue :

a) Calcolo della corrente nel terzo ramo della rete di fig. 2.41-1*b*.

La corrente erogata dal generatore V_{01} vale :

$$I'_1 = \frac{V_{01}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{100}{2 + \dfrac{40}{14}} \text{ ampere},$$

per cui la corrente I'_3 ammonta a:

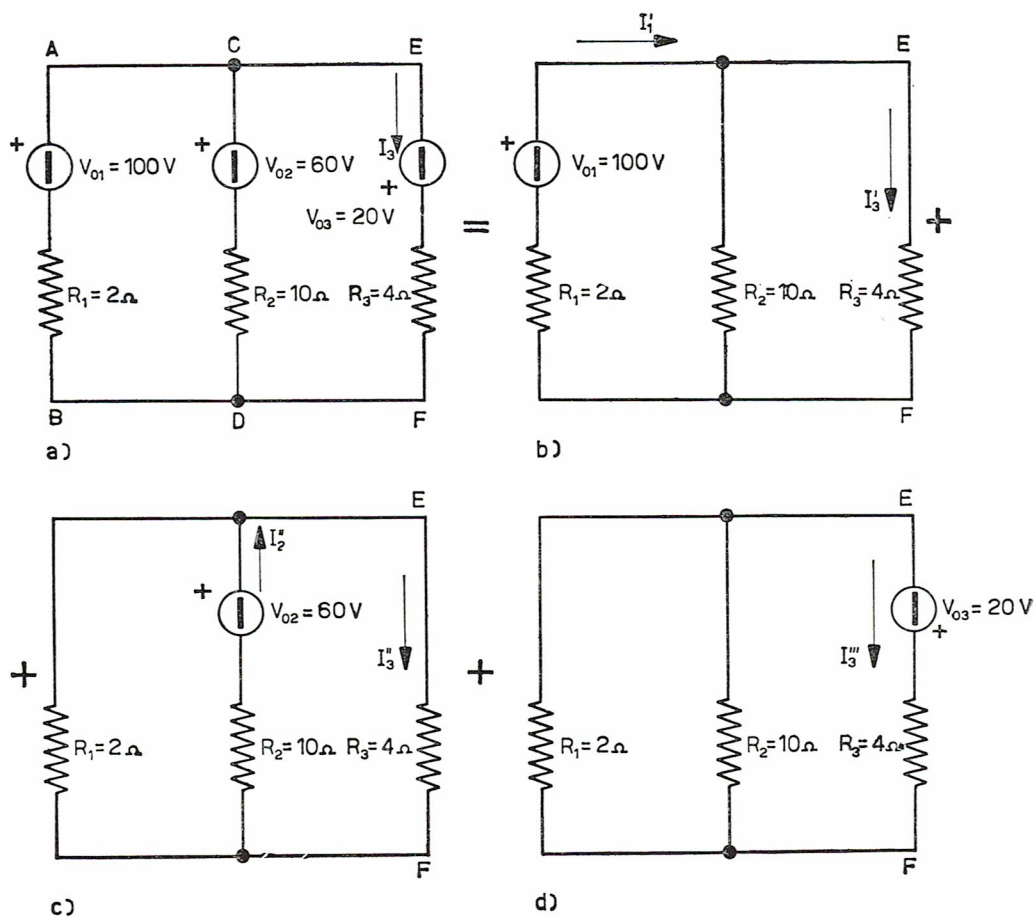



Fig. 2.41-1

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{100}{2 + \dfrac{40}{14}} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1000}{68} \text{ ampere}.$$

b) Calcolo della corrente nel terzo ramo della rete di fig. 2.41-1*c*. La corrente erogata dal generatore V_{02} vale:

$$I_2'' = \frac{V_{02}}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{60}{10 + \dfrac{8}{6}} \text{ ampere},$$

per cui la corrente I_3'' ammonta a:

$$I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{60}{10 + \dfrac{8}{6}} \cdot \frac{2}{6} = \frac{120}{68} \text{ ampere}.$$

c) Calcolo della corrente nel terzo ramo della rete di fig. 2.41-1*d*.

La corrente erogata dal generatore V_{03}, che è anche la corrente I_3''', vale:

$$I_3''' = \frac{V_{03}}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{20}{4 + \dfrac{20}{12}} = \frac{240}{68} \text{ ampere}.$$

d) Calcolo della corrente I_3 come somma algebrica delle tre correnti sopra calcolate. Si ha dunque:

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = \frac{1000}{68} + \frac{120}{68} + \frac{240}{68} = \frac{1360}{68} = 20 \text{ ampere}.$$

La corrente nel terzo ramo ha l'intensità di 20 ampere e il verso che va da E ad F (fig. 2.41-1*a*), poiché questo è il verso delle correnti I_3', I_3'', I_3'''.

Esercizio 2.42

Due generatori di corrente alimentano, tramite due resistenze R_1 ed R_2, un carico R_c (fig. 2.42-1*a*). Si trovi la *d.d.p.* ai capi del carico applicando il principio della sovrapposizione degli effetti [1].

Soluzione

La tensione ai capi di R_c verrà computata come somma delle tensioni fra i punti A e B calcolate tramite le due reti riportate in fig. 2.42-1*b* e *c*.

---

[1] Questo esercizio può essere risolto più facilmente con il principio di Millman di cui si dirà nel § 2.8, dopo aver trasformato i due generatori di corrente in generatori di tensione.

a) Calcolo della tensione ai capi di R_c facente parte della rete di fig. 2.42-1*b*. Indicando con R' il parallelo della resistenza R_c con la serie R_2 ed R_{02}, cioè:

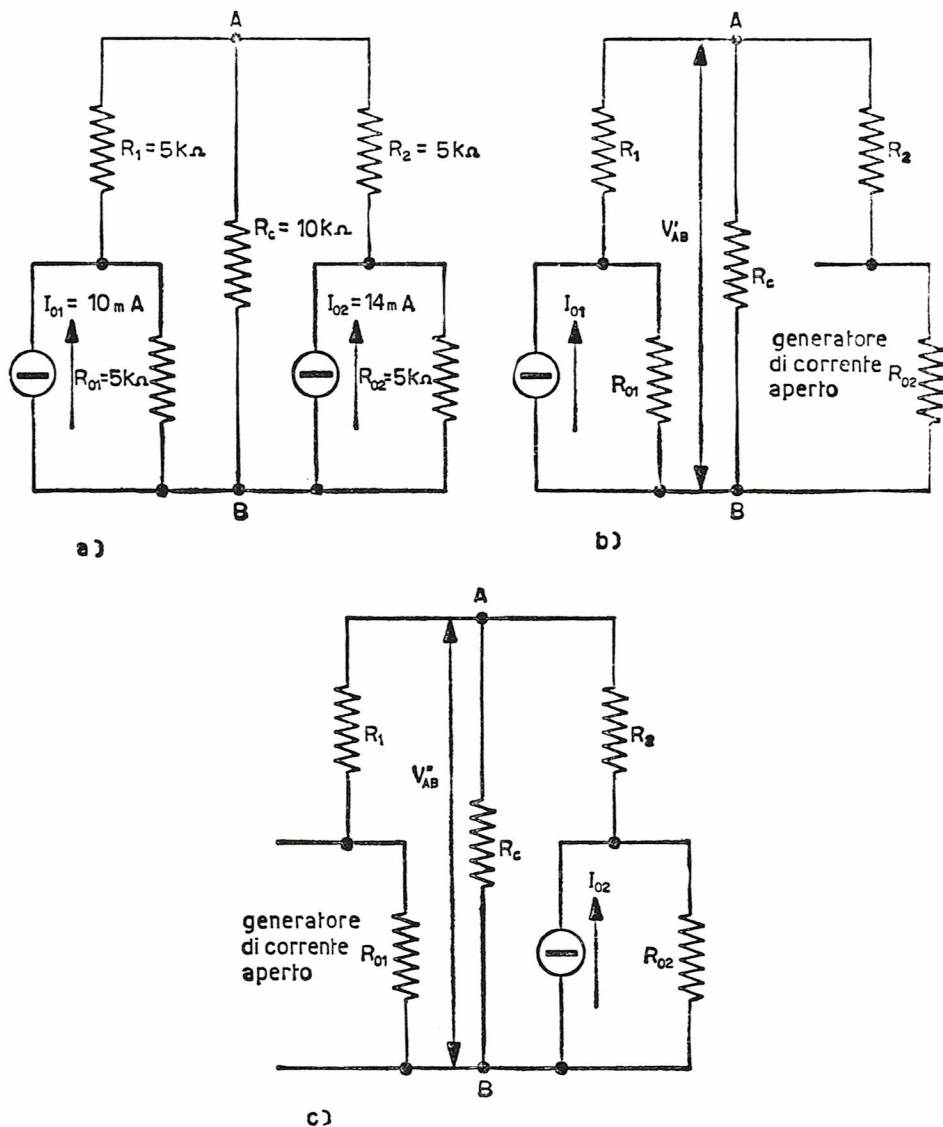



Fig. 2.42-1

$$R' = \frac{R_c(R_2 + R_{02})}{R_c + R_2 + R_{02}} = 5 \cdot 10^3 \text{ ohm},$$

si ha che:

$$V'_{AB} = I_{01} \frac{R_{01}\, R'}{R_{01} + R_1 + R'} = 10 \cdot 10^{-3} \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3} = \frac{250}{15} \text{ volt}.$$

b) Calcolo della tensione ai capi di R_c facente parte della rete di fig. 2.42-1*c*. Per la simmetria della rete, poiché $R_{02} = R_{01}$ e $R_2 = R_1$, risulta che la resistenza equivalente R'', costituita dal parallelo di R_c con la serie R_1 ed R_{01}, è in valore eguale alla resistenza equivalente R'. Si ha quindi:

$$V''_A = I_{02} \frac{R_{02} R''}{R_{02} + R_2 + R''} = 14 \cdot 10^{-3} \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3} = \frac{350}{15} \text{volt}.$$

c) Calcolo della tensione ai capi di R_c come somma algebrica delle tensioni sopra calcolate:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = \frac{250}{15} + \frac{350}{15} = \frac{600}{15} = 40 \text{ volt}.$$

La tensione cercata vale dunque 40 volt e ha il positivo nel punto *A*.

2.5 Principio di Thévenin [1]

Data una rete comunque complessa, formata da generatori elettrici e da elementi passivi tutti lineari, si veda ad esempio la fig. 2.5-1*a*, ai fini della corrente che circola in un qualsiasi suo tronco (ad esempio resistenza R_{PQ}) o della tensione ai suoi capi, è sempre possibile schematizzare la restante rete, di cui il tronco considerato fa parte, con un solo generatore ideale di tensione, la cui *f.e.m.* verrà indicata con V_0, avente in serie una sola resistenza, che verrà indicata con R_0.

Quanto ora detto è interpretato dal circuito di fig. 2.5-1*b*, il quale dunque per il tronco *PQ* può essere ritenuto *equivalente* alla rete originaria più complessa data in fig. 2.5-1*a*. Si noti così come in virtù del principio di Thévenin la resistenza R_{PQ} possa essere considerata ali-

---

(1) Questo principio, enunciato da Thévenin nel 1883, così come quello successivo di Norton, derivano dal cosiddetto teorema del generatore equivalente di Helmholtz (1853).

mentata in sostanza da un solo generatore di tensione reale, di *f.e.m.* V_0 e resistenza interna R_0. Appunto in ciò sta la grande utilità di questo principio.

Il calcolo di V_0 e di R_0 può essere impostato tenendo presente che V_0 rappresenta la *d.d.p.* che esiste fra i due punti della rete tra i quali

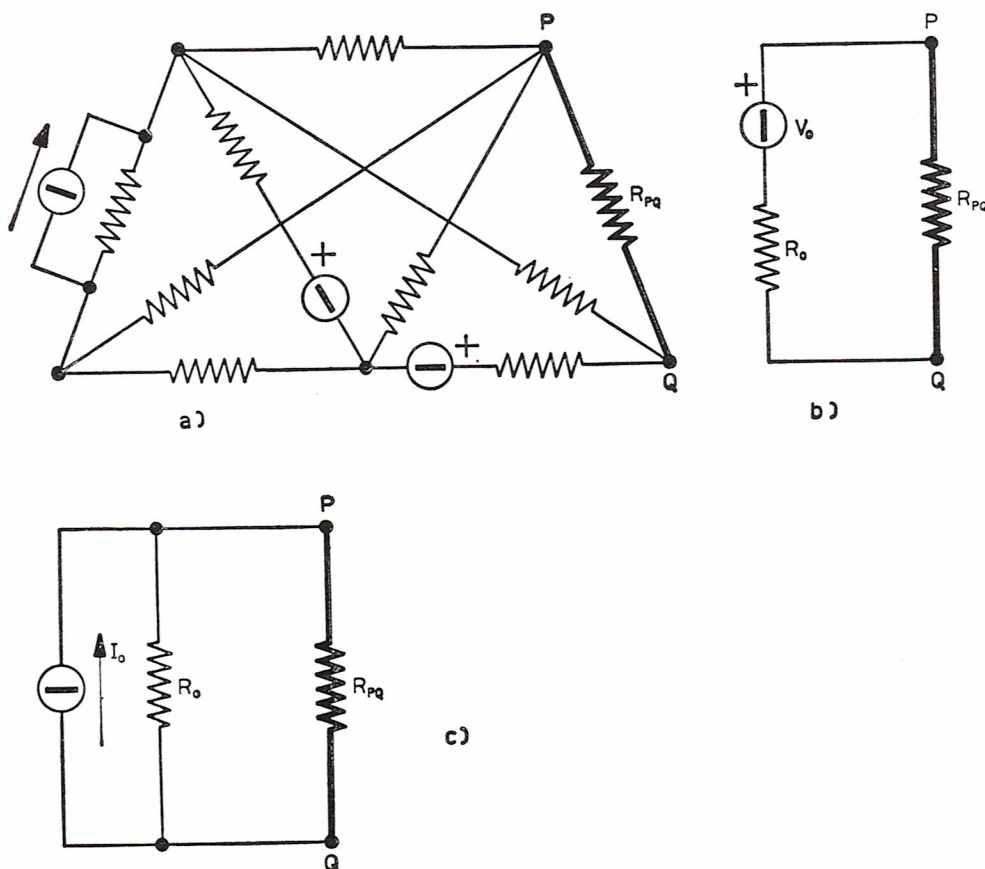



Fig. 2.5-1

vi è il tronco considerato, quando questo però è stato tolto dalla rete (tensione a vuoto fra i punti P e Q del circuito di fig. 2.5-1*a*, vedi anche fig. 2.5-2*a*) ; mentre R_0 rappresenta la resistenza vista entro la rete dai tronco considerato quando tutti i generatori ideali di tensione sono statl messi in cortocircuito e quelli ideali di corrente sono stati aperti, cioè R_0 altro non è che la resistenza offerta fra i punti P e Q dalla rete data, in assenza del tronco PQ, con i generatori ideali di tensione cortocircuitati e quelli di corrente aperti (vedi fig. 2.5-2*b*).

In generale il calcolo di V_0 ed R_0 verrà eseguito mediante i principi di Kirchhoff.

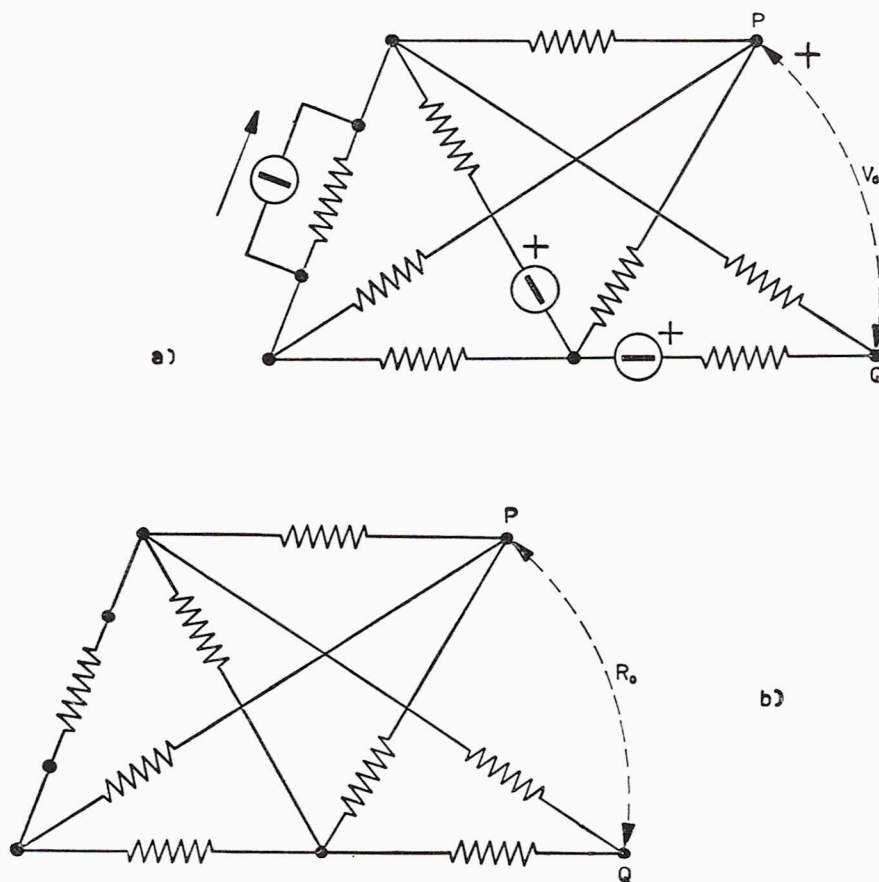



Fig. 2.5-2

Esercizio 2.51

Si trovino i parametri del generatore equivalente per un carico R_c il quale viene alimentato da un generatore di *f.e.m.* V_i e resistenza R_i, tramite un partitore di tensione, come appare in fig. 2.51-1.

Soluzione

Applicando il teorema di Thévenin fra i punti A e B della rete data (fig. 2.51-1) si ha che, in assenza del carico R_c, la *d.d.p.* fra detti punti (tensione a vuoto) ha l'espressione (vedi circuito di fig. 2.51-2*a*):

51-1.
$$V_0 = \frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2} V_i$$

ed è tale da rendere positivo il punto A rispetto a quello B; mentre

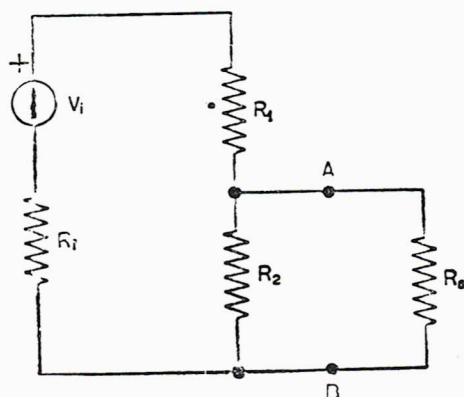



Fig. 2.51-1

la resistenza R_0, vista sempre dai punti A e B entro la rete con il generatore V_i in un cortocircuito e in assenza di carico (vedi circuito di fig. 2.51-2*b*), è data dalla seguente relazione:

2-51-2
$$R_0 = \frac{(R_i + R_1) R_2}{R_i + R_1 + R_2}.$$

Pertanto il carico R_c è come se fosse alimentato (vedi fig. 2.51-2*c*) da un generatore reale di tensione avente per *f.e.m.* il valore dato dalla 2.51-1 e per resistenza interna quello riportato in 2.51-2.

Esercizio 2.52

Si trovi con il principio di Thévenin il valore della corrente che circola nel carico R_c facente parte della rete elettrica riportata in fig. 2.52-1.

Soluzione

Applicando il principio di Thévenin fra i punti A e B, il circuito elettrico dato si tramuterà in quello assai più semplice di fig. 2.52-2.

Per la conoscenza di V_0, cioè della *d.d.p.* fra i punti A e B in assenza del ramo AB, basterà risolvere il circuito di fig. 2.52-3*a*. A tale

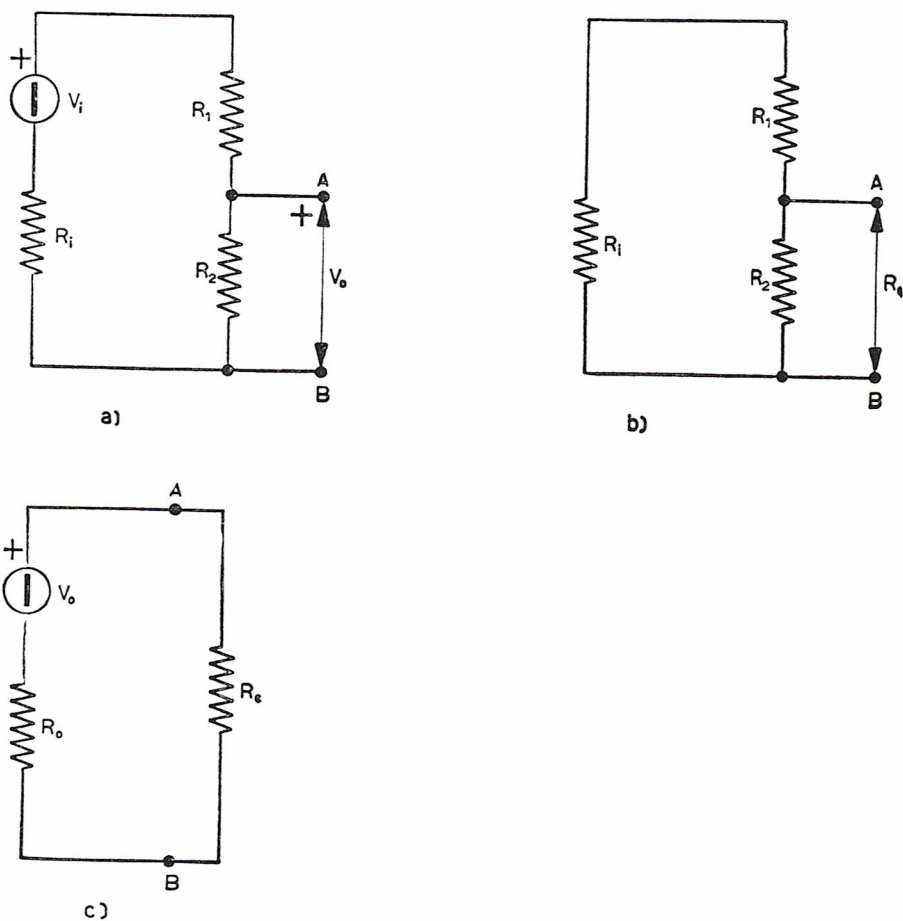



Fig. 2.51-2

fine la corrente I circolante in detta maglia si ricaverà dall'equazione (legge di Ohm):

$$V_{01} - V_{02} = (R_1 + R_2)I\,,$$

la quale, risolta rispetto ad I, dà appunto:

$$I = \frac{V_{01} - V_{02}}{R_1 + R_2} = \frac{10 - 6}{3 + 1} = 1\ \mathrm{A}\,.$$

La *d.d.p.* cercata fra i punti A e B varrà allora (fig. 2.52-3*a*):

$$V_0 = V_{AB} = V_{02} + R_2 I = 6 + 1 = 7 \text{ volt},$$

ed è tale quindi che A risulta positivo rispetto a B.

D'altronde la resistenza interna R_0 è quella che si ha fra i punti

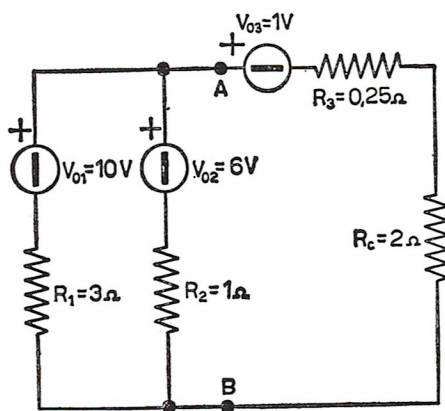



Fig. 2.52-1

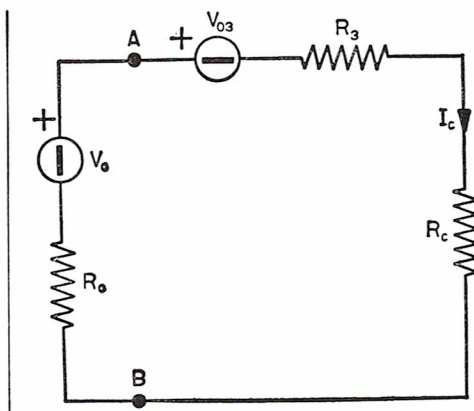



Fig. 2.52-2

A e B quando i generatori ideali di tensione V_{01} e V_{02} si considerano cortocircuitati (vedi circuito di fig. 2.52-3*b*). Detta resistenza R_0 ammonta perciò a:

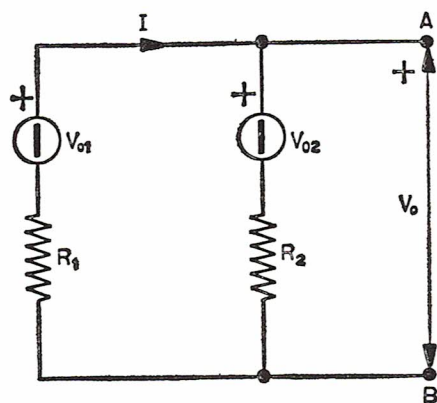
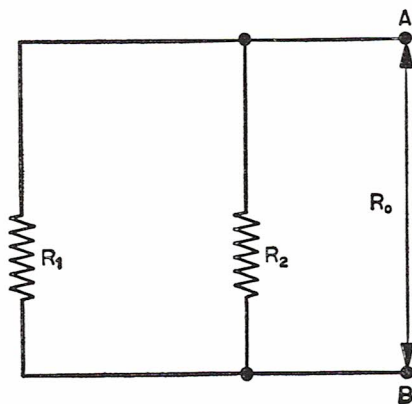



Fig. 2.52-3

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{3 + 1} = 0{,}75 \text{ ohm}.$$

Pertanto, con riferimento al circuito equivalente di fig. 2.52-2, ove

tutti gli elementi ora sono noti, si potrà scrivere la seguente equazione:

$$V_0 - V_{03} = (R_0 + R_3 + R_c)\, I_c\,,$$

per cui la corrente nel carico R_c varrà in definitiva:

$$I_c = \frac{V_0 - V_{03}}{R_0 + R_3 + R_c} = \frac{7 - 1}{0{,}75 + 0{,}25 + 2} = 2 \text{ ampere}\,.$$

Esercizio 2.53

Si calcoli mediante il principio di Thévenin il valore della corrente I_5 che circola nella resistenza R_5 della rete studiata nell'esercizio 2.31.

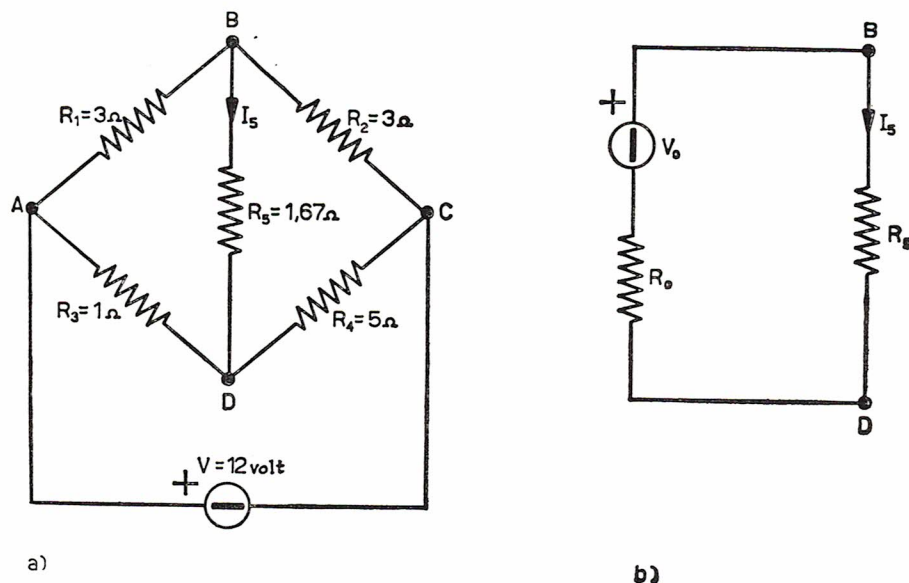



Fig. 2.53-1

Soluzione

La rete data, si veda la fig. 2.53-1*a*, può essere schematizzata per il ramo costituito dalla resistenza R_5 come in fig. 2.53-1*b*.

La *f.e.m.* V_0 è la tensione esistente fra i punti B e D a vuoto, cioè in assenza di R_5, e può essere calcolata facilmente non appena note le correnti nei due rami ABC e ADC (vedi fig. 2.53-2*a*). Queste correnti valgono d'altronde:

$$I_{AB} = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{12}{3+3} = 2\ \mathrm{A}\ ;\ I_{AD} = \frac{V}{R_3 + R_4} = \frac{12}{1+5} = 2\ \mathrm{A}\ ,$$

per cui la tensione esistente fra i punti B e D varrà:

$$V_0 = V_{BD} = -R_1 I_{AB} + R_3 I_{AD} = -6 + 2 = -4\ \text{volt}\ .$$

Per il calcolo di R_0 è necessario cortocircuitare invece il generatore di tensione V, come è stato fatto in fig. 2.53-2b, dopo di che la rete data,

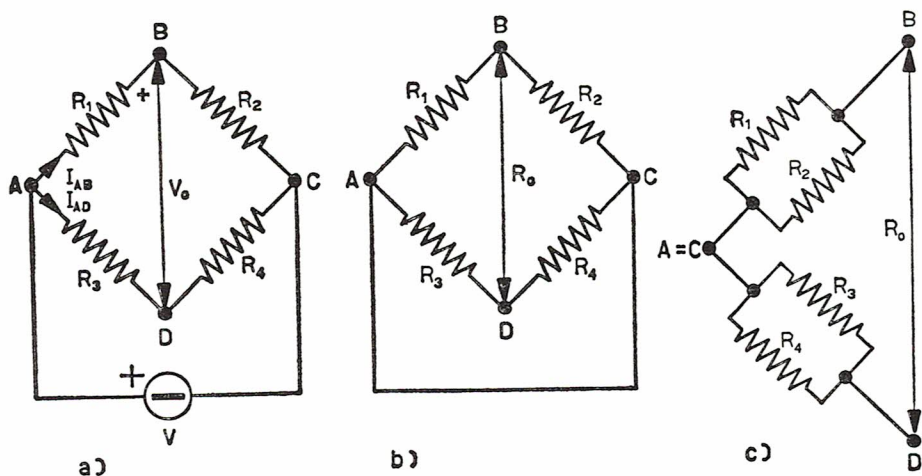



Fig. 2.53-2

vista dai punti B e D in assenza di R_5, si ridurrà al circuito del tutto equivalente di fig. 2.53-2c. La R_0 è la resistenza fra i punti B e D e ammonterà allora a:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{9}{6} + \frac{5}{6} = 2{,}33\ \text{ohm}\ .$$

La corrente nella resistenza R_5, poiché questa fa parte del circuito equivalente di fig. 2.53-1b, ove ora tutto è noto, varrà semplicemente:

$$I_5 = \frac{V_0}{R_0 + R_5} = \frac{-4}{2{,}33 + 1{,}67} = -1\ \text{ampere}\ .$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente nella resistenza R_5 va realmente dal punto D a quello B.

2.6 Principio di Norton

La tensione ai capi di un tronco, o la corrente circolante nello stesso tronco, facente parte di una rete elettrica attiva comunque complessa (vedi fig. 2.5-1*a*), può essere calcolata in altro modo precisamente considerando detto tronco alimentato da un solo generatore ideale di corrente I_0 avente in parallelo una resistenza R_0, come appare nel circuito di fig. 2.5-1*c*.

D'altra parte la corrente I_0 altro non è che la corrente circolante in un collegamento privo di resistenza che sostituisce il tronco dato (vedi fig. 2.6-1 ; I_0 è quindi la corrente di cortocircuito, perché la rete data

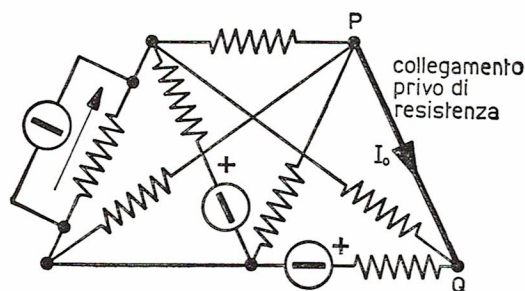



Fig. 2.6-1

viene posta in cortocircuito fra i punti P e Q) ; mentre per R_0 resta il significato dato nel precedente paragrafo, cioè di resistenza equivalente vista internamente alla rete dai punti P e Q (1).

In base al principio di Norton un qualsiasi tronco di rete (ad esempio la resistenza R_{PQ} della rete di fig. 2.5-1*a*) facente parte di una rete attiva comunque complessa può dunque essere considerato alimentato (fig. 2.5-1*c*) da un solo generatore reale di corrente, il cui valore di corrente I_0 è la corrente di cortocircuito sopra definita e la cui resistenza interna R_0 è la resistenza che la rete offre fra quei due punti ai quali fa capo il tronco considerato, quando questo è stato tolto.

Il generatore di corrente I_0 con la resistenza in parallelo R_0 è perciò *equivalente*, per il tronco PQ della rete data, a tutto il rimanente della rete stessa. Il teorema di Norton, così come quello di Thévenin, risolve un problema di equivalenza.

---

(1) I generatori ideali di tensione dovranno essere cortocircuitati e quelli ideali di corrente aperti.

Esercizio 2.61

Mediante il principio di Norton si trovi il valore che assume la corrente attraverso il carico R_c facente parte della rete di fig. 2.61-1*a*.

Soluzione

Il principio di Norton permette di schematizzare quella parte di rete a sinistra dei punti A e B con un unico generatore di corrente I_0

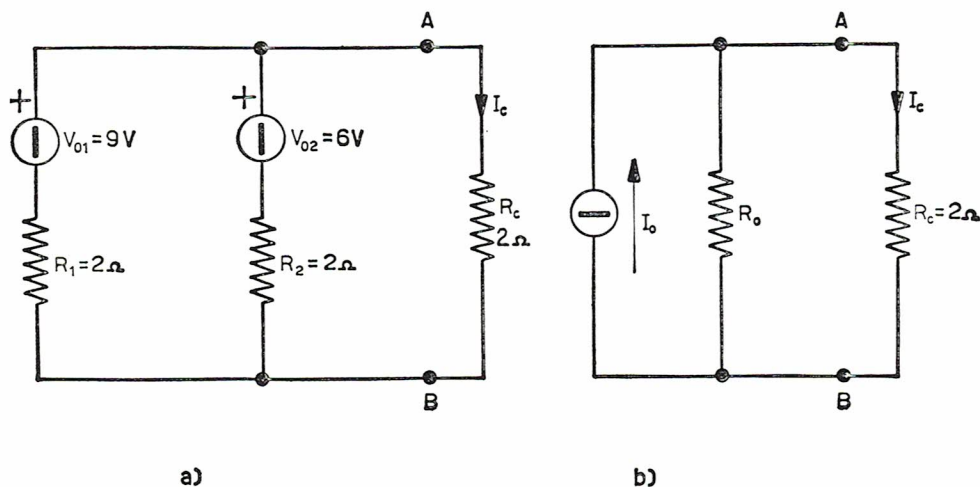



Fig. 2.61.1

avente in parallelo una resistenza R_0, come mostra la fig. 2.61-1*b*.

D'altronde la corrente I_0 si calcolerà tramite la rete riportata in fig. 2.61-2*a*. Per il principio della sovrapposizione degli effetti si vede subito che la corrente I_0, cioè la corrente che transita nel cortocircuito AB, vale [1]:

$$I_0 = \frac{V_{01}}{R_1} + \frac{V_{02}}{R_2} = 7{,}5 \text{ ampere}\,.$$

Invece la resistenza interna R_0 si calcolerà tenendo presente che i

---

[1] Infatti il generatore V_{01} contribuisce alla corrente circolante nel collegamento AB con $\frac{V_{01}}{R_1}$, poiché questa è la corrente che esso eroga e che d'altronde passa tutta nel conduttore AB, anche se questo è shuntato dalla resistenza R_2 e ciò perché il collegamento AB ha resistenza nulla (vedi fig. 2.61-3). Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per il generatore V_{02}.

generatori di tensione sono cortocircuitati, per cui la rete di calcolo diventa quella riportata in fig. 2.61-2*b*. Si ha quindi:

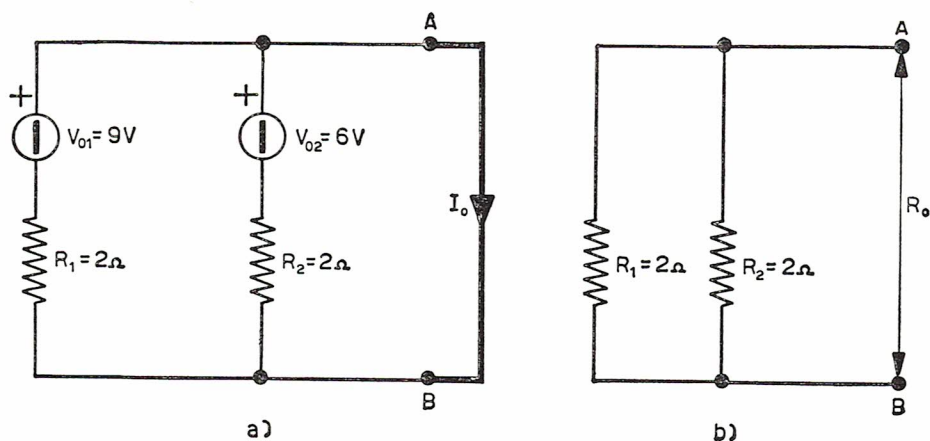



Fig. 2.61-2

$$R_0 = R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ ohm}.$$

Gli elementi che intervengono nel circuito equivalente di fig. 2.61-1*b*, sono dunque completamente noti. Sarà perciò, con riferimento a tale circuito:

$$I_c = I_0 \frac{R_0}{R_0 + R_c} = 7{,}5 \frac{1}{1+2} = 2{,}5 \text{ ampere}.$$

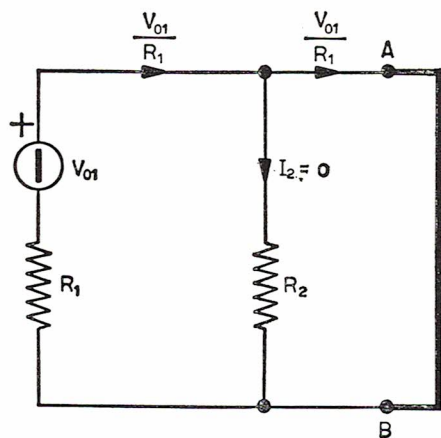



Fig. 2.61-3

Esercizio 2.62

Applicando il principio di Norton si trovi il generatore di corrente equivalente di due generatori reali di corrente collegati in serie (vedi fig. 2.62-1*a*).

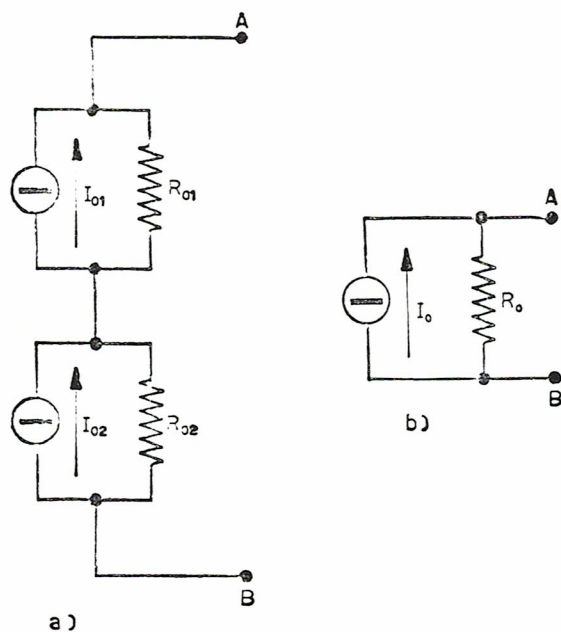



Fig. 2.62-1

Soluzione

Il generatore equivalente dei due generatori collegati in serie dati in fig. 2.62-1*a* appare in fig. 2.62-1*b*.

Per il calcolo di I_0 basterà cortocircuitare A con B, come è stato fatto in fig. 2.62-2*a*, e calcolare la corrente I_0 ad esempio mediante il principio della sovrapposizione degli effetti. Nel collegamento AB circolerà allora, per effetto del primo generatore (il secondo sarà aperto, cioè manca il generatore ideale di corrente I_{02}) una corrente del valore:

$$I_{01} \frac{R_{01}}{R_{01} + R_{02}};$$

mentre per effetto del secondo generatore, quando il primo è aperto, cioè tolto I_{01}, circolerà nel collegamento AB la corrente:

$$I_{02} \frac{R_{02}}{R_{01} + R_{02}}.$$

La corrente di cortocircuito I_0 varrà perciò:

$$I_0 = I_{01} \frac{R_{01}}{R_{01} + R_{02}} + I_{02} \frac{R_{02}}{R_{01} + R_{02}}.$$

La resistenza interna R_0 ammonterà d'altronde a $R_{01} + R_{02}$, poiché

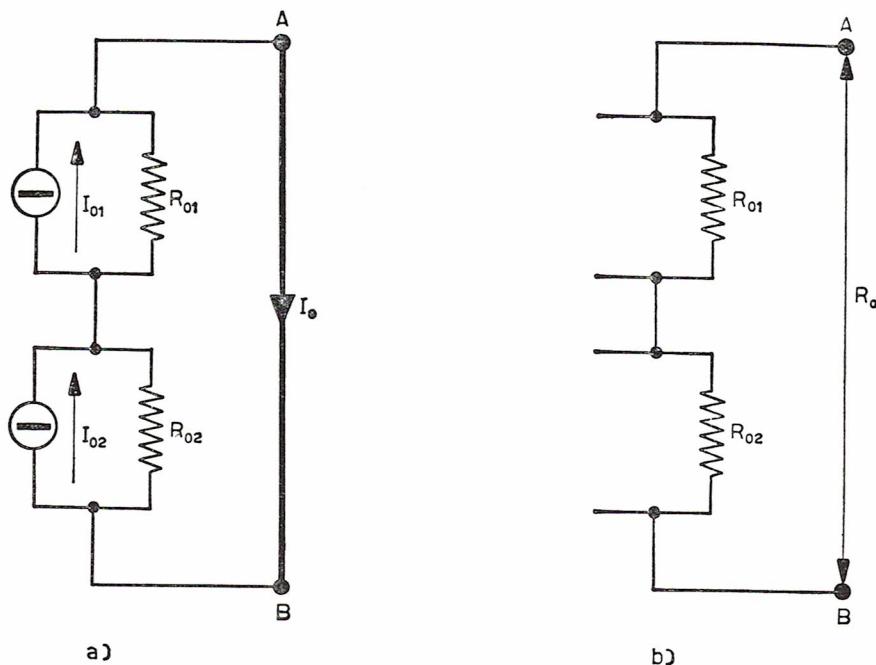



Fig. 2.62-2

basterà pensare tolti entrambi i generatori ideali di corrente I_{01} e I_{02}, come è stato riportato in fig. 2.62-2*b*.

Esercizio 2.63

Applicando il principio di Norton si riduca ad un unico generatore di corrente i tre generatori di corrente collegati fra di loro in parallelo riportati in fig. 2.63-1*a*.

Soluzione

Si tratta ovviamente di calcolare l'espressione di I_0 ed R_0 del generatore equivalente che appare in fig. 2.63-1*b*. A tale scopo si procederà come segue.

a) Calcolo di I_0. La corrente I_0 è la corrente di cortocircuito che circola nel collegamento privo di resistenza AB (vedi fig. 2.63-2*a*).

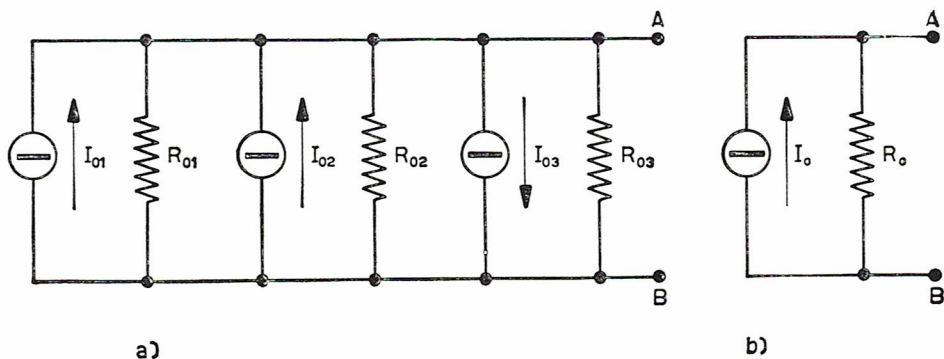



Fig. 2.63-1

Tale corrente, per il principio della sovrapposizione degli effetti, vale semplicemente:

$$I_0 = I_{01} + I_{02} - I_{03}\,.$$

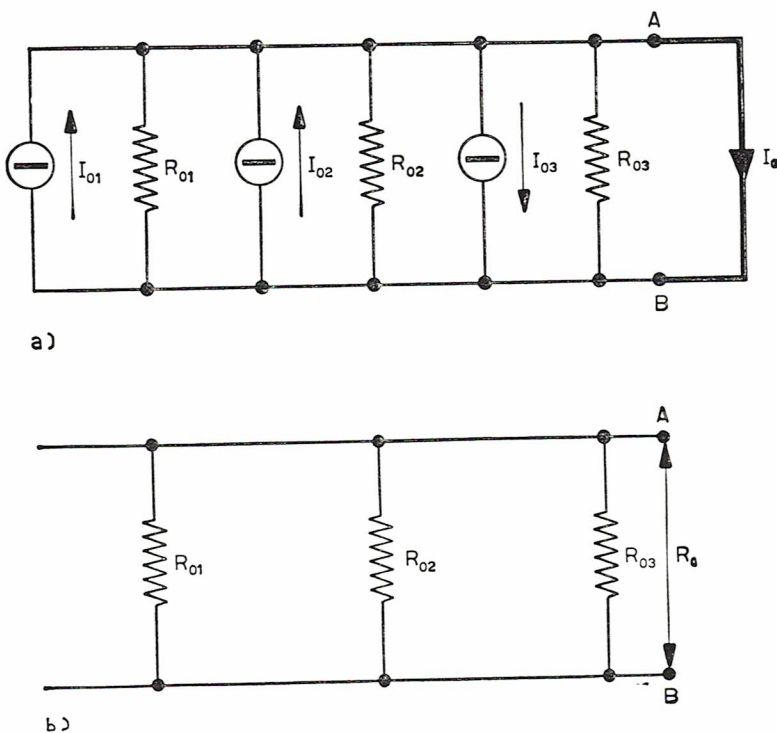



Fig. 2.63-2

b) Calcolo di R_0. La resistenza R_0 è l'equivalente delle tre resistenze in parallelo dei generatori, poiché per tale calcolo infatti i gene-

ratori ideali di corrente che appaiono nella rete data devono essere tolti (vedi fig. 2.63-2*b*). Perciò R_0 varrà:

$$R_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{01}} + \dfrac{1}{R_{02}} + \dfrac{1}{R_{03}}}.$$

N. B. Più generatori reali di corrente in parallelo equivalgono quindi ad un unico generatore reale la cui corrente I_0 è la somma algebrica delle correnti dei singoli generatori e la cui resistenza interna R_0 vale il parallelo delle resistenze dei singoli generatori.

2.7 Applicazioni pratiche del teorema del generatore equivalente

I principi di Thévenin e di Norton, che rappresentano due aspetti diversi del teorema del generatore equivalente (Helmholtz), trovano, tra l'altro, un' importante applicazione nella soluzione delle reti elettriche (soprattutto quelle a struttura semplice) quando non s' intenda applicare subito i classici metodi che scendono dai principi di Kirchhoff e ciò allo scopo di semplificare i calcoli nella risoluzione numerica.

Si debba risolvere ad esempio la rete elettrica riportata in fig. 2.7-1*a*. Si potrà incominciare ad applicare il principio di Thévenin fra i punti *M* ed *O* allo scopo di schematizzare quella parte di rete che sta a sinistra di detti punti. Si arriva così al circuito equivalente di fig. 2.7-1*b* il quale ora potrà essere risolto facilmente mediante i principi di Kirchhoff o anche mediante il principio di Millman, di cui si dirà nel paragrafo seguente.

Naturalmente si poteva semplificare la rete data in fig. 2.7-1*a* applicando il teorema di Thévenin fra i punti *N* ed *O*, anziché fra i punti *M* ed *O*, per quella parte di rete che sta a destra di detti punti *N* ed *O*. Si arriva così allora alla rete equivalente riportata in fig. 2.7-1*c*, dopoché la soluzione procederà come per la rete di fig. 2.7-1*b*.

Ma per la soluzione della rete di fig. 2.7-1*a* può risultare vantaggioso applicare il principio di Thévenin anche fra i punti *P* e *Q*. Questo caso verrà svolto nell'esercizio 2.71.

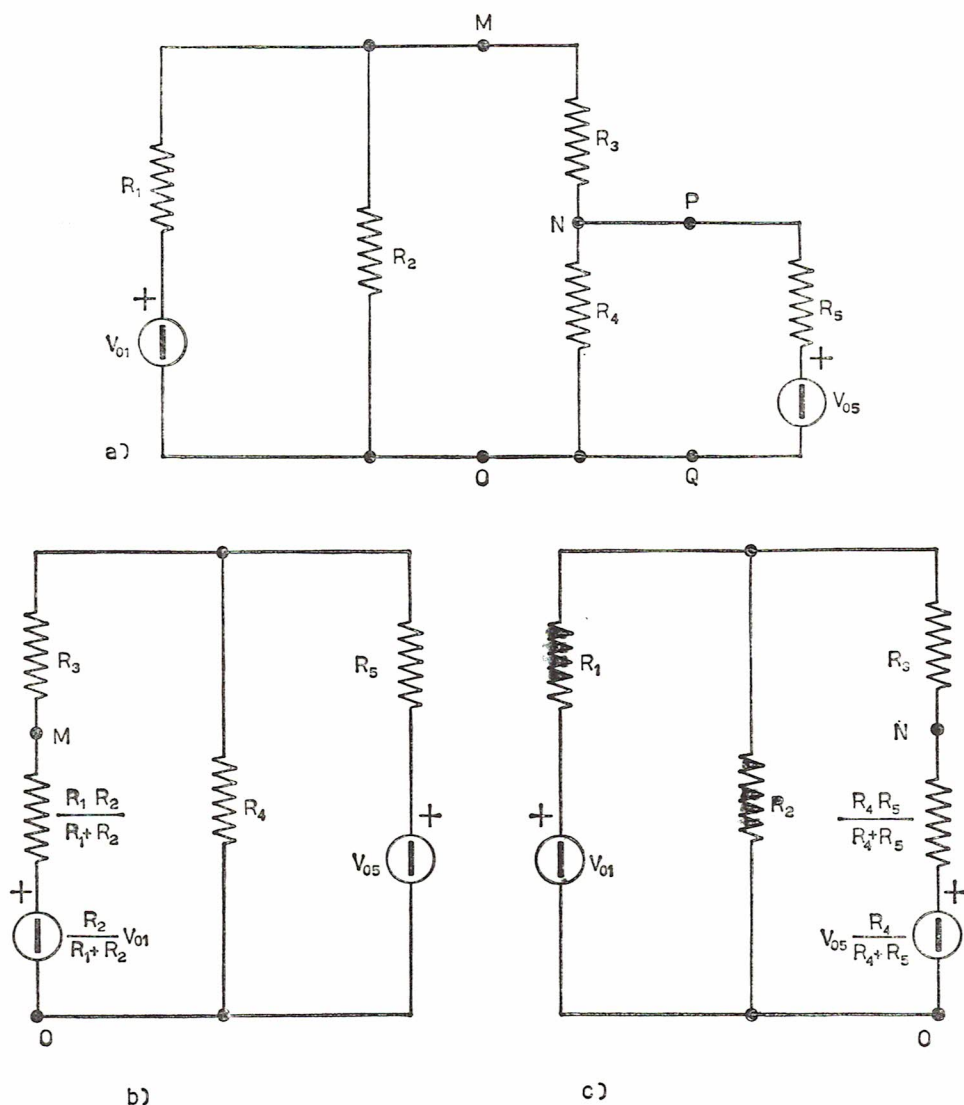



Fig. 2.7-1

Si ricordi comunque che il modo col quale in pratica si procede per rendere più semplice la rete elettrica assegnata dipende quasi sempre da quelle che sono le immediate necessità riguardo la conoscenza del valore assunto o dalla corrente in quel certo particolare ramo della rete elettrica data o dalla tensione fra due certi particolari punti della rete stessa.

In questo caso è chiaro che si dovrà semplificare quella parte di rete che *non contiene* il ramo o i rami interessati.

Da ultimo si vuole richiamare l'attenzione sul fatto importante che è proprio in base al teorema del generatore equivalente, nei suoi due diversi aspetti rappresentati dal principio di Thévenin e di Norton, che un generatore reale di energia qualsiasi, purché lineare, può essere schematizzato indifferentemente come generatore reale di tensione o di corrente [1]. Vuol dire che nel primo caso si sarà fatto ricorso al principio di Thévenin, nel secondo caso al principio di Norton. D'altronde sarà sempre possibile passare dalla schematizzazione dell' uno (fig. 2.5-1*b*) a quella dell'altro (fig. 2.5-1*c*) ricordando semplicemente che fra tensione a vuoto V_0, corrente di cortocircuito I_0 e resistenza interna R_0 intercorre la semplice relazione $V_0 = R_0 I_0$.

Esercizio 2.71

Si trovi il valore della corrente erogata dal generatore V_{05} facente parte della rete riportata in fig. 2.71-1.

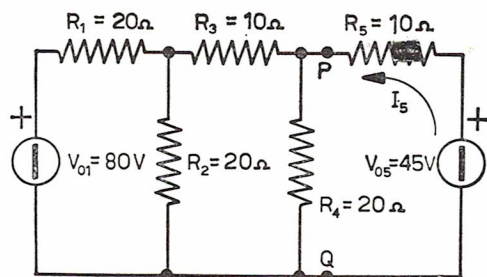



Fig. 2.71-1

Soluzione

La rete elettrica di fig. 2.71-1 è strutturalmente identica a quella riportata in fig. 2.7-1*a*. Poiché si chiede la conoscenza della sola corrente I_5, converrà applicare il teorema di Thévenin fra i punti P e Q, per arrivare così ad una struttura *serie* (vedi fig. 2.71-2*c*). A questo propo-

---

[1] La differenza consiste solamente nel fatto che col generatore di tensione (Thévenin) si ha una struttura *serie*, col generatore di corrente (Norton) si ha una struttura *parallelo*. In conclusione sarà il caso pratico a consigliare l'adozione della struttura *serie* (esercizio 2.71) o *parallelo* (esercizio 2.72).

sito la tensione V_0, la quale appare fra i punti P e Q a vuoto, cioè quando è stato tolto alla rete data il ramo 5°, vale (vedi fig. 2.71-2*a*):

$$V_0 = V_{01} \frac{R_2 R_4}{\left[R_1 + \dfrac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}\right](R_2 + R_3 + R_4)} =$$

$$= 80 \frac{400}{(20 + 12)\,50} = 20 \text{ volt};$$

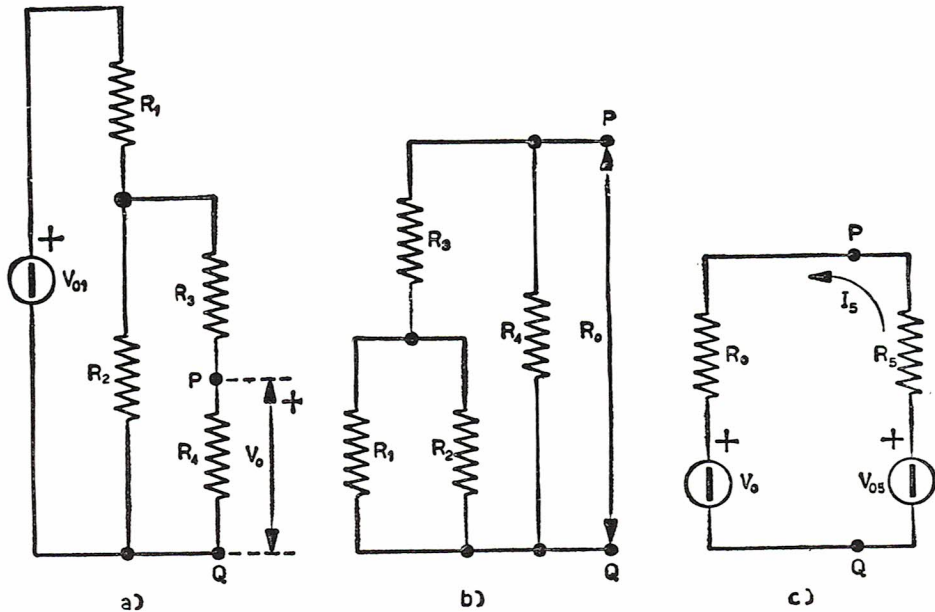



Fig. 2.71-2

mentre la resistenza interna R_0 si calcolerà, una volta cortocircuitato il generatore ideale di tensione V_{01}, come il parallelo fra la resistenza R_4 e la resistenza R_3 avente in serie a sua volta il parallelo delle due resistenze R_1 ed R_2 (vedi fig. 2.71-2*b*). Risulta quindi:

$$R_0 = \frac{R_4\left(R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)}{R_4 + R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{20(10 + 10)}{20 + 10 + 10} = 10 \text{ ohm}.$$

La corrente I_5 varrà perciò (fig. 2.71-2*c*):

$$I_5 = \frac{V_{05} - V_0}{R_0 + R_5} = \frac{45 - 20}{10 + 10} = 1{,}25 \text{ ampere}.$$

Esercizio 2.72

Si trovi la tensione ai capi del carico R_c facente parte della rete riportata in fig. 2.72-1*a* (rete già studiata nell'esercizio 1.594).

Soluzione

Mediante il principio di Norton si trasformino i due generatori reali di tensione in due generatori reali di corrente. D'altronde, poiché i due generatori di tensione sono in parallelo, anche i due generatori di corrente risulteranno in parallelo. La rete di fig. 2.72-1*a* si ridurrà perciò

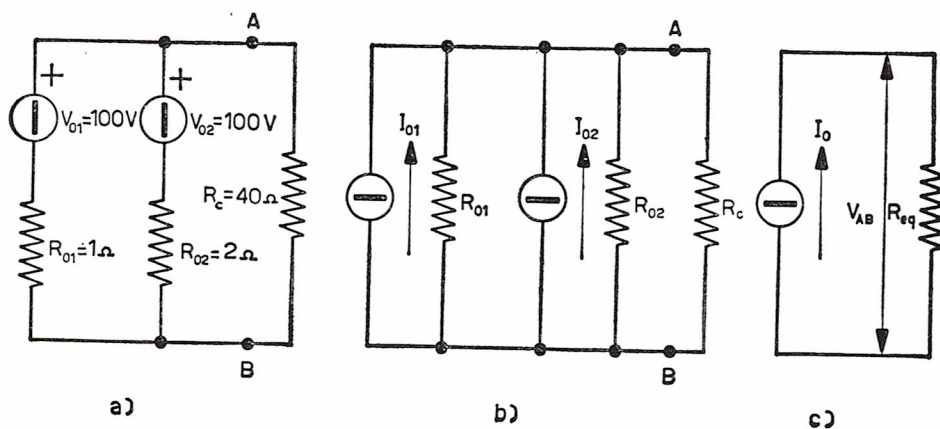



Fig. 2.72-1

a quella di fig. 2.72-1*b*, dove ora tutti gli elementi sono in parallelo. La comodità del generatore di corrente è quindi evidente.

Per quanto già visto nell'esercizio 2.63, quest' ultima rete potrà semplificarsi in quella di fig. 2.72-1*c*, dove:

$$I_0 = I_{01} + I_{02} = \frac{V_{01}}{R_{01}} + \frac{V_{02}}{R_{02}} = 100 + 50 = 150 \text{ ampere}$$

e

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_{02}} + \frac{1}{R_c} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{40},$$

da cui:

$$R_{eq} = 0{,}657 \text{ ohm}.$$

In definitiva, poiché la tensione ai capi di R_c è la *d.d.p.* fra i punti A e B, ma anche la tensione ai capi di R_{eq}, si ha che la tensione richiesta ammonta a:

$$V_{AB} = R_{eq} I_0 = 0{,}657 \cdot 150 = 98{,}4 \text{ volt}.$$

2.8 Principio di Millman

Questo principio è assai utile quando la rete elettrica presenta due soli nodi, quando cioè la rete è costituita da tanti rami in parallelo (vedi fig. 2.8-1) ciascuno dei quali è sempre schematizzabile, per il prin-

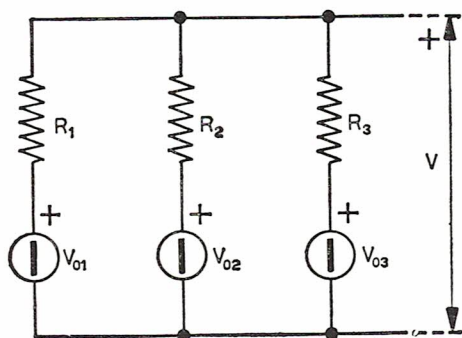



Fig. 2.8-1

cipio di Thévenin, con un solo generatore ideale di tensione avente in serie una sola resistenza. In questo caso la tensione V esistente fra i due nodi viene determinata molto semplicemente dalla seguente formula:

$$V = \frac{G_1 V_{01} + G_2 V_{02} + G_3 V_{03} + \dots}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots}, \qquad (2.8\text{-}1)$$

che esprime appunto il principio di Millman [1].

---

[1] Questo principio si ottiene applicando in sostanza il metodo dei potenziali ai nodi alle reti con due nodi (vedi quanto esposto alla fine del paragrafo 2.3).

È facile vedere che il numeratore di detta formula rappresenta la somma delle correnti di cortocircuito di ciascun ramo, cioè la corrente di cortocircuito di tutta la rete. Infatti la rete data in fig. 2.8-1 può essere trasformata, applicando il principio di Norton a ciascun ramo,

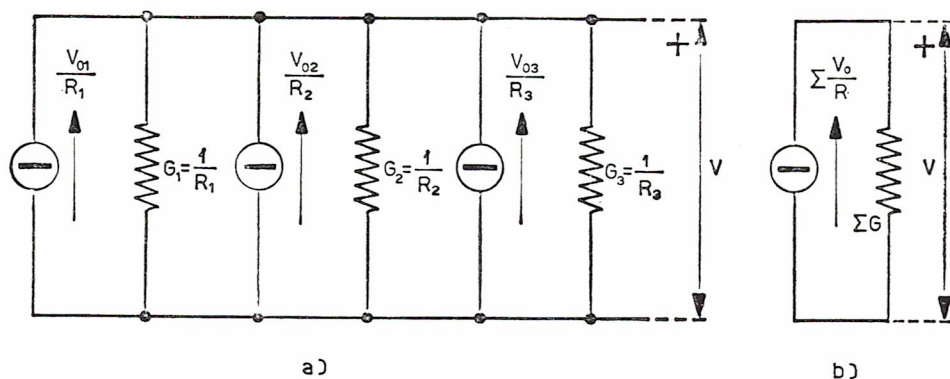



Fig. 2.8-2

in quella di fig. 2.8-2*a*, e quindi in quella di fig. 2.8-2*b*, dalla quale è facile ricavare:

2.8-2
$$V = \frac{1}{\Sigma G} \Sigma \frac{V_0}{R},$$

e, poiché $\frac{V_0}{R} = G\,V_0$, anche:

2.8-2′
$$V = \frac{1}{\Sigma G} \Sigma\, G\, V_0;$$

formula che, se sviluppata, coincide con quella data in 2.8-1.

Si noti da ultimo come la formula 2.8-1 valga anche nel caso in cui alcuni rami siano costituiti da sole resistenze: in tale evenienza si porrà naturalmente a zero la *f.e.m.* V_0 dei corrispondenti rami.

Esercizio 2.81

Si risolva l'esercizio 2.72 mediante il principio di Millman.

Soluzione

Applicando la formula 2.8-1 si ha immediatamente che:

$$V_{AB} = \frac{\dfrac{V_{01}}{R_{01}} + \dfrac{V_{02}}{R_{02}}}{\dfrac{1}{R_{01}} + \dfrac{1}{R_{02}} + \dfrac{1}{R_c}} = \frac{100 + 50}{1 + 0{,}50 + 0{,}025} = 98{,}4 \text{ volt} .$$

Non vi è dubbio che, per questo particolare tipo di rete e per la particolare grandezza incognita da calcolare, il principio di Millman si è dimostrato di una grande semplicità.

Esercizio 2.82

Si risolva l'esercizio 1.593 mediante il principio di Millman.

Soluzione

La tensione fra i nodi A e B, cioè la tensione V_{AB}, vale, applicando

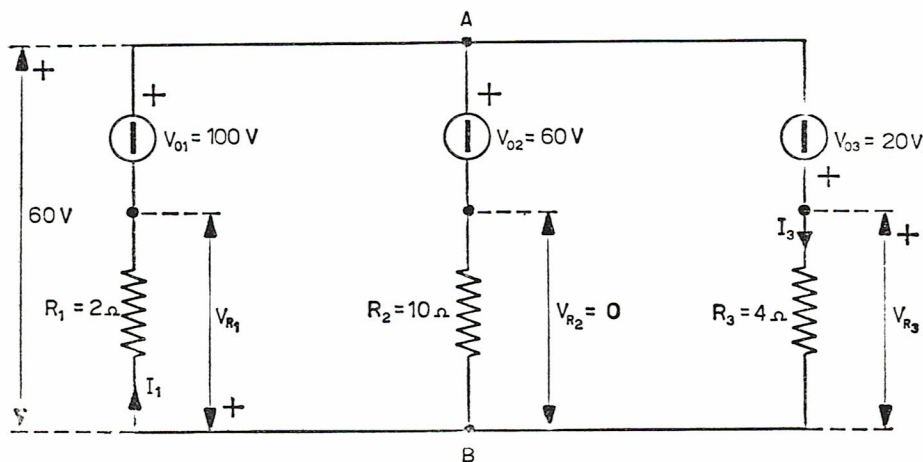



Fig. 2.82-1

direttamente la formula data in 2.8-1:

$$V_{AB} = \frac{100\dfrac{1}{2} + 60\,\dfrac{1}{10} - 20\,\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{4}} = \frac{51}{0{,}85} = 60 \text{ volt.}$$

Nota questa tensione, conosciuta cioè la *d.d.p.* ai capi di ciascun ramo, sarà pure nota la caduta di tensione che ciascuna corrente determinerà passando nella propria resistenza.

Per il primo ramo si ha infatti $V_{R1} = 40$ volt, con la polarità segnata in fig. 2.82-1, quindi risulterà:

$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{40}{2} = 20 \text{ ampere},$$

col verso segnato in figura, cioè tale da determinare la caduta di tensione con la polarità tracciata.

Per il secondo ramo $V_{R2} = 0$, per cui si deduce immediatamente che la corrente I_2 è nulla.

Per il terzo ramo $V_{R3} = 80$ volt, con la polarità segnata in figura 2.82-1, per cui:

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{80}{4} = 20 \text{ ampere},$$

col verso segnato in figura.

Come si vede, in base al principio di Millman, la rete è stata completamente risolta in maniera assai facile e spedita.

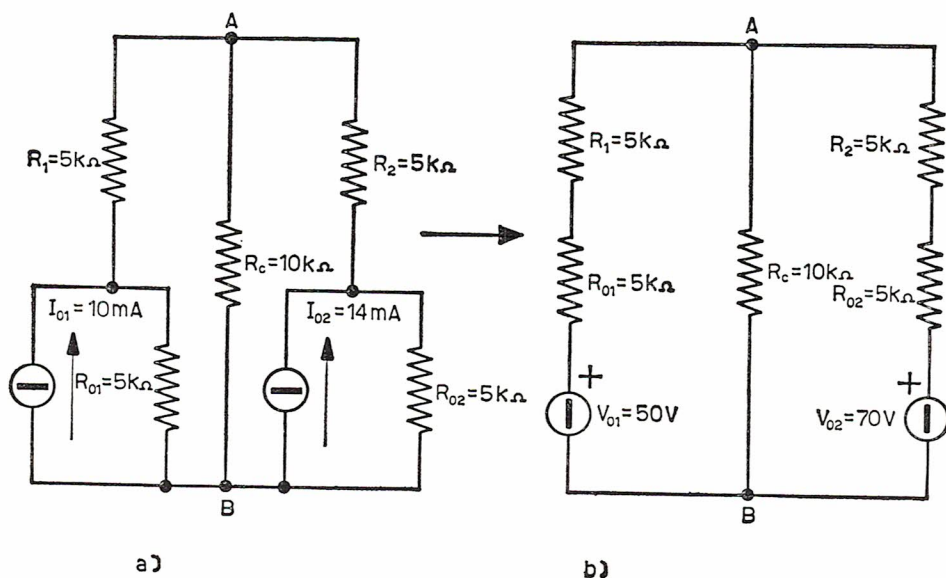



Fig. 2.83-1

Esercizio 2.83

Mediante il principio di Millman si trovi la *d.d.p.* fra i punti A e B della rete studiata nell'esercizio 2.42.

Soluzione

Occorre trasformare i due generatori di corrente, che appaiono nella rete data (vedi fig. 2.83-1*a*), nei corrispondenti generatori di tensione. Si otterrà allora, si veda la fig. 2.83-1*b*, una rete elettrica avente due soli nodi, cioè appunto tale da poter essere trattata col principio di Millman.

Pertanto la tensione cercata varrà:

$$V_{AB} = \frac{V_{01}\dfrac{1}{R_{01}+R_1} + V_{02}\dfrac{1}{R_{02}+R_2}}{\dfrac{1}{R_{01}+R_1} + \dfrac{1}{R_c} + \dfrac{1}{R_{02}+R_2}} = \frac{50\cdot 10^{-4} + 70\cdot 10^{-4}}{10^{-4}+10^{-4}+10^{-4}} = 40 \text{ volt}.$$

2.9 Principio di sostituzione e di compensazione

In una rete elettrica è sempre possibile sostituire una resistenza R_n percorsa dalla corrente I_n con una *f.e.m.* di valore R_nI_n, la cui polarità positiva coincide con la polarità positiva presentata dalla caduta

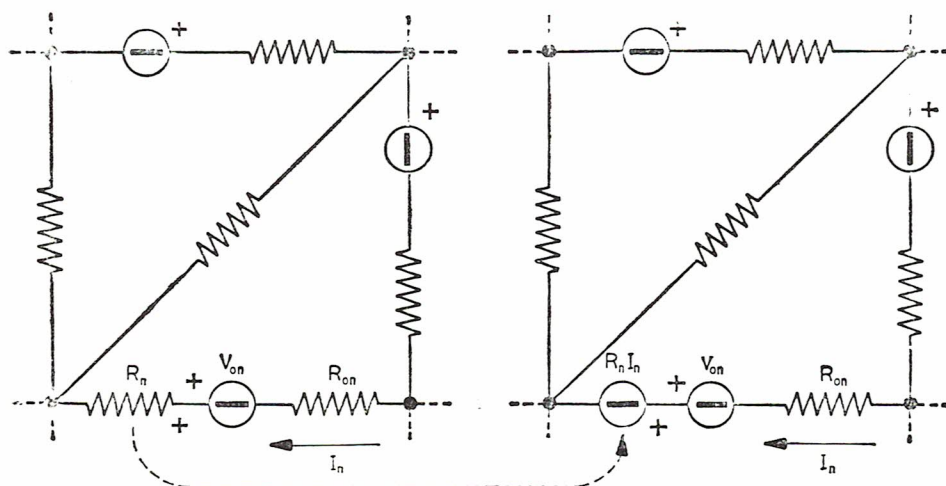



Fig. 2.9-1

di tensione della resistenza stessa, e viceversa. Questo è il principio di sostituzione (vedi fig. 2.9-1).

Quanto ora esposto trova un'utile applicazione quando in una rete elettrica data, sede quindi di un regime di correnti ben definite, la resistenza R_n di un ramo ennesimo qualsiasi viene a variare di ΔR_n. In tal caso le correnti nei vari rami subiranno delle variazioni, variazioni che si potranno calcolare assai facilmente ritenendole o provocate da una *f.e.m.* eguale a $\Delta R_n I'_n$ agente in serie alla R_n lasciata inalterata nel suo valore, essendo I'_n la corrente circolante nel ramo ennesimo dopo aver effettuato la variazione ΔR_n, oppure provocata da una *f.e.m.* eguale a $\Delta R_n I_n$ (1) agente in serie alla $R_n + \Delta R_n$, cioè alla resistenza nel suo nuovo valore, essendo I_n la corrente circolante nel ramo ennesimo prima di aver effettuato la variazione ΔR_n (2). Questo è il principio di compensazione.

Dette variazioni di corrente si calcoleranno naturalmente con i generatori ideali di tensione in cortocircuito e con i generatori ideali di corrente aperti. Si tenga presente ancora che la variazione ΔR_n può essere qualsiasi, cioè non occorre che essa sia di piccola entità.

I due esercizi che seguono serviranno a chiarire e ad illustrare meglio quanto ora è stato esposto.

Esercizio 2.91

Nel circuito di fig. 2.91-1*a* la resistenza di carico R_c del valore di 7 ohm subisce un incremento di 2 ohm. Si trovi la variazione subìta dalla corrente di carico I, applicando il principio di compensazione.

Soluzione

1° *modo*. Il valore assunto dalla corrente nella nuova situazione, si veda il circuito di fig. 2.91-1*b*, vale:

$$I' = I + \Delta I = \frac{V_0}{R_0 + R_c + \Delta R_c} = \frac{20}{1 + 7 + 2} = 2 \text{ ampere} .$$

Il circuito da cui ricavare il valore della variazione di corrente ΔI è d'altronde quello di fig. 2.91-1*c* per il quale la legge di Ohm porta a scrivere:

$$\Delta R_c I' = -(R_0 + R_c)\,\Delta I ,$$

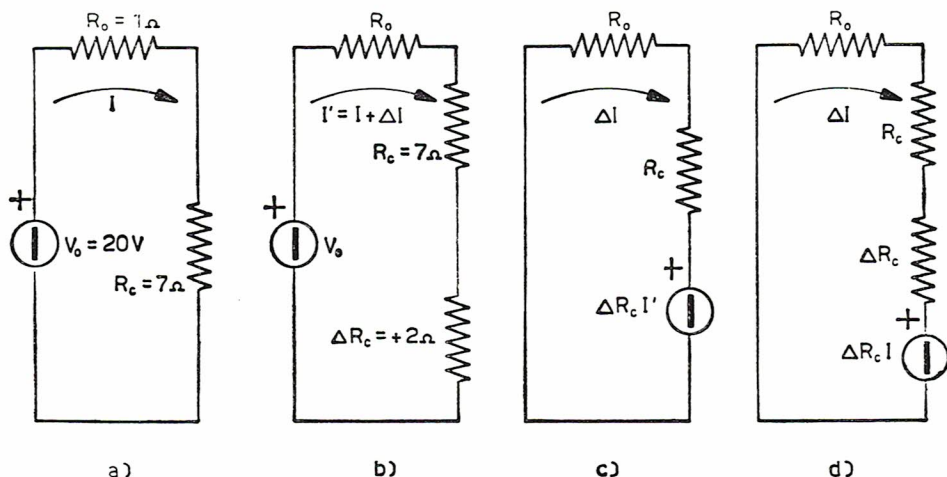
---

(1) La polarità di detta *f.e.m.* è concorde con la polarità presentata dalla caduta di tensione dovuta alla corrente I_n in tale ramo. Naturalmente se l'incremento ΔR_n è positivo la *f.e.m.* $\Delta R_n I_n$ risulta effettivamente positiva, viceversa se l'incremento ΔR_n è negativo.

(2) Si noti che questa seconda definizione del principio di compensazione è assai più comoda ai fini pratici del calcolo.

cioè risolvendo rispetto a ΔI:

$$\Delta I = -\frac{\Delta R_c I'}{R_0 + R_c} = -\frac{2 \cdot 2}{1+7} = -0{,}50 \text{ ampere}.$$

Il segno meno sta ad indicare che si tratta in realtà di un decremento di corrente.

F. 2.91-1

2° *modo.* Il valore assunto dalla corrente prima della variazione subìta dalla resistenza di carico vale, vedi circuito di fig. 2.91-1*a*:

$$I = \frac{V_0}{R_0 + R_c} = \frac{20}{1+7} = 2{,}50 \text{ ampere}.$$

D'altronde il circuito da cui ricavare il valore della variazione di corrente ΔI è quello di fig. 2.91-1*d*, per il quale la legge di Ohm fornisce la seguente equazione:

$$\Delta R_c I = -(R_0 + R_c + \Delta R_c)\,\Delta I.$$

Si ottiene così:

$$\Delta I = -\frac{\Delta R_c I}{R_0 + R_c + \Delta R_c} = -\frac{2 \cdot 2{,}50}{1+7+2} = -0{,}50 \text{ ampere}.$$

Naturalmente la variazione di corrente che si è avuta nel circuito è stata negativa, poiché ovviamente ad un aumento di resistenza di

carico deve corrispondere, per il circuito dato, una diminuzione di corrente nel carico stesso.

Esercizio 2.92

Si trovi la variazione che subisce la corrente nella resistenza R_3, facente parte della rete di fig. 2.92-1, in seguito alla chiusura dell' interruttore T.

Soluzione

Si osservi che la chiusura dell' interruttore T porta ad una diminuzione del valore della resistenza complessiva del terzo ramo della rete, precisamente tale diminuzione è del 50 %. Pertanto la corrente I_3 in

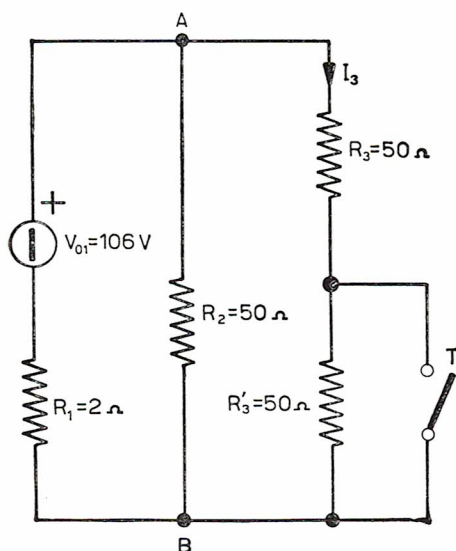



Fig. 2.92-1

detto ramo aumenterà (non però del 100 %) : per il calcolo dell'aumento ΔI_3 è possibile ricorrere al principio di compensazione.

Come si è detto nel testo, le variazioni di corrente che sorgono in conseguenza dell'avvenuta variazione di resistenza in un ramo (nel nostro caso $\Delta R_n = - R'_3$) possono essere studiate a mezzo di una rete, si veda la fig. 2.92-2, che deriva da quella data dopo aver soppresso (cortocircuitato) il generatore di tensione V_{01} e dopo aver inserita in serie alla resistenza $R_3 + R'_3 - R'_3$ (in definitiva resta solamente la resistenza R_3) una *f.e.m.* V di valore $- R'_3 I_3$, essendo I_3 il valore di corrente nella resistenza R'_3 prima della chiusura dell' interruttore. Naturalmente detta *f.e.m.* V risulta negativa poiché la variazione di resistenza è stata negativa.

È necessario procedere quindi, come prima cosa, al calcolo di questa corrente I_3, la quale si potrà trovare agevolmente ad esempio per mezzo del principio di Millman applicato alla rete di fig. 2.92-1. Sarà:

$$I_3 = \frac{\dfrac{V_{01}}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3 + R_3'}} \frac{1}{R_3 + R_3'} = \frac{53}{0,50 + 0,02 + 0,01} \frac{1}{100} = 1\,\text{ampere}.$$

Pertanto il valore della tensione del generatore V da porsi in serie alla R_3 varrà:

$$V = -R_3' I_3 = -50\ \text{volt}.$$

D'altronde per il calcolo della corrente ΔI_3 si farà uso del circuito di fig. 2.92-2. Si deduce allora che:

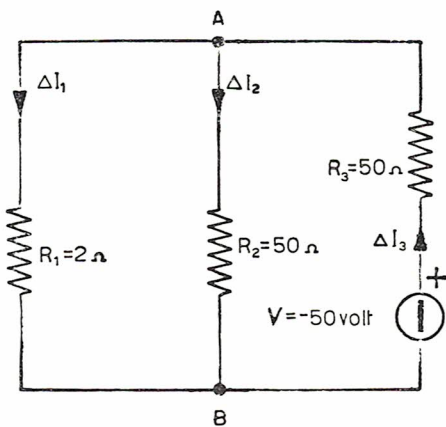



Fig. 2.92-2

$$\Delta I_3 = \frac{V}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{-50}{50 + \dfrac{100}{52}} = -0,963\,\text{ampere}.$$

Questo valore rappresenta il 96,3 % della corrente I_3 prima della chiusura del tasto.

In definitiva nella resistenza R_3, con R_3' in cortocircuito, verrà a circolare una corrente il cui ammontare è di 1,963 ampere.

2.10 Principio di reciprocità

È ovvio che in una rete elettrica qualsiasi passiva una forza elettromotrice V_p, che abbia ad agire in un ramo, ad esempio quello p-esimo, produrrà in un altro ramo, ad esempio quello q-esimo, una corrente I_q (vedi fig. 2.10-1*a*). Ora il principio di reciprocità assicura che se tolta la

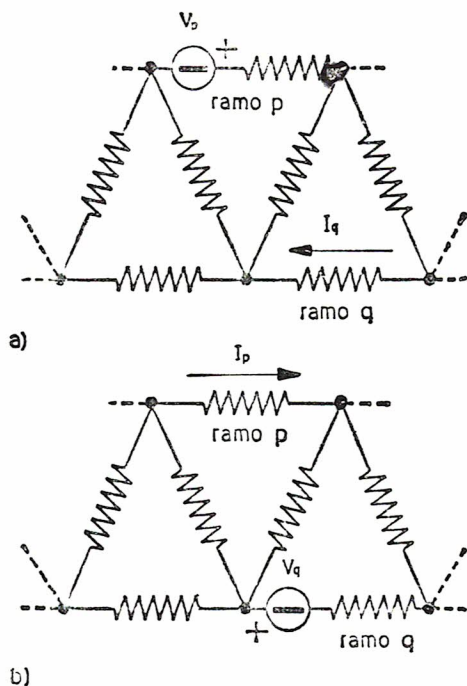



Fig. 2.10-1

V_p si porta una *f.e.m.* V_q ad agire in quest' ultimo ramo, cioè in quello q-esimo (vedi fig. 2.10-1*b*), essa provocherà nel primo, cioè in quello p-esimo, là dove cioè era la *f.e.m.* V_p, una corrente I_p il cui valore è legato a quello che aveva precedentemente la corrente I_q dalla seguente relazione:

2.10-1
$$\frac{I_p}{I_q} = \frac{V_q}{V_p} \ (^1) .$$

Si noti d'altronde che, per poter stabilire il verso della corrente I_p dovuta alla *f.e.m.* V_q agente nel ramo q-esimo, occorre conoscere il verso

---

(1) Nel caso in cui $V_p = V_q = V$ si ha che le due correnti I_p e I_q sono eguali fra di loro.

della corrente I_q ed applicare ad esempio la seguente regola: il verso della corrente I_p coincide con il verso della *f.e.m.* V_p (cioè dal — al + internamente), quando quest'ultima era presente nel ramo p-esimo, se però la *f.e.m.* V_q è stata fatta agire nel ramo q-esimo in modo tale che la precedente corrente I_q coinciderebbe con il verso di detta *f.e.m.* V_q ([2]). Qualora non sia verificata quest' ultima condizione il verso della corrente I_p sarà contrario a quello precisato più sopra.

Se la rete elettrica fosse attiva, anziché passiva, quanto ora è stato esposto risulta valido a proposito degli incrementi subìti dalla corrente.

Esercizio 2.101

Il regime elettrico della rete riportata in fig. 2.101-1 è noto completamente. Se ora in questa rete il generatore V_1 viene portato ad agire

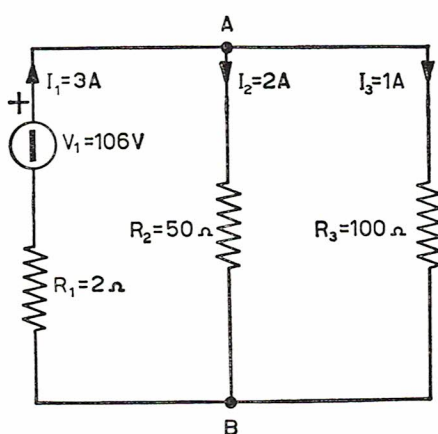
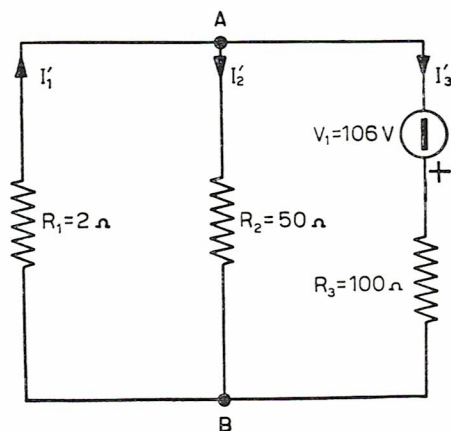



Fig. 2.101-1 *Fig. 2.101-2*

nel ramo contenente la resistenza R_3, come è stato riportato in figura 2.101-2, la corrente nella resistenza R_1 avrà a variare? e di quanto?

Soluzione

Applicando il principio di reciprocità con la regola data nel testo la risposta è assai facile: la nuova corrente in R_1 avrà lo stesso verso della corrente I_1 (cioè il verso che va dal — al + del generatore V_1 quando era presente nel primo ramo) e lo stesso valore della corrente che si aveva, prima dello spostamento del generatore, nella resistenza R_3; quindi

([2]) Questo è il caso del circuito riportato in fig. 2.10-1.

$I'_1 = I_3$, per cui detta corrente ammonterà ad 1 ampere. La variazione è stata dunque di 2 ampere.

Naturalmente quanto ora asserito è facilmente controllabile, ad esempio, mediante il principio di Millman. Sarà infatti, con riferimento alla rete elettrica di fig. 2.101-2:

$$I'_1 = \frac{V_{BA}}{R_1} = \frac{\dfrac{V_1}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} \frac{1}{R_1} = \frac{1{,}06}{0{,}53} = \frac{1}{2} = 1 \text{ ampere} .$$

Esercizio 2.102

Una rete elettrica lineare passiva è accessibile in due coppie di punti, come si vede in figura 2.102-1a. Una coppia serve come entrata, l'altra

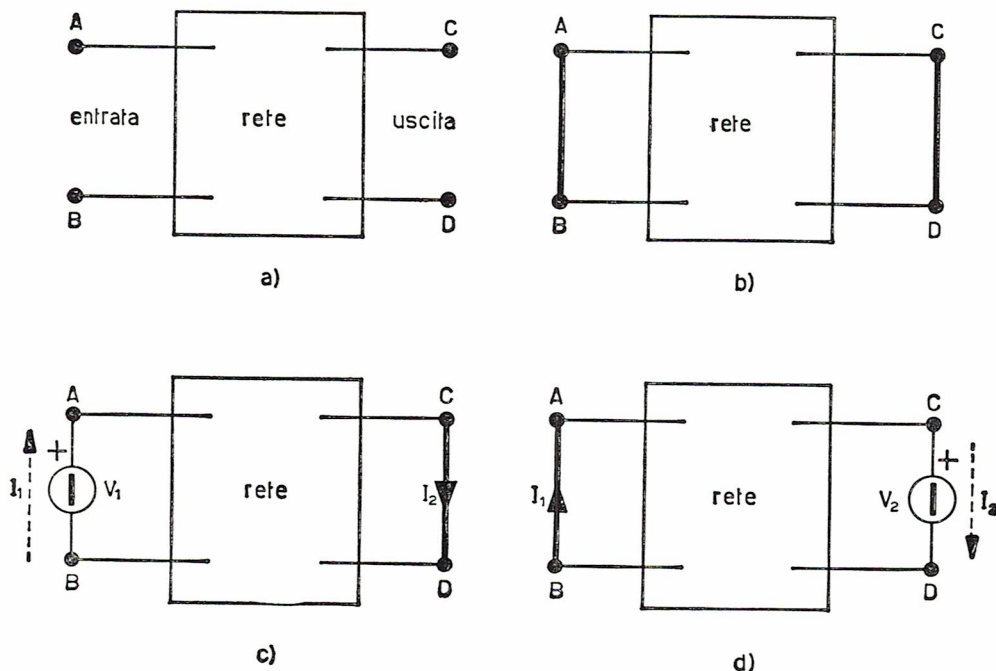



Fig. 2.102-1

come uscita (rete a struttura quadripolare). Ora questa rete funziona in modo tale che quando l'entrata è alimentata dalla tensione V_1 l' uscita risulta in cortocircuito (fig. 2.102-1c) e quando l'entrata è in cortocircuito l' uscita è alimentata dalla tensione V_2 (fig. 2.102-1d).

Si trovi in quale rapporto stanno le due correnti di cortocircuito i cui versi debbono essere quelli segnati in marcato sulle figg. 2.102-1c e d.

Soluzione

Agli effetti di quanto è stato richiesto, entrata e uscita della rete data possono essere considerate entrambe in cortocircuito, per cui basterà lavorare sulla rete di fig. 2.102-1*b*, ponendovi prima nel ramo 1 (entrata) la *f.e.m.* V_1 (fig. 2.102-1*c*), quindi nel ramo 2 (uscita) la *f.e.m.* V_2 (fig. 2.102-1*d*). Risulta allora, con le regole date nel testo, che:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{V_2}{V_1}.$$

Il segno meno che compare è dovuto al fatto che la *f.e.m.* V_2 posta in uscita della rete di fig. 2.102-1*d* è discorde col verso che aveva in detto ramo la corrente I_2 quando vi circolava (tale corrente è stata indicata tratteggiata).

2.11 Trasformazione triangolo-stella e stella-triangolo

Tre tronchi, o tre elementi di circuito, possono essere collegati fra di loro in diversi modi; fra questi è assai interessante il collegamento

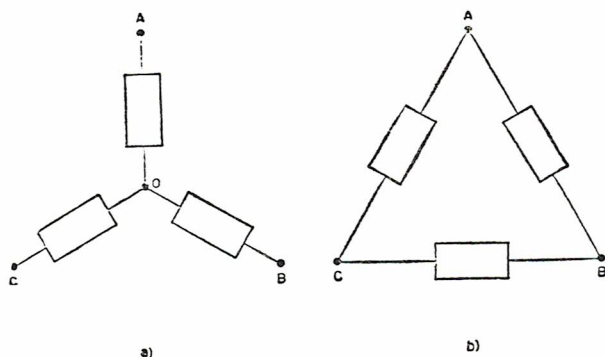



Fig. 2.11-1

aperto con un punto in comune, detto solitamente a *stella*, si veda la fig. 2.11-1*a*, e il collegamento chiuso, detto solitamente a *triangolo*, si veda la fig. 2.11-1*b*. Da queste figure appare che entrambe le disposizioni così ottenute presentano tre punti liberi A, B, C. La stella mostra a

dire il vero anche un altro punto, quello O [1] comune ai tre tronchi, ma questo si ritiene non accessibile. Si noti che questi tre tronchi potranno essere costituiti nel caso più semplice da tre resistenze. Naturalmente esse, tramite i punti A, B, C faranno capo ad un circuito più complesso, si vedano ad esempio le figg. 2.11-2*a* e *b*.

Ora si dimostra che è sempre possibile sostituire tre resistenze, che collegano a triangolo tre punti ben determinati di una rete elettrica, con altre tre resistenze fra loro collegate a stella facenti capo agli stessi punti, e viceversa, senza alterare il regime della rete elettrica restante (ad esempio rete di fig. 2.11-2*a* che si trasforma in quella di fig. 2.11-2*b*).

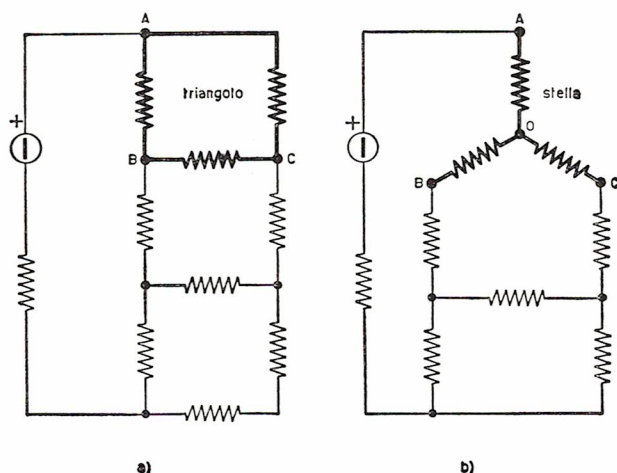



Fig. 2.11-2

Precisamente ogni triangolo di resistenze può essere trasformato in una ed una sola stella di resistenze e viceversa. L'equivalenza s' intende per la rete che fa capo ai tre vertici del triangolo o ai tre capi della stella.

Le formule che consentono la trasformazione delle resistenze costituenti il triangolo in quelle della stella equivalente sono, con riferimento ai simboli impiegati nella fig. 2.11-3 :

2.11-1 $$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}},$$

2.11-2 $$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}},$$

2.11-3 $$R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}};$$

---

[1] Detto *centro stella*.

mentre quelle che permettono il passaggio dalla stella al triangolo assumono le seguenti espressioni:

2.11-4 $$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C},$$

2.11-5 $$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A},$$

2.11-6 $$R_{AC} = R_A + R_C + \frac{R_A R_C}{R_B}.$$

Si ricordi che la trasformazione stella-triangolo e triangolo-stella trova utile applicazione nella risoluzione delle reti elettriche in quanto,

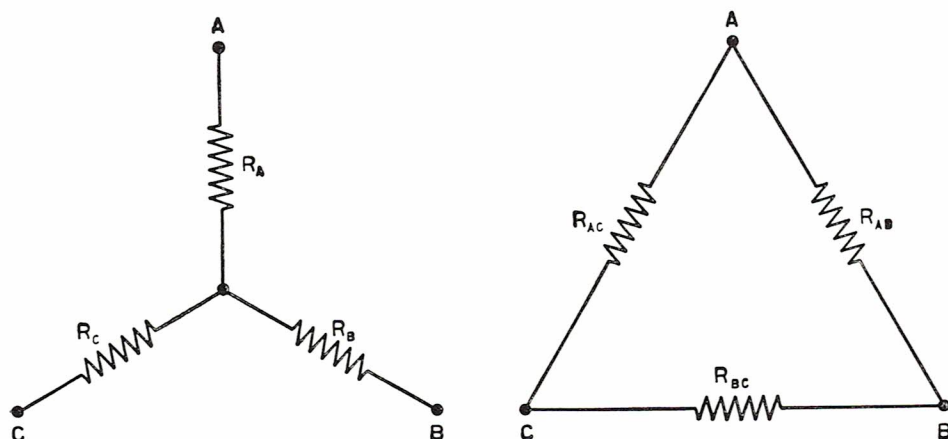



Fig. 2.11-3

tra l'altro, permette di eliminare, ad ogni trasformazione, uno o più nodi della rete data. Si veda ad esempio appunto il circuito di fig. 2.11-2. Con più passaggi è quindi possibile ridurre una rete complessa passiva a più semplici proporzioni.

Esercizio 2.111

Si trovi la corrente erogata dal generatore V il quale alimenta il circuito a ponte riportato in fig. 2.111-1.

Soluzione

Poiché è richiesto il valore della corrente I erogata dal generatore, e non i valori delle correnti nei vari rami del ponte stesso, la soluzione più semplice del problema si ha ricorrendo ad esempio alla trasformazione stella-triangolo che permette di semplificare notevolmente la struttura della rete.

Sostituendo allora fra i punti A, B, C alla stella (1) formata dalle

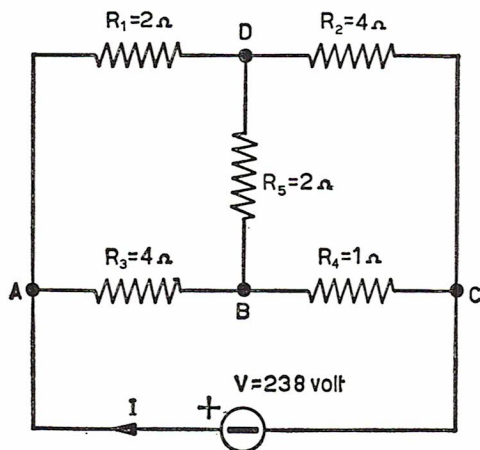



Fig. 2.111-1

resistenze R_1, R_2, R_5 il suo triangolo equivalente, la rete di figura 2.111-1 si tramuterà in quella riportata nella fig. 2.111-2. Per il calcolo delle resistenze equivalenti basterà applicare le ben note formule della trasformazione stella-triangolo, cioè quelle riportate in 2.11-4, 5, 6 :

$$R_{AB} = R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_2} = 2 + 2 + \frac{2 \cdot 2}{4} = 5 \text{ ohm} ,$$

$$R_{BC} = R_5 + R_2 + \frac{R_5 R_2}{R_1} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{2} = 10 \text{ ohm} ,$$

$$R_{AC} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_5} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{2} = 10 \text{ ohm} .$$

Si indichi ora con R' il parallelo di R_{AB} con R_3 e con R'' il parallelo di R_{BC} con R_4, risulterà :

---

(1) Il punto D è il centro di questa stella.

$$R' = \frac{R_3 R_{AB}}{R_3 + R_{AB}} = \frac{4 \cdot 5}{4 + 5} = \frac{20}{9} \text{ ohm}$$

$$R'' = \frac{R_4 R_{BC}}{R_4 + R_{BC}} = \frac{10}{1 + 10} = \frac{10}{11} \text{ ohm},$$

per cui la resistenza R''' complessiva del ramo ABC ammonterà a:

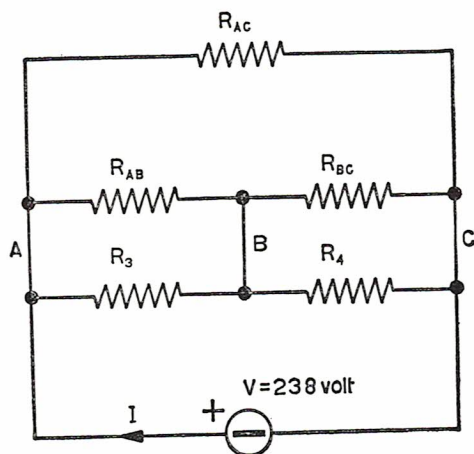



Fig. 2.111-2

$$R''' = R' + R'' = \frac{20}{9} + \frac{10}{11} = \frac{310}{99} \text{ ohm},$$

e quella costituita dal parallelo di R''' con R_{AC} varrà:

$$R_{eq} = \frac{R''' \cdot R_{AC}}{R''' + R_{AC}} = \frac{310 \cdot 10}{99\left(\dfrac{310}{99} + 10\right)} = \frac{31}{13} = 2{,}38 \text{ ohm}.$$

In definitiva la corrente I assumerà perciò il seguente valore:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{238}{2{,}38} = 100 \text{ ampere}.$$

Esercizio 2.112

Si risolva il precedente esercizio 2.111 iniziando con una trasformazione triangolo-stella.

Soluzione

Naturalmente è possibile risolvere il problema precedente iniziando con una trasformazione triangolo-stella anziché stella-triangolo: precisamente sostituendo ad esempio fra i punti D, B, C della rete riportata in fig. 2.111-1 al triangolo composto dalle resistenze R_2, R_4, R_5 la stella ad esso equivalente. La rete data si trasforma allora in quella riportata in fig. 2.112-1.

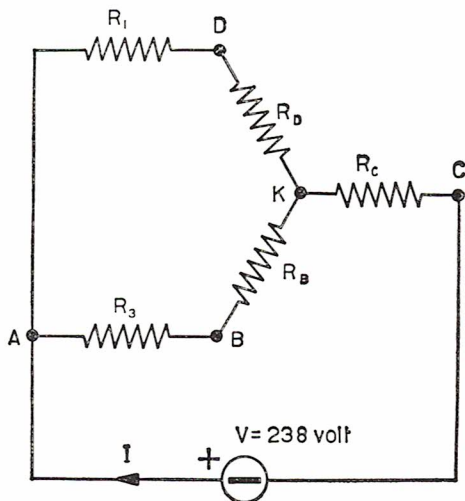



Fig. 2.112-1

In questo caso le resistenze R_C, R_B, R_D che compaiono in detta figura si calcoleranno applicando le relative formule 2.11-1, 2, 3.

Con i dati del problema si ha dunque:

$$R_C = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{4}{7} \text{ ohm},$$

$$R_B = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{2}{7} \text{ ohm},$$

$$R_D = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{8}{7} \text{ ohm}.$$

D'altronde la resistenza del ramo ADK vale:

$$R_{ADK} = R_1 + R_D = 2 + \frac{8}{7} = \frac{22}{7} \text{ ohm},$$

e quella del ramo ABK ammonta a:

$$R_{ABK} = R_3 + R_B = 4 + \frac{2}{7} = \frac{30}{7} \text{ ohm};$$

per cui il loro parallelo R_p assume il valore:

$$R_p = \frac{R_{ADK} R_{ABK}}{R_{ADK} + R_{ABK}} = \frac{22 \cdot 30}{7(22+30)} = \frac{660}{364} \text{ ohm}.$$

In definitiva dunque la resistenza equivalente fra i punti A e C è data da:

$$R_{eq} = R_p + R_C = \frac{660}{364} + \frac{4}{7} = \frac{868\ (^3)}{364} = 2{,}38 \text{ ohm}$$

e quindi:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{238}{2{,}38} = 100 \text{ ampere},$$

come già è stato trovato precedentemente.

2.12 Trasformazione stella-poligono

La trasformazione stella-triangolo descritta nel precedente paragrafo è un caso particolare di una trasformazione più generale.

Si dimostra infatti che è sempre possibile sostituire ad una stella formata da r resistenze, uscenti quindi da r nodi per convergere in un unico nodo O (centro stella), un poligono completo di resistenze avente

---

(3) Si osservi che dividendo per 28 ciascun termine del rapporto $\frac{868}{364}$ si ottiene $\frac{31}{13}$, espressione identica a quella trovata per R_{eq} nell'esercizio precedente.

per vertici gli stessi r nodi. Si vedano ad esempio le figg. 2.12-1*a* e *b*. Come appare chiaramente dall' ultima figura, i rami costituenti il poligono risultano tanti quanti sono i possibili congiungimenti dei vertici del poligono stesso. Precisamente si dimostra che questi rami sono in numero di $\frac{r(r-1)}{2}$. Ad una stella di cinque raggi corrisponderà pertanto una rete poligonale formata da dieci rami.

Ora, per il calcolo del valore da assegnare alla resistenza equivalente

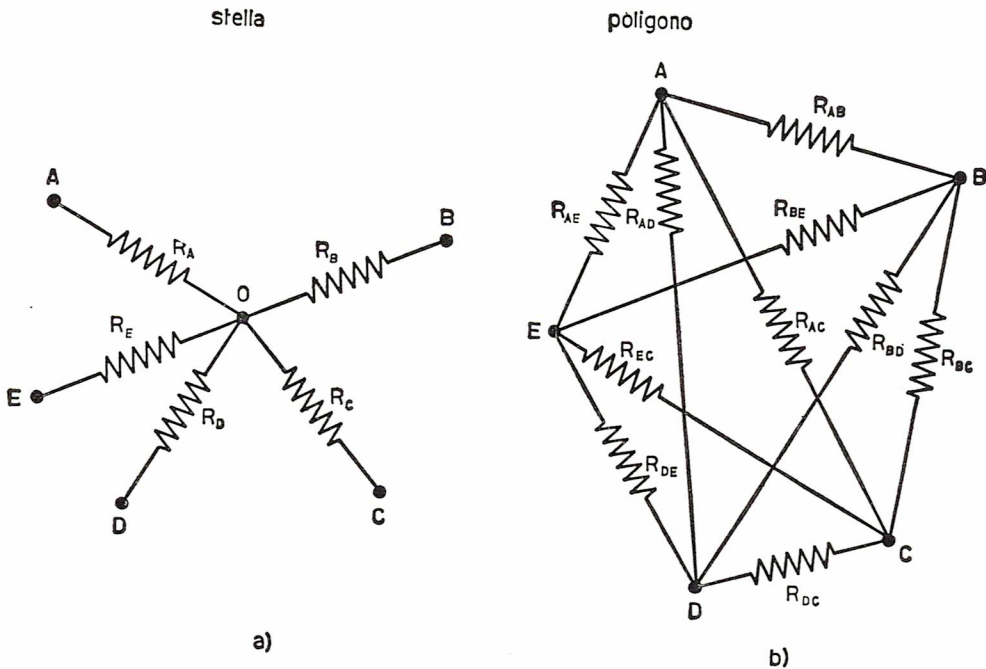



Fig. 2.12-1

costituente un ramo del poligono compreso fra i nodi generici P e Q si userà la seguente formula:

2.12-1
$$R_{PQ} = \frac{R_P R_Q}{R_0},$$

ove R_P ed R_Q stanno ad indicare i valori delle resistenze che nella stella congiungono il centro O rispettivamente con i vertici P e Q; mentre R_0 rappresenta il valore assunto dal parallelo di tutte le resistenze della stella convergenti nel centro O, cioè:

2.12-2
$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + ... + \frac{1}{R_P} + \frac{1}{R_Q} + ...}.$$

È importante ricordare che in generale non è possibile risolvere il problema inverso, cioè quello di sostituire ad un poligono completo la sua stella equivalente, salvo il caso particolare in cui $r = 3$ (trasformazione triangolo-stella). Ciò è dovuto al fatto che il numero dei rami formanti il poligono è sempre superiore a quello dei raggi della stella.

L' utilità della trasformazione stella-poligono apparirà evidente se si pensa che in questo modo è sempre possibile eliminare un nodo da una rete elettrica complessa, permettendo talvolta di arrivare così ad una struttura più comoda ai fini del calcolo. Gli esercizi che seguono dimostrano chiaramente quanto ora è stato affermato.

Esercizio 2.121

Si risolva l'esercizio **2.33** facendo ricorso alla trasformazione stella-poligono.

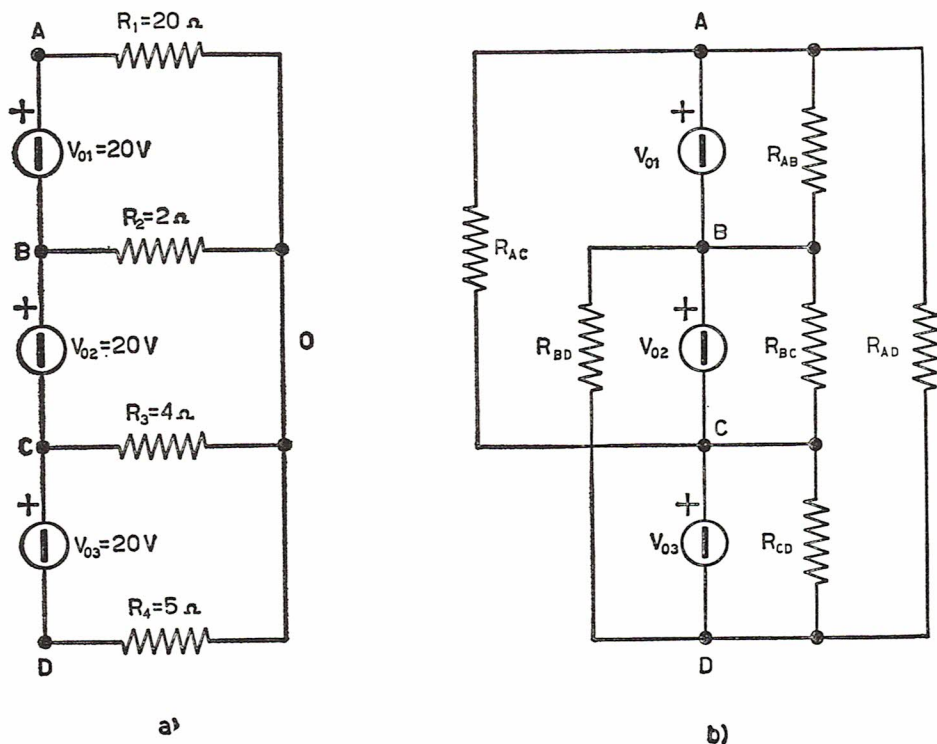



Fig. 2.121-1

Soluzione

Mediante la trasformazione stella-poligono la rete assegnata, che è stata riportata in fig. 2.121-1*a*, si renderà equivalente a quella riportata

in fig. 2.121-1*b*. Poiché, con i dati del problema, il parallelo delle quattro resistenze costituenti la stella vale:

$$R_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} = \frac{1}{0{,}05 + 0{,}50 + 0{,}25 + 0{,}20} = 1 \text{ ohm} ,$$

i valori delle varie resistenze di fig. 2.121-1*b* risulteranno, applicando la formula 2.12-1, come segue:

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_0} = \frac{20 \cdot 2}{1} = 40 \text{ ohm} ,$$

$$R_{BC} = \frac{R_2 R_3}{R_0} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8 \text{ ohm} ,$$

$$R_{CD} = \frac{R_3 R_4}{R_0} = \frac{4 \cdot 5}{1} = 20 \text{ ohm} ,$$

$$R_{AD} = \frac{R_1 R_4}{R_0} = \frac{20 \cdot 5}{1} = 100 \text{ ohm} ,$$

$$R_{AC} = \frac{R_1 R_3}{R_0} = \frac{20 \cdot 4}{1} = 80 \text{ ohm} ,$$

$$R_{BD} = \frac{R_2 R_4}{R_0} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10 \text{ ohm} .$$

Sarà quindi facile calcolare ora la potenza dissipata da ciascuna di queste sei resistenze, poiché sono note le tensioni ad esse applicate. Si avrà perciò:

a) Potenza dissipata da R_{AB}:

$$P' = \frac{V_{01}^2}{R_{AB}} = \frac{20^2}{40} = 10 \text{ W} .$$

b) Potenza dissipata da R_{BC}:

$$P'' = \frac{V_{02}^2}{R_{BC}} = \frac{20^2}{8} = 50 \text{ W} .$$

c) Potenza dissipata da R_{CD}:

$$P''' = \frac{V_{03}^2}{R_{CD}} = \frac{20^2}{20} = 20 \text{ W} .$$

d) Potenza dissipata da R_{AD}:

$$P^{IV} = \frac{(V_{01} + V_{02} + V_{03})^2}{R_{AD}} = \frac{60^2}{100} = 36 \text{ W} .$$

e) Potenza dissipata da R_{AC}:

$$P^{V} = \frac{(V_{01} + V_{02})^2}{R_{AC}} = \frac{40^2}{80} = 20 \text{ W} .$$

f) Potenza dissipata da R_{BD}:

$$P^{VI} = \frac{(V_{02} + V_{03})^2}{R_{BD}} = \frac{40^2}{10} = 160 \text{ W} .$$

In definitiva dunque la potenza complessivamente dissipata dalla rete ammonterà a:

$$P = P' + P'' + P''' + P^{IV} + P^{V} + P^{VI} = 10 + 50 + 20 + 36 + 20 + 160 = 296 \text{ watt},$$

esattamente come già trovato nell'esercizio 2.33.

Esercizio 2.122

I quattro vertici di un ponte di Wheatstone non sono perfettamente isolati da massa. Di ciò è stato tenuto conto mediante le resistenze R_A, R_B, R_C, R_D come appare in fig. 2.122-1.

Si trovi il valore della resistenza incognita R_x mediante la solita condizione di equilibrio ($V_{BD} = 0$).

Soluzione

Il circuito di fig. 2.122-2*a* è ovviamente del tutto eguale a quello riportato in fig. 2.122-1. Appare così in maniera molto chiara la convenienza di trasformare la stella di centro O e di vertici $ABCD$ nel poligono equivalente come è stato riportato in fig. 2.122-2*b*. In tal modo infatti due delle sei resistenze costituenti il poligono, precisamente la R_{AC} ed R_{BD}, vanno direttamente in parallelo rispettivamente al generatore ed al rivelatore di zero non influendo quindi minimamente sulla condizione di equilibrio; mentre ognuna delle altre quattro resistenze verrà ad

agire in parallelo a ciascun ramo del ponte il quale può essere considerato così senza dispersione ai vertici.

Usando le conduttanze, anziché le resistenze, la condizione di equilibrio del ponte ($V_{BD} = 0$) (fig. 2.122-2*b*) sarà data perciò dalla seguente equazione:

$$(G_1 + G_{AB})(G_x + G_{CD}) = (G_2 + G_{BC})(G_3 + G_{AD}) .$$

D'altronde le conduttanze del poligono, dovute all'imperfetto isolamento dei vertici del ponte, poiché per la formula 2.12-2:

$$R_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C} + \dfrac{1}{R_D}} = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ ohm} ,$$

risultano come segue:

$$G_{AB} = \frac{R_0}{R_A\, R_B} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0{,}025 \cdot 10^{-6} \text{ siemens}$$

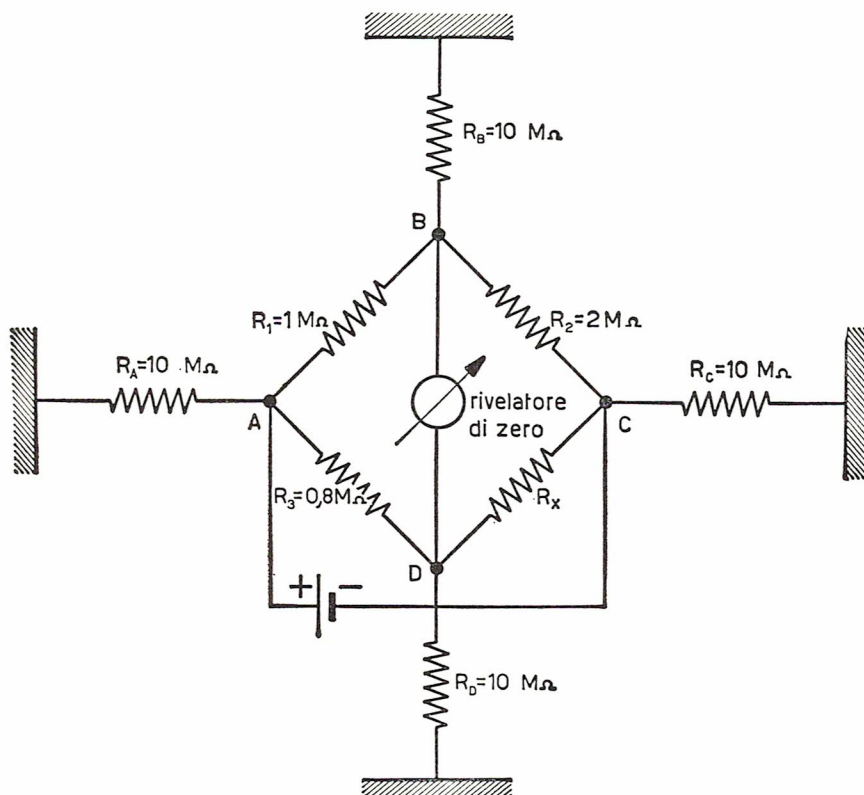



Fig. 2.122-1

$$G_{BC} = \frac{R_0}{R_B\,R_C} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0{,}025 \cdot 10^{-6} \text{ siemens}$$

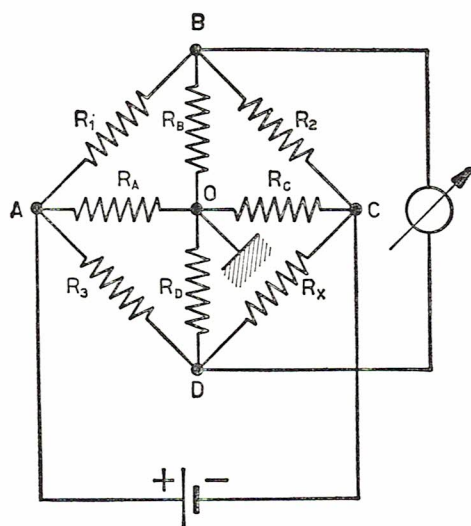
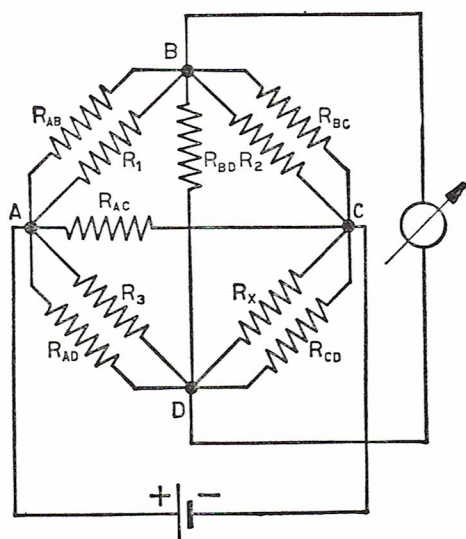
$$G_{CD} = \frac{R_0}{R_C\,R_D} = \frac{2{,}5 . 10^6}{10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0{,}025 \cdot 10^{-6} \text{ siemens}$$

a)

b)

Fig. 2.122-2

$$G_{AD} = \frac{R_0}{R_D R_A} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0{,}025 \cdot 10^{-6} \text{ siemens}.$$

Si ha così che la conduttanza G_x incognita ammonta a:

$$G_x = \frac{(G_2 + G_{BC})(G_3 + G_{AD})}{G_1 + G_{AB}} - G_{CD} = \frac{(0{,}5 + 0{,}025)(1{,}25 + 0{,}025)\,10^{-12}}{(1 + 0{,}025)\,10^{-6}} -$$

$$- 0{,}025 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{0{,}525 \cdot 1{,}275}{1{,}025} - 0{,}025\right) 10^{-6} = 0{,}629 \cdot 10^{-6} \text{ siemens}.$$

La resistenza incognita R_x vale dunque:

$$R_x = \frac{1}{G_x} = \frac{1}{0{,}629 \cdot 10^{-6}} = 1{,}59 \text{ Mohm},$$

anziché 1,60 Mohm che si sarebbe avuto se i quattro vertici avessero presentato un ben più alto grado di isolamento.

2.13 20 esercizi completamente svolti sulle reti elettriche lineari

Esercizio 2.131

Da prove effettuate su un generatore elettrico lineare di *f.e.m.* $V_0 = 12$ volt risulta che quando la corrente erogata passa dal valore $I_1 = 1$ ampere ad $I_2 = 3$ ampere la *d.d.p.* ai suoi morsetti si abbassa di 0,10 volt. Si trovino i valori della resistenza interna del generatore e del carico nelle due condizioni di corrente sopra indicata. Si rappresenti inoltre il generatore dato secondo lo schema del generatore di *tensione* e quindi di *corrente.*

Soluzione

Indicata con V_1 rispettivamente con V_2 la *d.d.p.* ai capi del generatore quando esso eroga la corrente I_1 rispettivamente I_2, la resistenza

interna R_0 del generatore risulta allora definita dal seguente rapporto:

$$R_0 = \frac{V_1 - V_2}{I_2 - I_1} = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05 \text{ ohm } ^{(1)}.$$

Il valore della resistenza di carico, quando il generatore eroga la corrente $I_1 = 1\,\text{A}$, varrà perciò:

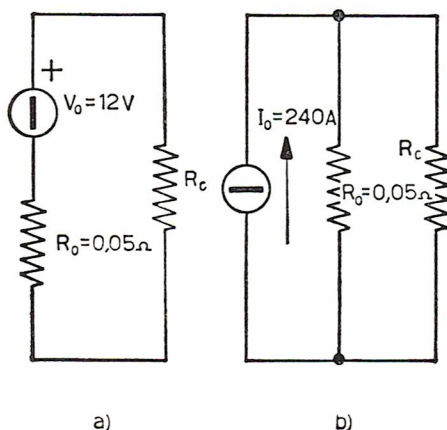



Fig. 2.131-1

$$R'_c = \frac{V_0}{I_1} - R_0 = 12 - 0{,}05 = 11{,}95 \text{ ohm};$$

nell'altro caso:

$$R''_c = \frac{V_0}{I_2} - R_0 = \frac{12}{3} - 0{,}05 = 3{,}95 \text{ ohm}.$$

Si noti che la resistenza interna in entrambi i casi è di valore assai piccolo, rispetto a quello del carico: pertanto il generatore elettrico si comporta effettivamente come generatore di tensione.

La rappresentazione del generatore dato secondo lo schema del generatore di tensione appare in fig. 2.131-1*a*, come generatore di corrente invece in fig. 2.131-1*b* $\left(I_0 = \frac{V_0}{R_0} = \frac{12}{0{,}05} = 240 \text{ A}\right)$.

---

(1) Infatti nelle due condizioni di carico si può scrivere:

$$V_1 = V_0 - R_0 I_1$$
$$V_2 = V_0 - R_0 I_2,$$

sottraendo membro a membro le due equazioni si ottiene subito:

$$V_1 - V_2 = R_0(I_2 - I_1)$$

Esercizio 2.132

Si trovino i valori delle correnti nei tre rami della rete assegnata in fig. 2.132-1 applicando i principi di Kirchhoff (nodi e maglie).

Soluzione

Uno solo è il nodo indipendente (indifferentemente quello A o B), mentre le maglie indipendenti sono in numero di due, ad esempio quella

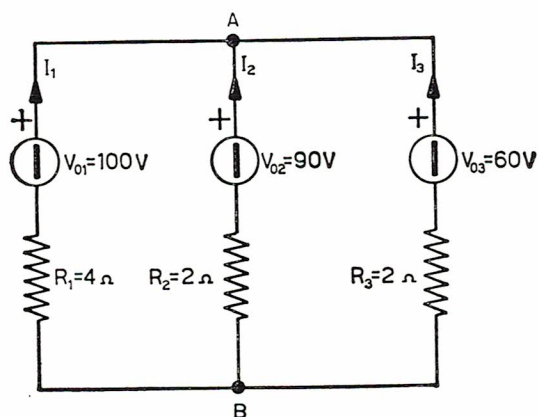



Fig. 2.132-1

comprendente i generatori V_{01} e V_{02} e quella comprendente i generatori V_{01} e V_{03}.

Si potrà perciò scrivere, dopo aver assegnato alle tre correnti i versi riportati sul circuito di fig. 2.132-1, :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$V_{01} - V_{02} = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$V_{01} - V_{03} = R_1 I_1 - R_3 I_3 \text{ ,}$$

cioè, passando ai numeri:

2.132-1 $$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

2.132-2 $$4I_1 - 2I_2 = 10$$

2.132-3 $$4I_1 - 2I_3 = 40 \text{ .}$$

Per la soluzione di questo sistema si proceda ad esempio come segue. Dall'equazione 2.132-2 si ricavi l'espressione della corrente I_2:

2.132-4 $$I_2 = \frac{-10 + 4I_1}{2} = -5 + 2I_1$$

e dall'equazione 2.132-3 quello della corrente I_3:

2.132-5 $$I_3 = \frac{-40 + 4I_1}{2} = -20 + 2I_1 .$$

L'equazione 2.132-1 diventa allora immediatamente:

$$I_1 - 5 + 2I_1 - 20 + 2I_1 = 0 ,$$

cioè un'equazione nella sola incognita I_1, che porta alla seguente soluzione:

$$I_1 = 5 \text{ ampere} .$$

Dalla 2.132-4 si otterrà così il valore della corrente I_2, precisamente:

$$I_2 = \frac{-10 + 4 \cdot 5}{2} = 5 \text{ ampere} ;$$

mentre dalla 2.132-5 si otterrà il valore della corrente I_3:

$$I_3 = \frac{-40 + 4 \cdot 5}{2} = -10 \text{ ampere} ,$$

cioè la corrente nel terzo ramo ammonta a 10 ampere ed ha verso contrario a quello assegnato arbitrariamente all' inizio.

Esercizio 2.133

Due generatori di tensione, collegati in parallelo come appare in fig. 2.133-1, erogano assieme una certa corrente al carico R_c. Si trovi il valore da assegnare alla resistenza R_x in serie al generatore di *f.e.m.* V_{01} affinché la corrente da esso erogata sia doppia di quella erogata dal generatore di *f.e.m.* V_{02}.

Soluzione

Si indichi con I_2 la corrente erogata dal generatore V_{02}, con $2I_2$ la corrente erogata dal generatore V_{01} e quindi con $3I_2$ la corrente circo-

lante nel carico R_c. Applicando il 2° principio di Kirchhoff alla maglia $ABCDA$, la quale è stata scelta perché costituita da elementi noti, si potrà scrivere:

$$V_{02} = R_c \cdot 3 I_2 + R_2 I_2,$$

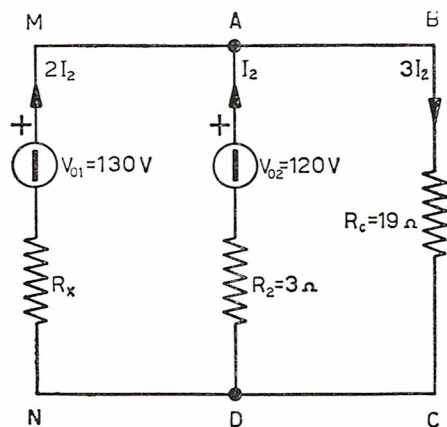



Fig. 2.133-1

cioè, passando ai numeri:

$$120 = 57\, I_2 + 3\, I_2 = 60\, I_2,$$

da cui:

$$I_2 = \frac{120}{60} = 2 \text{ ampere}.$$

Ma la *d.d.p.* fra i punti M ed N è la stessa di quella che si ha ai capi del carico R_c, la quale vale naturalmente:

$$V_{MN} = R_c \cdot 3\, I_2 = 19 \cdot 6 = 114 \text{ volt}.$$

Ai capi della resistenza R_x dovranno cadere perciò:

$$V_{Rx} = V_{01} - V_{MN} = 130 - 114 = 16 \text{ volt}.$$

Per soddisfare questa condizione dovrà essere:

$$R_x = \frac{V_{Rx}}{2\, I_2} = \frac{16}{4} = 4 \text{ ohm}.$$

Questo è il valore di R_x (R_x comprende naturalmente anche la resistenza interna del generatore V_{01}) affinché, nelle condizioni date, la corrente del primo generatore sia di valore doppio di quella erogata dal secondo generatore.

Esercizio 2.134

Un partitore di tensione, realizzato come in fig. 2.134-1 ed alimentato da un generatore ideale di tensione di *f.e.m.* $V_0 = 100$ volt, alimenta a sua volta due carichi che assorbono rispettivamente la corrente $I_1 =$ $= 20$ mA e $I_2 = 10$ mA. Si trovi il valore della corrente erogata dal generatore.

Soluzione

Si indichi con I la corrente erogata dal generatore e che circolerà perciò nella prima resistenza R_1. Allora la corrente che attraversa la

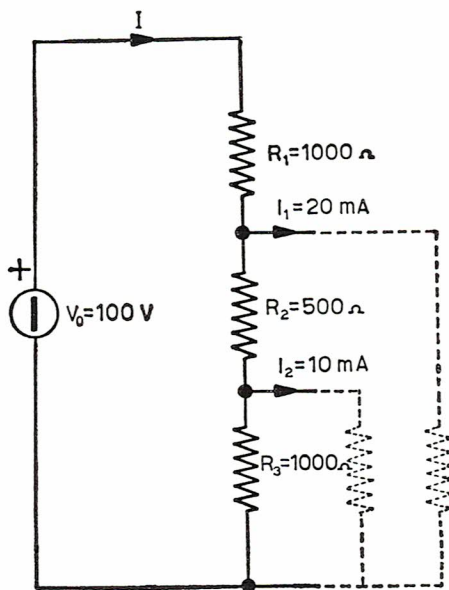



Fig. 2.134-1

resistenza R_2 varrà $I - I_1$ e quella che attraversa la resistenza R_3 di conseguenza varrà $I - I_1 - I_2$.

Si scriva quindi il secondo principio di Kirchhoff per la maglia costituita dal generatore e dalle tre resistenze R_1, R_2, R_3. Sarà :

$$V_0 = R_1 I + R_2(I - I_1) + R_3(I - I_1 - I_2) \ ,$$

equazione dove l'unica grandezza incognita è la corrente I. Con i dati del problema questa equazione diventa :

$$100 = 1000I + 500\,(I - 0{,}02) + 1000\,(I - 0{,}03) = 2500\,I - 40$$

da cui si ricava facilmente che:

$$I = \frac{140}{2500} = 0{,}056 \text{ ampere},$$

cioè 56 milliampere.

Esercizio 2.135

Un generatore ideale di tensione alimenta diversi carichi tramite una linea elettrica. Questa è di caratteristiche note; d'altronde pure

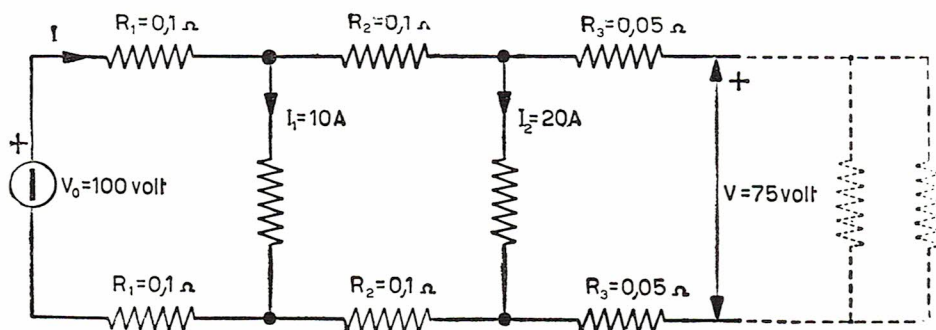



Fig. 2.135-1

note sono le correnti assorbite dai carichi e la tensione ai capi di uno di questi. Con riferimento alla situazione riportata in fig. 2.135-1 si calcolino i valori delle correnti nei primi tre tronchi di linea.

Soluzione

Si indichi con I la corrente erogata dal generatore V_0 e quindi circolante nel primo tronco (quello costituito dalle resistenze R_1); allora nel secondo tronco (quello costituito dalle resistenze R_2) circolerà una corrente di valore $I - I_1 = I - 10$ e nel terzo tronco (quello costituito dalle resistenze R_3) una corrente di valore $I - I_1 - I_2 = I - 30$.

D'altronde la caduta di tensione complessiva lungo l'insieme di tronchi di linea in esame è nota (vale infatti $100 - 75 = 25$ volt) per cui si potrà scrivere:

$$2R_1 I + 2R_2(I - 10) + 2R_3(I - 30) = 25\,.$$

Risolvendo questa equazione rispetto ad I si ottiene:

$$I = \frac{25 + 20\,R_2 + 60\,R_3}{2\,R_1 + 2\,R_2 + 2\,R_3} = \frac{25 + 2 + 3}{0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1} = 60 \text{ A} .$$

La corrente nel primo tronco ammonta dunque a 60 ampere, quella nel secondo tronco a 50 ampere e quella nel terzo tronco a 30 ampere.

Esercizio 2.136

Si risolva col metodo delle correnti di maglia (Maxwell) la rete elettrica dell'esercizio 1.593.

Soluzione

Si osservi che la rete data è piana e presenta due sole maglie contigue. Dopo aver imposto in ciascuna di queste una circolazione fittizia

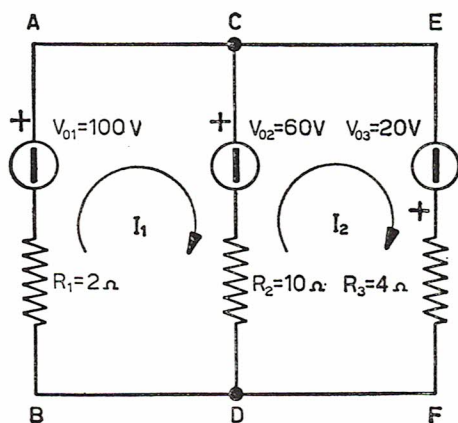



Fig. 2.136-1

di corrente, come è stato fatto nel circuito di fig. 2.136-1, sarà facile scrivere per entrambe le maglie il 2º principio di Kirchhoff. Con le solite convenzioni si otterrà infatti il seguente sistema di equazioni:

$$V_{01} - V_{02} = R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2)$$

$$V_{02} + V_{03} = R_2(I_2 - I_1) + R_3 I_2 \,,$$

il quale, sviluppato e ordinato, assume la seguente forma assai semplice

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 = V_{01} - V_{02}$$

$$- R_2 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_{02} + V_{03} .$$

Passando ora ai numeri, si otterrà perciò il sistema:

$$12\, I_1 - 10\, I_2 = 40$$

$$-10\, I_1 + 14\, I_2 = 80\,,$$

il quale, risolto, dà: $I_1 = I_2 = 20$ ampere.

I risultati sono dunque i seguenti: nel ramo AB la corrente coincide con I_1 e vale 20 A; nel ramo CD la corrente, la cui espressione è $I_1 - I_2$, vale zero; nel ramo EF la corrente coincide con I_2 e ammonta a 20 A.

Esercizio 2.137

Due generatori di tensione alimentano un carico resistivo R_c nel

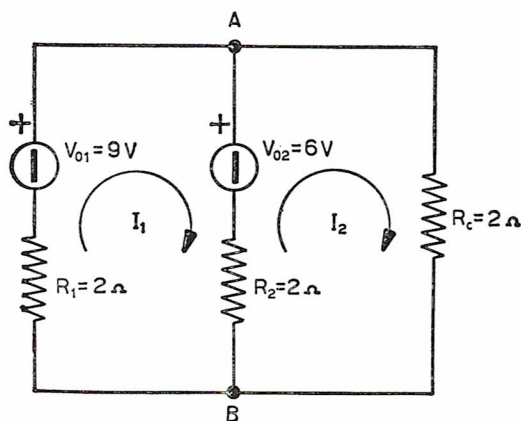



Fig. 2.137-1

modo indicato in fig. 2.137-1. Si calcoli col metodo delle correnti di maglia il valore della corrente nel carico R_c.

Soluzione

La rete elettrica data è piana ed è formata da due sole maglie contigue. Imponendo in ciascuna maglia una circolazione fittizia di corrente nel verso destrogiro ed assumendo questo verso come verso di percorrenza delle maglie, si potrà scrivere:

$$V_{01} - V_{02} = R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2)$$

$$V_{02} = R_2 (I_2 - I_1) + R_c I_2\,.$$

D'altronde, poiché la corrente nel carico R_c coincide con la corrente I_2, sarà sufficiente risolvere il sistema delle equazioni sopra scritte rispetto ad I_2. Ricavando pertanto dalla seconda equazione del sistema l'espressione della corrente I_1:

$$I_1 = \frac{R_2 + R_c}{R_2} I_2 - \frac{V_{02}}{R_2} = 2 I_2 - 3$$

e sostituendo tale espressione nella prima equazione, dopo avervi ordinato i termini, si otterrà:

$$V_{01} - V_{02} = (R_1 + R_2)(2 I_2 - 3) - R_2 I_2 ,$$

la quale, risolta con i dati del problema, fornisce per la corrente I_2 il valore di 2,5 ampere. La corrente di carico ammonta quindi a 2,5 A ed ha il verso della corrente I_2 segnato sul circuito di fig. 2.137-1.

Facile sarebbe a questo punto calcolare I_1 ($I_1 = 2$A) e quindi la corrente circolante nel secondo ramo:

$$I_{AB} = I_1 - I_2 = 2 - 2{,}5 = -0{,}5 \text{ ampere} .$$

La corrente nel secondo ramo circola perciò effettivamente da B verso A.

Esercizio 2.138

Si risolva il precedente esercizio 2.137 mediante il principio della sovrapposizione degli effetti.

Soluzione

Nella rete data (vedi fig. 2.138-1*a*) vi sono due generatori di tensione. Per il principio della sovrapposizione degli effetti la corrente I_c nel carico R_c potrà essere calcolata sommando algebricamente (cioè tenendo conto anche dei versi delle correnti) le correnti I'_c e I''_c che scorrono nel carico quando nella rete agiscono separatamente il primo e il secondo generatore. Lo studio della rete elettrica di fig. 2.138-1*a* potrà essere condotto allora allo studio separato delle due reti riportate in fig. 2.138-1*b* e *c*, e sommando poi algebricamente i risultati.

Si procederà dunque come segue:

a) Calcolo della corrente nel ramo R_c della rete di fig. 2.138-1*b*. È facile vedere che la corrente erogata dal generatore V_{01} in queste con-

dizioni ammonta a **3** ampere; questa corrente si divide poi in parti eguali nelle due resistenze R_2 ed R_c, poiché sono di valore eguale. Quindi $I_c' = 1{,}5$ ampere.

b) Calcolo della corrente nel ramo R_c della rete di fig. 2.138-1*c*. Il generatore V_{02} eroga in queste condizioni 2 ampere, per cui la corrente I_c'', che vale la metà, poiché le resistenze R_1 ed R_c sono di valore eguale, ammonta ad 1 ampere.

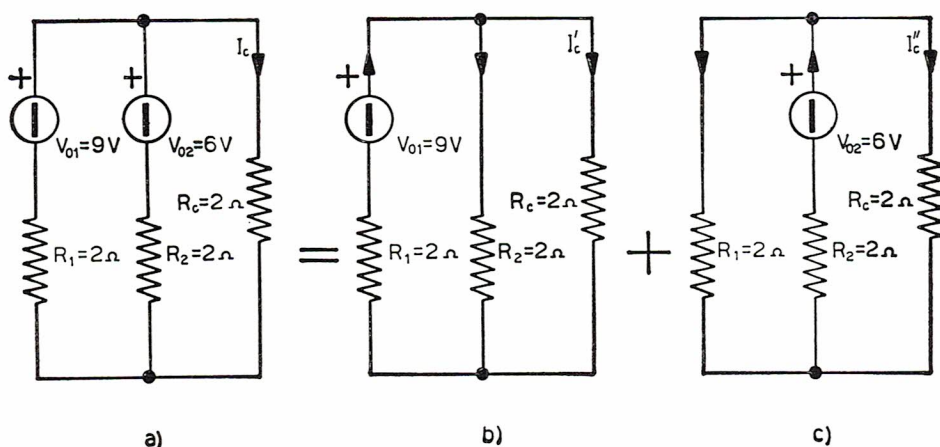



Fig. 2.138-1

c) Calcolo della corrente risultante I_c nel ramo R_c. La corrente nel carico R_c vale la somma algebrica di I_c' con I_c''. Poiché queste correnti hanno lo stesso verso sarà $I_c = I_c' + I_c'' = 2{,}5$ ampere ed I_c avrà il verso di I_c' e I_c''.

Esercizio 2.139

Si calcoli la resistenza equivalente presentata fra i punti A e C della rete costituita da cinque resistenze note collegate come in figura 2.139-1.

Soluzione

Un modo [1] per trovare il valore della resistenza equivalente R_{AC} può essere quello di calcolare la corrente I assorbita dal bipolo quando

---

[1] Un altro metodo è quello che fa ricorso alla trasformazione stella-triangolo o triangolo-stella.

esso è sottoposto ad una *d.d.p.* V (vedi fig. 2.139-2*a*), poiché allora è chiaro che:

$$R_{AC} = \frac{V}{I}.$$

Tutto sta a calcolare quindi la corrente I. A tale scopo basterà risol-

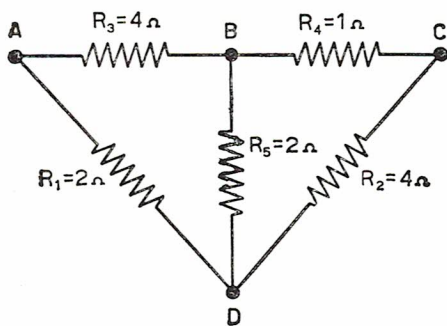



Fig. 2.139-1

vere la rete di fig. 2.139-2*b*, ad esempio mediante il metodo delle correnti di maglia. Si otterrà così il sistema:

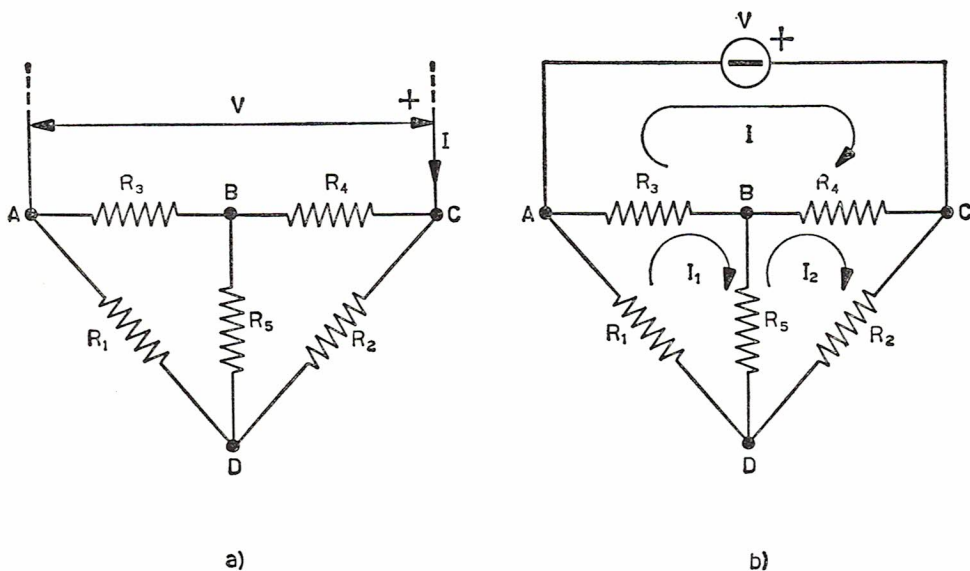



Fig. 2.139-2

$$R_3(I - I_1) + R_4(I - I_2) = V$$

$$R_1 I_1 + R_3(I_1 - I) + R_5(I_1 - I_2) = 0$$

$$R_2 I_2 + R_5(I_2 - I_1) + R_4(I_2 - I) = 0\,,$$

il quale, dopo aver sviluppato, ordinato, raccolto ed impiegato i dati numerici forniti dal problema, diverrà semplicemente:

$$5I - 4I_1 - I_2 = V$$

$$-4I + 8I_1 - 2I_2 = 0$$

$$-I \quad - 2I_1 + 7I_2 = 0\,.$$

Da questo sistema ovviamente è sufficiente ricavare il valore di I in funzione di V. Si incominci perciò coll'eliminare dalle due ultime equazioni una volta l'incognita I_1, ottenendo così $I_2 = \frac{8}{26} I$; e l'altra volta l'incognita I_2, ottenendo così $I_1 = \frac{15}{26} I$. Si sostituiscano quindi tali correnti nella prima equazione, si avrà allora l'espressione:

$$5I - \frac{4 \cdot 15}{26} I - \frac{8}{26} I = \mathrm{V}$$

cioè anche:

$$62I = 26\,\mathrm{V}$$

da cui si ricava finalmente che:

$$\frac{V}{I} = R_{AC} = \frac{62}{26} = 2{,}38 \text{ ohm}\,.$$

Esercizio 2.1310

Si trovi il generatore equivalente (Thévenin) che alimenta l'utilizzatore (bipolo U) facente parte della rete riportata in fig. 2.1310-1*a*.

Soluzione

In base al principio di Thévenin, per l'utilizzatore U la rete elettrica di fig. 2.1310-1*a* equivale a quella assai più semplice di fig. 2.1310-1*b*, ove V_0 ed R_0 verranno calcolati come segue:

a) Calcolo di V_0. Questa tensione non è altro che la *d.d.p.* che si manifesta fra i punti A e B quando è stato tolto il bipolo U (vedi fig. 2.1310-2*a*). Pertanto V_0 varrà:

$$V_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V\,.$$

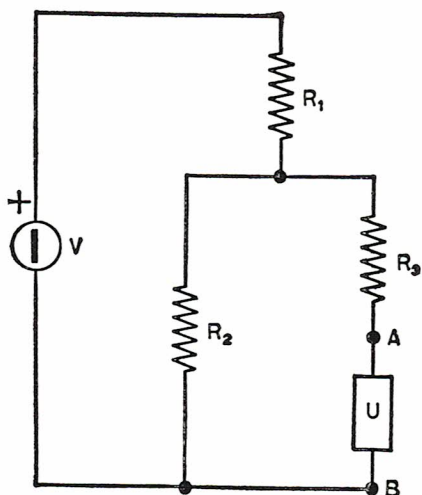
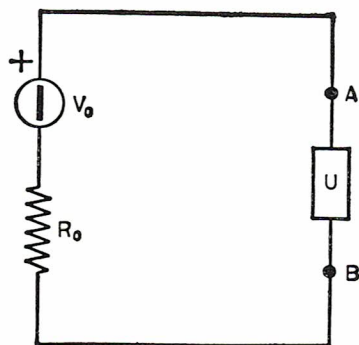



Fig. 2.1310-1

b) Calcolo di R_0. Si trova cercando la resistenza equivalente fra i punti A e B della rete riportata in figura 2.1310-2*b*. Sarà:

$$R_0 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot$$

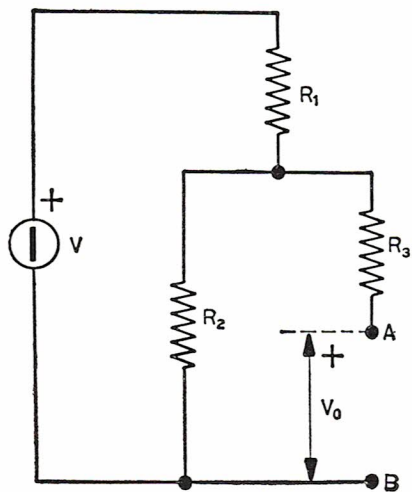
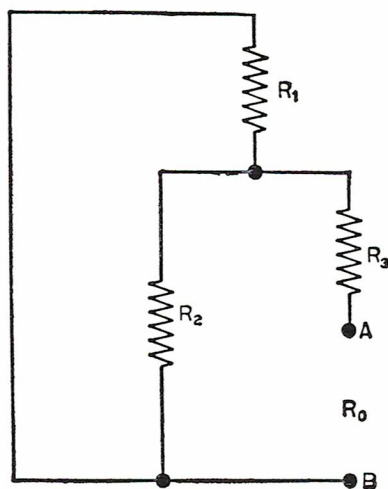



Fig. 2.1310-2

Il problema è perciò risolto completamente.

Esercizio 2.1311

Si trovi il valore della corrente I_1 nella resistenza R_1 facente parte della rete elettrica riportata in figura 2.1311-1.

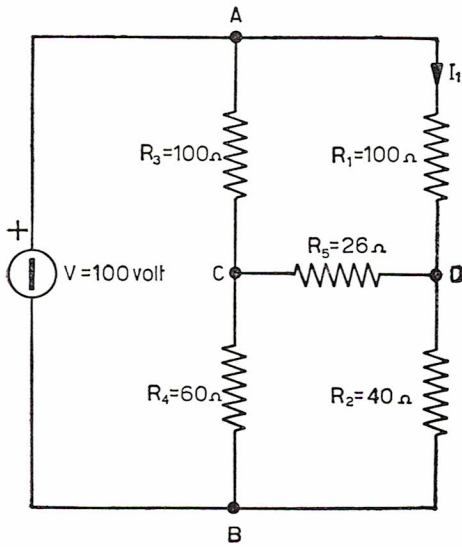



Fig. 2.1311-1

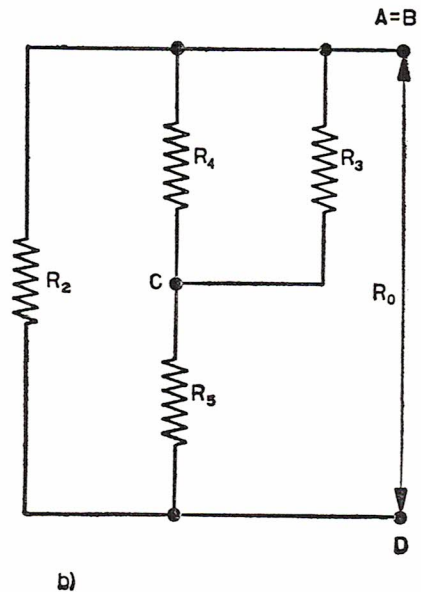
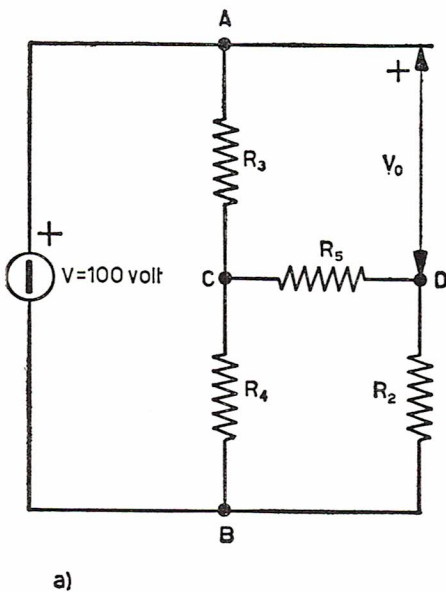



Fig. 2.1311-2

Soluzione

Può essere conveniente ricorrere al principio di Thévenin [1]. Tolta la resistenza R_1, la *d.d.p.* fra i punti A e D rappresenta allora la *f.e.m.* V_0, la quale (vedi fig. 2.1311-2*a*), indicando con R' il parallelo fra R_4 e la serie di R_5 con R_2, vale:

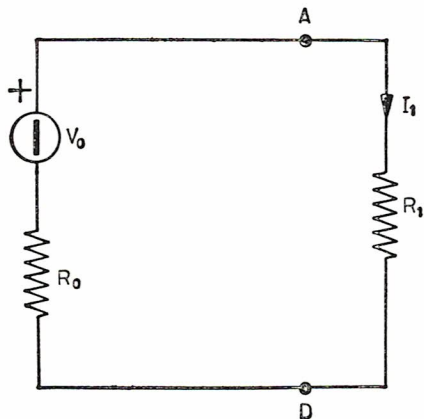



Fig. 2.1311.3

$$V_0 = V_{AC} + V_{CD} = \frac{R_3}{R_3 + R'} V + \frac{R'}{R_3 + R'} \quad \frac{R_5}{R_2 + R_5} V =$$

$$= \frac{100}{100 + 31,4} 100 + \frac{31,4}{100 + 31,4} \frac{26}{40 + 26} 100 = 85,5 \text{ volt};$$

mentre la resistenza interna R_0, cioè quella vista fra i punti A e D entro la rete col generatore V in cortocircuito (vedi fig. 2.1311-2*b*), ammonta, indicando con R'' il parallelo di R_3 con R_4, a:

$$\text{R}_0 = R_{AD} = \frac{R_2 (R_5 + R'')}{R_2 + R_5 + R''} = \frac{40 (26 + 37,5)}{40 + 26 + 37,5} = 24,7 \quad \text{ohm}.$$

Il calcolo della corrente I_1 farà perciò ora riferimento al circuito di fig. 2.1311-3, dal quale si ricaverà immediatamente:

$$I_1 = \frac{V_0}{R_0 + R_1} = \frac{85,5}{24,7 + 100} = 0,686 \quad \text{ampere}.$$

---

[1] È pure conveniente il metodo che fa ricorso alla trasformazione triangolo-stella delle resistenze facenti capo ai punti B, C, D.

Esercizio 2.1312

Si trovi il valore della corrente che verrà a circolare nella resistenza $R_c'' = 6$ ohm quando si chiuderà il tasto T facente parte della rete di fig. 2.1312-1. Le correnti circolanti nei tre rami di questa rete, a tasto aperto, sono d'altronde completamente note.

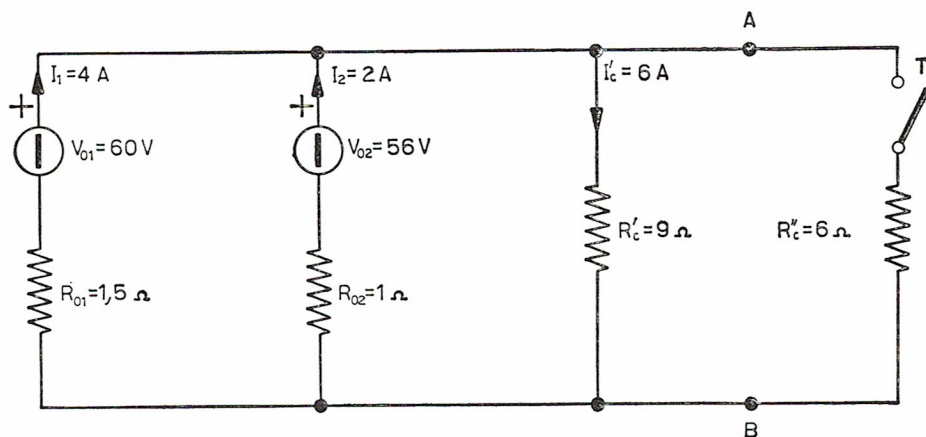



Fig. 2.1312-1

Soluzione

Il modo più semplice per risolvere il problema è quello di fare ricorso al principio di Thévenin.

La resistenza R_c'' si considererà allora facente parte del circuito equivalente riportato in fig. 2.1312-2, ove V_0 è la *d.d.p.* fra i punti A e B (vedi fig. 2.1312-1) quando non è inserita la R_c'' [con i dati del pro-

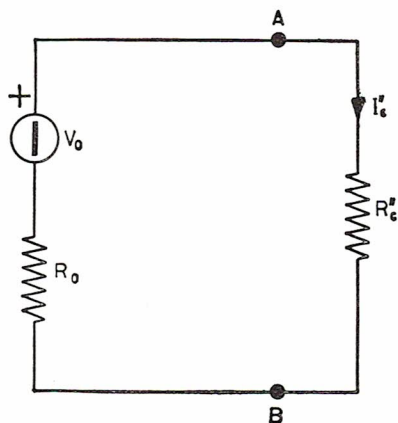



Fig. 2.1312-2

blema V_0 vale perciò 54 volt [1])] e dove R_0 è dato dal parallelo delle tre resistenze R_{01}, R_{02}, R'_c, il cui valore ammonta a:

$$R_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{01}} + \dfrac{1}{R_{02}} + \dfrac{1}{R'_c}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1,5} + 1 + \dfrac{1}{9}} = \frac{9}{16} = 0,563 \text{ ohm}.$$

La corrente I''_c nella resistenza R''_c varrà perciò:

$$I''_c = \frac{V_0}{R_0 + R''_c} = \frac{54}{0,563 + 6} = 8,23 \text{ ampere}.$$

Esercizio 2.1313

Trovare il valore e la polarità della *d.d.p.* fra i punti A e B della rete riportata in fig. 2.1313-1.

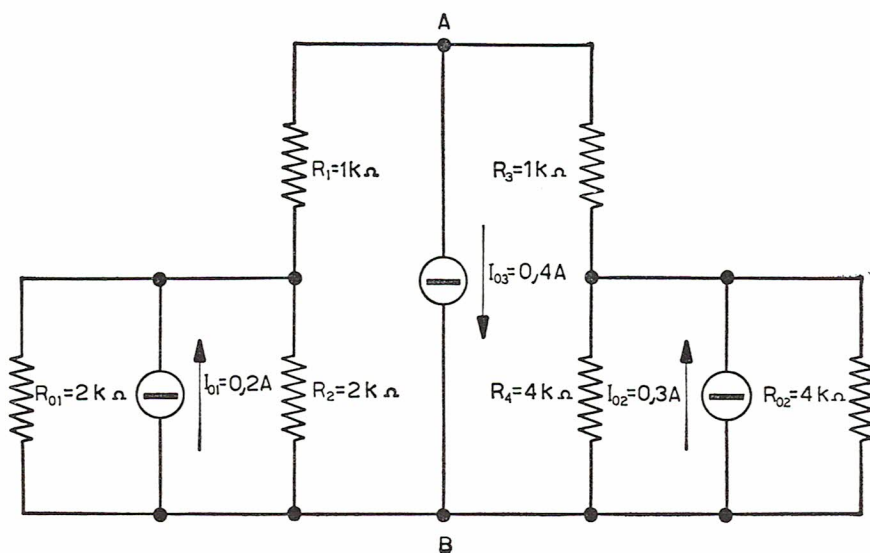



Fig. 2.1313-1

Soluzione

Converrà applicare ad esempio il principio di Norton alla parte di rete a sinistra e a destra del generatore di corrente I_{03} (vedi

---

[1]) Infatti la tensione V_{AB} si può calcolare ad esempio come caduta nella resistenza R'_c la quale, essendo percorsa dalla corrente di 6 ampere, determinerà una *d.d.p.* del valore di 54 volt.

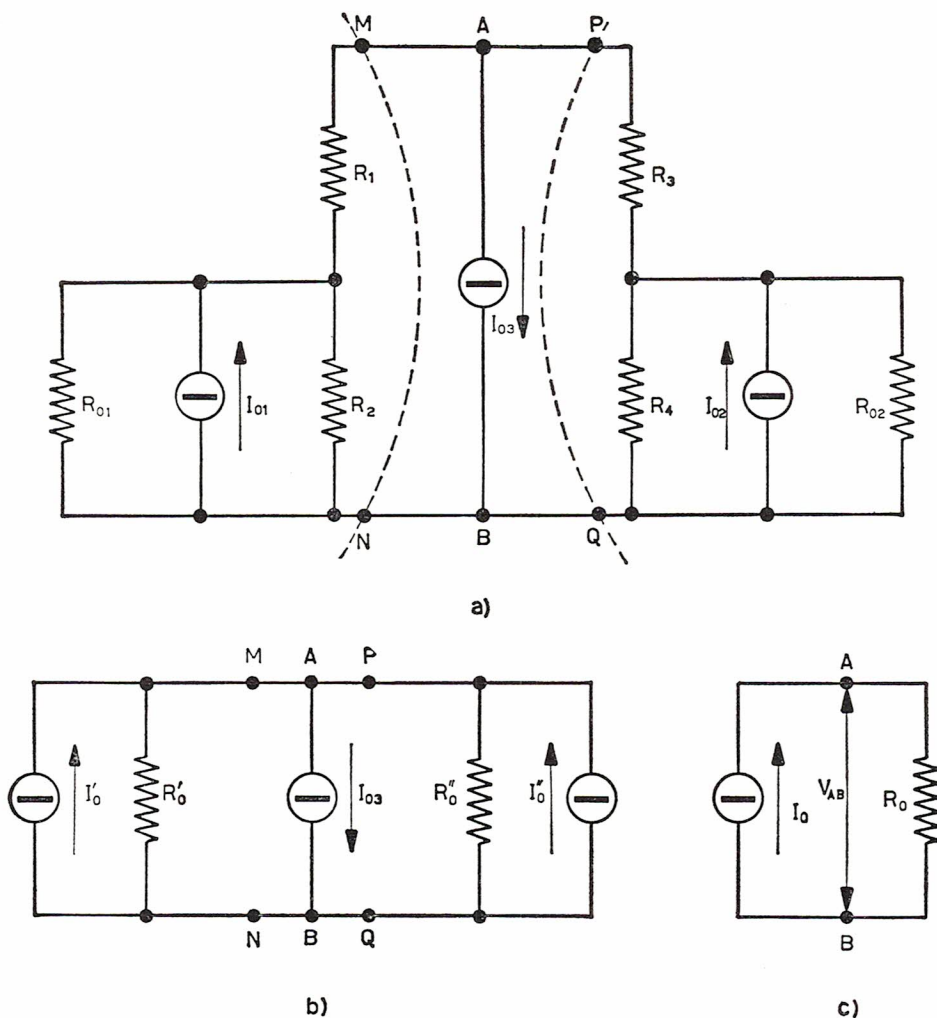



Fig. 2.1313-2

fig. 2.1313-2*a*). Si arriverà così al circuito di fig. 2.1313-2*b* dove I_0', si veda per il calcolo il circuito di fig. 2.1313-3*a*, vale 0,10 ampere ed R_0', si veda la fig. 2.1313-3*b*, ammonta a 2000 ohm e dove I_0'', si veda per il calcolo il circuito di fig. 2.1313-3*c*, vale 0,20 ampere ed R_0'', si veda la fig. 2.1313-3*d*, ammonta a 3000 ohm.

D'altronde il circuito di fig. 2.1313-2*b* diventa equivalente a quello riportato in fig. 2.1313-2*c* (si noti che $I_0 = I_0' - I_{03} + I_0'' = -0{,}10$ A), per cui finalmente si potrà calcolare la *d.d.p.* V_{AB} richiesta, poiché:

$$V_{AB} = R_0 I_0 = -1200 \cdot 0{,}10 = -120 \text{ volt},$$

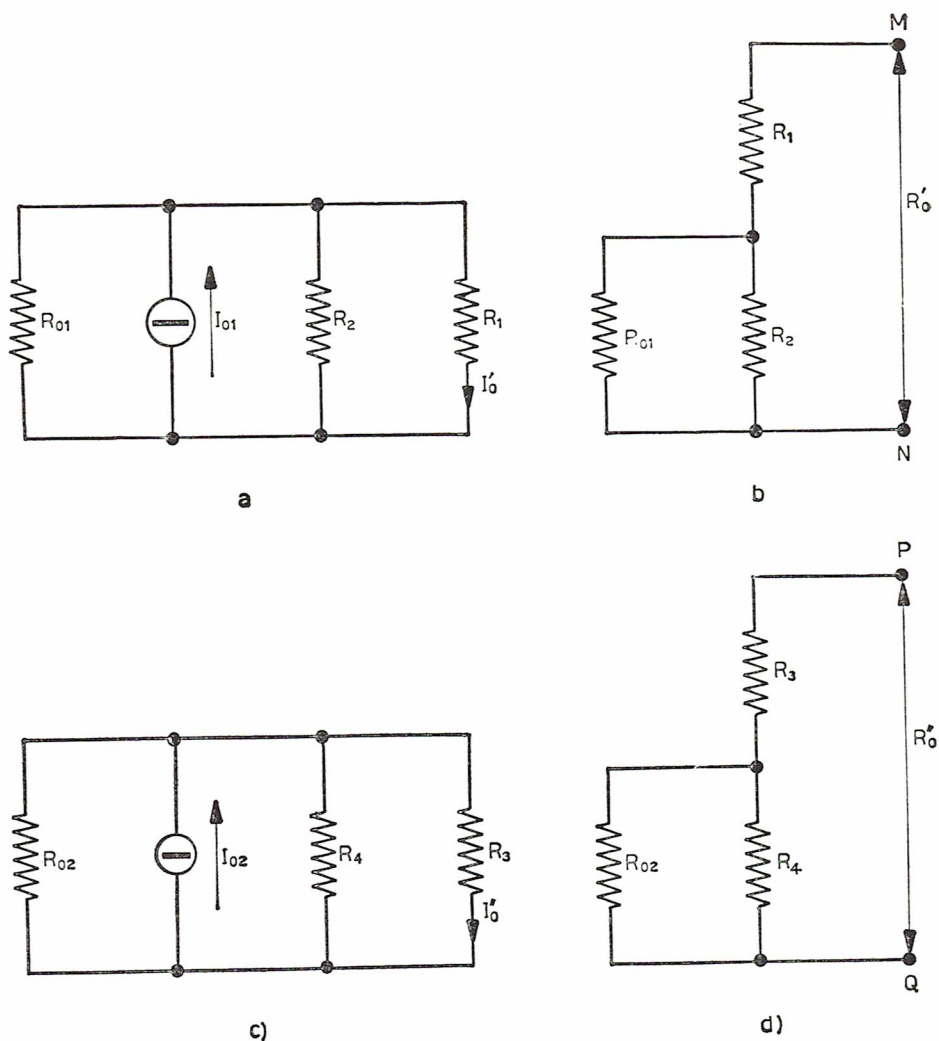



Fig. 2.1313-3

cioè il punto A risulta a potenziale negativo rispetto a B e la *d.d.p.* ammonta a 120 volt.

Esercizio 2.1314

Si trovi il valore della tensione esistente fra i punti A e B della rete studiata nell'esercizio 2.132, applicando il principio di Norton.

Soluzione

Conviene trasformare i tre rami contenenti i generatori di tensione

in tre generatori di corrente mediante appunto il principio di Norton. La rete di fig. 2.132-1 assumerà perciò la configurazione riportata in fig. 2.1314-1*a* nella quale, per essere $R_{01} = R_1 = 4$ ohm, $R_{02} = R_2 = 2$ ohm, $R_{03} = R_3 = 2$ ohm, risulta :

$$I_{01} = \frac{V_{01}}{R_{01}} = \frac{100}{4} = 25\text{ A} \; ; \; I_{02} = \frac{V_{02}}{R_{02}} = \frac{90}{2} = 45\text{ A} \; ; \; I_{03} = \frac{V_{03}}{R_{03}} = \frac{60}{2} = 30\text{ A}.$$

Del resto la rete di fig. 2.1314-1*a* si potrà ridurre a quella riportata

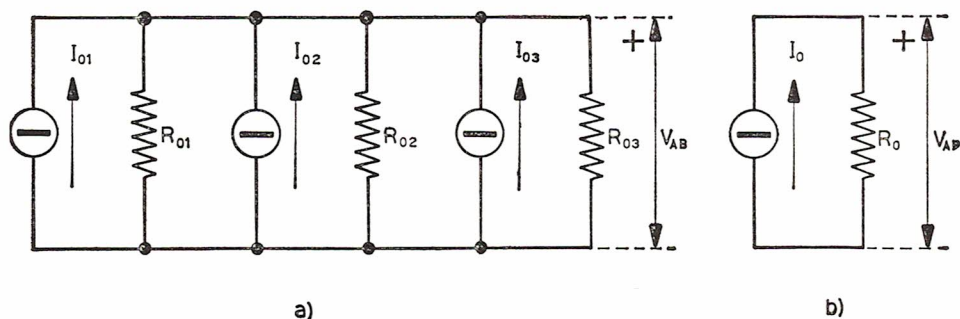



Fig. 2.1314-1

in fig. 2.1314-1*b* dove $I_0 = I_{01} + I_{02} + I_{03} = 25 + 45 + 30 = 100$ A e la resistenza interna R_0 ammonta a :

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_{01}} + \frac{1}{R_{02}} + \frac{1}{R_{03}}} = \frac{1}{0{,}25 + 0{,}50 + 0{,}50} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}80 \text{ ohm} .$$

In definitiva quindi la tensione fra i punti A e B varrà, con riferimento al circuito di fig. 2.1314-1*b*, :

$$V_{AB} = R_0 \cdot I_0 = 0{,}80 \cdot 100 = 80 \text{ volt} .$$

Esercizio 2.1315

Fra i punti B e D della maglia riportata in fig. 2.1315-1*a* si deve inserire una resistenza R_{BD}. Si trovi il valore da assegnare a questa resistenza affinché la tensione V_{BD}, ad inserzione avvenuta, risulti di 10 volt. Si noti che le correnti I_A, I_B, I_C, I_D rimangono sempre al loro valore segnato in fig. 2.1315-1*a*, anche dopo l'inserzione della resistenza R_{BD}.

Soluzione

La soluzione del problema può essere impostata ricorrendo al principio di Thévenin. Si tratterà allora di trovare il valore della tensione fra i punti B e D in assenza della resistenza R_{BD} (tensione a vuoto V_0) e il valore della resistenza R_0 (resistenza interna) che appare fra i punti B e D sempre in assenza della resistenza R_{BD}.

Il calcolo della tensione V_0 comporta la conoscenza delle correnti

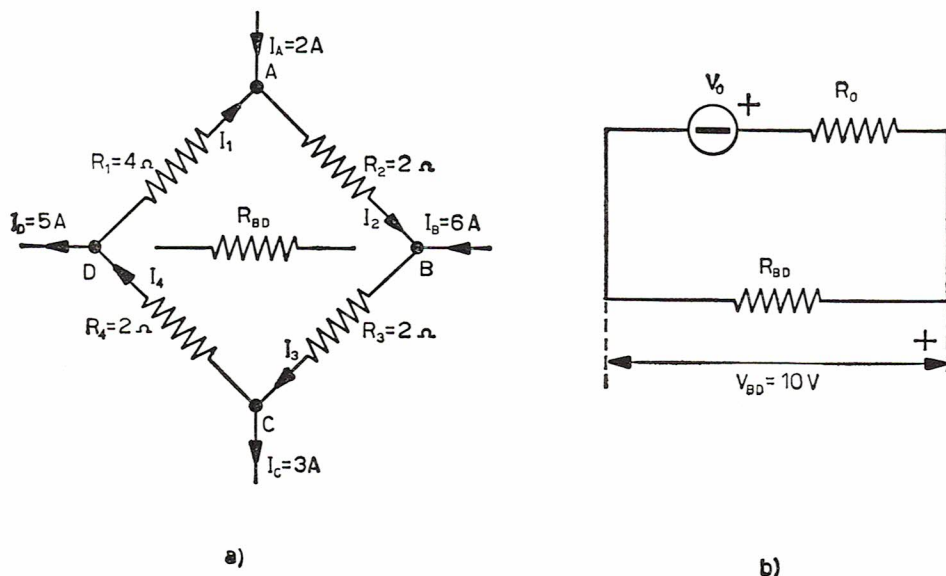



Fig. 2.1315.1

I_1 e I_2. A tale scopo basterà risolvere la rete di fig. 2.1315-1*a*, ad esempio scrivendo il 2° principio di Kirchhoff per la maglia $ABCDA$, dopo aver imposto alle correnti il verso destrogiro (arbitrario) che appare in figura:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0 \ .$$

Osservando però che:

$$I_2 = I_1 + I_A = I_1 + 2$$

$$I_3 = I_2 + I_B = I_1 + 8$$

$$I_4 = I_3 - I_C = I_1 + 5 \ ,$$

l'equazione sopra scritta risulta nella sola incognita I_1:

$$R_1 I_1 + R_2(I_1 + 2) + R_3(I_1 + 8) + R_4(I_1 + 5) = 0 \ ,$$

da cui, sviluppando ed ordinando, si ricava che:

$$I_1 = -\frac{2R_2 + 8R_3 + 5R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = -\frac{4 + 16 + 10}{4 + 2 + 2 + 2} = -3 \text{ ampere}$$

e quindi:

$$I_2 = I_1 + I_A = -3 + 2 = -1 \text{ ampere} .$$

La *d.d.p.* fra i punti B e D, a vuoto, ammonterà perciò a:

$$V_0 = V_{BD} = -R_2 I_2 - R_1 I_1 = 2 + 12 = 14 \text{ volt} .$$

Il calcolo di R_0, cioè della resistenza vista entro la rete fra i punti B e D, risulta d'altronde assai facile perché R_0 altro non è che il parallelo dei due rami BAD e BCD, poiché le correnti I_A, I_B, I_C, I_D possono pensarsi dovute a generatori ideali di corrente in quanto queste correnti rimangono costanti, come è stato precisato nell'enunciato dell'esercizio, al variare delle condizioni di carico. Sarà perciò:

$$R_0 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{(4 + 2)(2 + 2)}{4 + 2 + 2 + 2} = 2{,}4 \text{ ohm} .$$

Pertanto, con riferimento al circuito equivalente di fig. 2.1315-1*b*, si potrà scrivere finalmente:

$$V_{BD} = \frac{V_0}{R_0 + R_{BD}} R_{BD} = \frac{14}{2{,}4 + R_{BD}} R_{BD} = 10 \text{ volt}$$

da cui si ricaverà agevolmente che:

$$R_{BD} = 6 \text{ ohm} .$$

Questo è dunque il valore da assegnare a R_{BD} affinché ai suoi capi la rete elettrica data, alimentata nei suoi quattro nodi da generatori ideali di corrente, determini la *d.d.p.* di 10 volt come richiesto dal problema.

Esercizio 2.1316

Si trovi mediante il principio di Millman il valore della corrente nel carico R_c della rete studiata nell'esercizio 2.137.

Soluzione

La corrente nel ramo R_c varrà ovviamente $I_c = \frac{1}{R_c} V_{AB}$, quindi:

$$I_c = \frac{1}{R_c} \frac{\frac{V_{01}}{R_1} + \frac{V_{02}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_c}} = \frac{1}{2} \frac{4{,}50 + 3}{0{,}50 + 0{,}50 + 0{,}50} = 2{,}50 \text{ ampere},$$

e il suo verso sarà quello che rende la caduta di tensione in R_c con la polarità positiva nel punto A.

Esercizio 2.1317

Conoscendo solamente il valore della corrente che circola nel 5º ramo

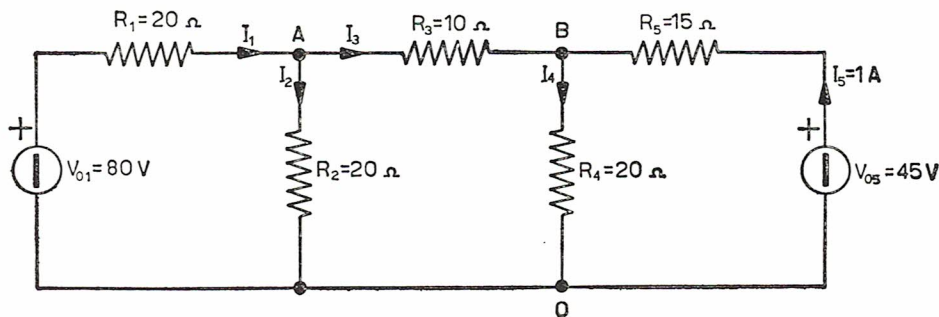



Fig. 2.1317-1

($I_5 = 1$ A), si calcolino i valori delle altre quattro correnti circolanti nella rete elettrica riportata in fig. 2.1317-1.

Soluzione

Si inizierà col fissare dei versi (arbitrari) alle correnti incognite, come quelli che sono stati riportati ad esempio nel circuito di fig. 2.1317-1.

D'altronde, nota la corrente che circola nella resistenza R_5, sarà nota immediatamente la *d.d.p.* fra i punti B ed O. Infatti:

$$V_{BO} = V_{05} - R_5 I_5 = 45 - 15 = 30 \text{ volt},$$

e quindi la corrente I_4 varrà:

$$I_4 = \frac{V_{BO}}{R_4} = \frac{30}{20} = 1{,}50 \text{ ampere} ,$$

con il verso che va da B ad O. Il verso assegnato arbitrariamente allo inizio è dunque giusto.

Si potrà scrivere ora il primo principio di Kirchhoff per il nodo B, allo scopo di ricavare il valore della corrente I_3. Risulta così che:

$$I_3 = I_4 - I_5 = 1{,}50 - 1{,}00 = 0{,}50 \text{ ampere} ,$$

per cui la *d.d.p.* fra i punti A e B varrà $V_{AB} = R_3 I_3 = 5$ volt e quindi:

$$V_{AO} = V_{AB} + V_{BO} = 5 + 30 = 35 \text{ volt} .$$

Nota così la *d.d.p.* fra i punti A ed O, si calcolerà immediatamente la corrente I_2 che attraversa la resistenza R_2, poiché:

$$I_2 = \frac{V_{AO}}{R_2} = \frac{35}{20} = 1{,}75 \text{ ampere} ,$$

con il verso che va da A ad O.

Per conoscere la corrente I_2 basterà applicare il primo principio di Kirchhoff al nodo A. Si otterrà così subito:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 1{,}75 + 0{,}50 = 2{,}25 \text{ ampere} .$$

Il verso segnato in figura è dunque giusto.

La rete è stata quindi risolta completamente.

Esercizio 2.1318

Conoscendo il valore e il verso della corrente I_5 che circola nella resistenza R_5 della rete di fig. 2.1318-1, si trovino i valori delle correnti che percorrono le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 e quello della corrente erogata dal generatore ideale di tensione.

Soluzione

Per trovare ad esempio il valore della corrente I_1 basterà scrivere la seguente equazione, espressione del 2° principio di Kirchhoff applicato alla maglia comprendente il generatore e le resistenze R_1 ed R_2:

$$V = R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_5) ,$$

da cui:

$$I_1 = \frac{V - R_2 I_5}{R_1 + R_2} = \frac{100 - 40 \cdot 0{,}1}{100 + 40} = 0{,}686 \text{ ampere};$$

si conoscerà così immediatamente il valore della corrente I_2 poiché:

$$I_2 = I_1 + I_5 = 0{,}686 + 0{,}1 = 0{,}786 \text{ ampere}.$$

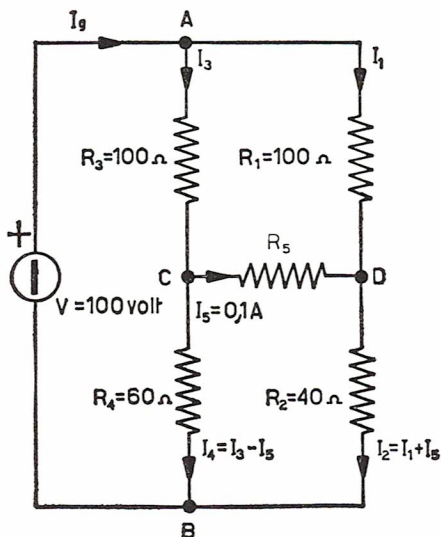



Fig. 2.1318-1

Per trovare il valore della corrente I_3 si scriverà ancora il 2° principio di Kirchhoff, applicato questa volta alla maglia comprendente il generatore V e le resistenze R_3 ed R_4,:

$$V = R_3 I_3 + R_4 (I_3 - I_5) ,$$

da cui:

$$I_3 = \frac{V + R_4 I_5}{R_3 + R_4} = \frac{100 + 60 \cdot 0{,}1}{100 + 60} = 0{,}662 \text{ ampere};$$

e quindi:

$$I_4 = I_3 - I_5 = 0{,}662 - 0{,}100 = 0{,}562 \text{ ampere}.$$

Il generatore erogherà d'altronde la seguente corrente:

$$I_g = I_1 + I_3 = 0{,}686 + 0{,}662 \cong 1{,}35 \text{ ampere}.$$

Esercizio 2.1319

Si calcoli il valore della corrente I che circola nel collegamento CD privo di resistenza della rete riportata in fig. 2.1319-1.

Soluzione

S' incominci a calcolare il valore della corrente I_g che il generatore V eroga all' insieme costituito dalle quattro resistenze. Questa corrente,

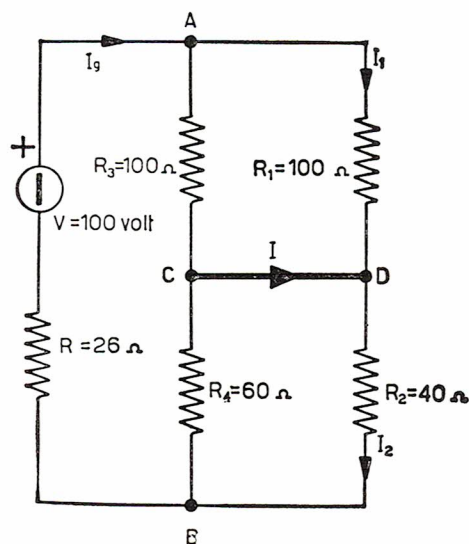



Fig. 2.1319-1

indicando con R' il parallelo di R_1 con R_3 e con R'' il parallelo di R_2 con R_4, vale:

$$I_g = \frac{V}{R + R' + R''} = \frac{100}{26 + \frac{100 \cdot 100}{200} + \frac{60 \cdot 40}{100}} = 1 \text{ ampere} .$$

Del resto fra i punti A e B vi sarà una *d.d.p.* V_{AB} che ammonta a:

$$V_{AB} = V - RI_g = 100 - 26 = 74 \text{ volt} ,$$

per cui si avrà:

$$V_{AC} = \frac{V_{AB}}{R' + R''} R' = \frac{74}{50 + 24} 50 = 50 \text{ volt} .$$

$$V_{CB} = V_{AB} - V_{AC} = 74 - 50 = 24 \text{ volt} .$$

Di conseguenza la corrente I_1 nella resistenza R_1 varrà:

$$I_1 = \frac{V_{AC}}{R_1} = \frac{50}{100} = 0,50 \text{ ampere},$$

e la corrente I_2 nella resistenza R_2 ammonterà a:

$$I_2 = \frac{V_{CB}}{R_2} = \frac{24}{40} = 0,60 \text{ ampere}.$$

Scrivendo ora il 1° principio di Kirchhoff per il nodo D, si ha in conclusione che la corrente I vale:

$$I = I_2 - I_1 = 0,60 - 0,50 = 0,10 \text{ ampere}$$

ed ha il verso da C a D.

Esercizio 2.1320

Si trovi il valore della corrente I erogata dal generatore V_0 facente parte della rete riportata in fig. 2.1320-1.

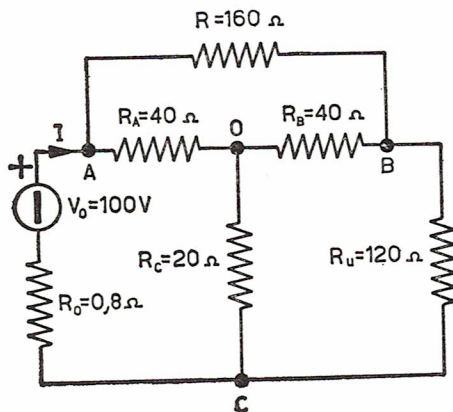



Fig. 2.1320-1

Soluzione

Si può iniziare col sostituire ad esempio la stella di centro O, formata dalle tre resistenze R_A, R_B, R_C, con il triangolo equivalente allo scopo di semplificare la struttura della rete, che in questo modo assume la configurazione di fig. 2.1320-2.

D'altronde, per le formule 2.11-4, 5, 6 date nel testo, si ha immediatamente che:

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A\, R_B}{R_C} = 40 + 40 + \frac{1600}{20} = 160 \text{ ohm} ,$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B\, R_C}{R_A} = 40 + 20 + \frac{800}{40} = 80 \text{ ohm} ,$$

$$R_{AC} = R_A + R_C + \frac{R_A\, R_C}{R_B} = 40 + 20 + \frac{800}{40} = 80 \text{ ohm} .$$

Indicando ora con R' il parallelo di R_{AB} con R (R' vale, con i dati

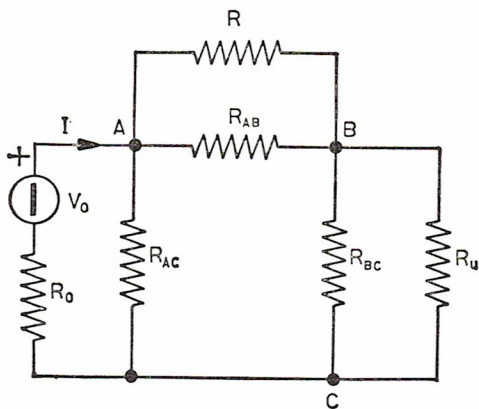



Fig. 2.1320-2

del problema, 80 ohm) e con R'' il parallelo di R_{BC} con R_u (R'' vale 48 ohm), dal circuito di fig. 2.1320-2 si otterrà finalmente che:

$$I = \frac{V_0}{R_0 + \dfrac{R_{AC}\,(R' + R'')}{R_{AC} + R' + R''}} = \frac{100}{0{,}8 + 49{,}2} = 2 \text{ ampere} .$$

ELETTROSTATICA 3

3.1 Campo elettrico nel vuoto

3.11 Introduzione

Si supponga di portare un corpo carico di elettricità in uno spazio vuoto, in uno spazio cioè ove non vi sia materia. Ora si chiede se quella certa porzione di spazio considerata, che sta attorno al corpo carico, assolutamente fermo per ipotesi, non abbia a mostrare, per opera delle cariche elettriche portate dal corpo stesso, nuove proprietà e caratteristiche.

Indubbiamente l' intuizione e la logica suggeriscono a tale proposito che lo spazio considerato non può trovarsi nelle stesse identiche condizioni di quelle che si avevano quando non esisteva il corpo carico. La teoria e l'esperienza confermano d'altronde quanto ora è stato detto. Per questo motivo, allo scopo di tener conto di questo nuovo stato di cose, si dice che il corpo carico di elettricità ha fatto nascere nello spazio ad esso circostante un *campo elettrico*.

Ogni carica elettrica crea dunque attorno a sé un campo elettrico, ed è appunto con questo nuovo ente fisico che si terrà conto della presenza delle cariche elettriche nello spazio considerato. Uno spazio in cui vi siano delle cariche elettriche differisce quindi dallo spazio che ne sia privo esclusivamente per la presenza di un campo elettrico. Le proprietà di questo verranno studiate fra breve.

Naturalmente si intuisce che le cariche elettriche ferme, con la creazione dei relativi campi elettrici, dovranno dare origine a fenomeni assai interessanti. Di questi si occupa per l'appunto l'Elettrostatica del vuoto [1],

---

[1] Come si dimostrerà nel § 3.23 i fenomeni elettrostatici che si svolgono nell'aria non differiscono sensibilmente da quelli che si svolgono nel vuoto.

alla quale è dedicata la prima parte di questo terzo capitolo, e l'Elettrostatica dei dielettrici, alla quale è dedicata l'altra parte di questo stesso capitolo.

3.12 Forze di natura elettrostatica - Legge di Coulomb

Un fatto fisico interessante, dovuto ai campi elettrici, si ha ad esempio quando un corpo carico di elettricità viene a trovarsi in presenza di un altro corpo, pure esso carico di elettricità. Succede allora che sui due corpi vengono ad agire delle forze attrattive o repulsive, cioè delle forze che tendono ad avvicinare o ad allontanare i due corpi stessi, e ciò in dipendenza dall' intensità e dal segno manifestati dalle cariche elettriche possedute dai due corpi, come si vedrà fra breve. In sostanza si deve considerare che il campo elettrico generato da uno dei due corpi venga ad agire sull'altro corpo, e viceversa che il campo elettrico creato da questo ultimo agisca sul primo, determinando appunto quelle forze di natura elettrostatica di cui si è detto.

La prima importante conclusione che si può trarre è dunque la seguente : i campi elettrici agiscono sulle cariche elettriche mediante forze le quali sollecitano quindi i corpi che le posseggono.

È interessante stabilire a questo proposito la legge con la quale i corpi elettrizzati si attraggono o si respingono. Precisamente è stato dimostrato che quando due corpi, portanti rispettivamente la quantità di elettricità Q_1 e Q_2, si trovano ad una certa distanza d, sono soggetti ad una forza F esprimibile con la seguente formula (legge di Coulomb) :

3.12-1
$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2}.$$

Si tenga presente che la forza risulta repulsiva se Q_1 e Q_2 hanno lo stesso segno (vedi fig. 3.12-1*a*) ; mentre risulterà attrattiva se Q_1 e Q_2 presentano segno differente (vedi fig. 3.12-1*b*).

F ⟵⊕ ⊕⟶ F   F ⟵⊖ ⊖⟶ F
a)

⊖⟶ F   F ⟵⊕
b)

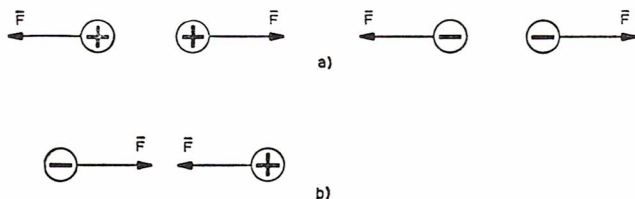



Fig. 3.12-1

Dalla formula 3.12-1 appare dunque tra l'altro che la forza F risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza alla quale si trovano le cariche elettriche : ciò fa sì che queste forze di natura elettrostatica, cioè queste forze che si manifestano fra corpi carichi di elettricità, abbiano a variare notevolmente col variare della distanza.

È importante ricordare subito come la forza risulti misurata in newton quando le cariche elettriche vengono espresse in coulomb, le distanze in metri e per la costante k, la cui espressione analitica è $1/4\pi\varepsilon_0$ (ε_0 è un parametro di cui si dirà più avanti), si assuma il seguente valore:

$$3.12\text{-}2 \qquad k = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{111{,}3 \cdot 10^{-12}} = 8{,}98 \cdot 10^{9}\,.$$

Va notato altresì che la legge di Coulomb vale esattamente solamente quando i due corpi sono puntiformi. Poiché in pratica i corpi non sono di queste dimensioni, la formula che esprime la legge di Coulomb è approssimata, ma l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più piccole saranno le dimensioni presentate dai due corpi in confronto con la loro distanza.

3.13 Campo elettrico

È stato detto all' inizio di questo capitolo che un corpo carico di elettricità crea nello spazio circostante un campo elettrico. Ma come svelare la sua presenza? Ora, dopo quanto è stato esposto nel precedente § 3.12, si intuisce che basterà impiegare come elemento rivelatore ad esempio una carica elettrica, tale però da non portare modificazioni al campo elettrico che si vuole studiare. In sostanza, occorrerà che questo corpo di prova sia puntiforme e che la sua carica sia infinitesima (dQ): solamente così sarà possibile non disturbare con la sua presenza il campo elettrico preesistente. Il metodo che si sta per descrivere è perciò ideale.

Che cosa succederà dunque ponendo tale minuscola carica puntiforme in un campo elettrico? Ovviamente che il campo elettrico non subirà modifiche, ma che su tale minuscolo corpo verrà ad agire una forza di natura elettrostatica, la quale dovrà dare certamente conto delle caratteristiche del campo elettrico in quel punto, ove cioè quel corpo di prova è stato collocato. Infatti l' intensità del campo elettrico si dedurrà dall' intensità presentata dalla forza, poiché la forza che agisce sulla carica rivelatrice dQ risulterà naturalmente proporzionale all' intensità del campo elettrico in quel punto. Ma il campo elettrico presenterà in quel punto anche una direzione ed un verso, poiché anche la forza considerata presenta una ben precisa direzione ed un ben determinato verso.

Si può affermare quindi che il campo elettrico, le cui proprietà risultano dunque da quelle di una forza, è certamente una grandezza fisica avente carattere vettoriale: quindi, per individuarlo in ogni punto dello spazio ove esso è presente, occorrerà conoscere la sua direzione, il suo verso, la sua intensità. Precisamente la sua direzione e il suo verso coincideranno rispettivamente con la direzione e con il verso della forza

che agisce sulla carica infinitesima *positiva* (1) posta nel punto considerato; mentre il suo modulo, indicato col simbolo K_0 (2), verrà espresso con la formula:

3.13-1
$$K_0 = \frac{dF}{dQ},$$

cioè come rapporto fra la forza infinitesima dF che agisce sulla carica infinitesima dQ e la quantità di elettricità della carica stessa.

Infatti è chiaro che la forza da sola non può dare la misura della intensità del campo elettrico, in quanto essa è sempre proporzionale alla quantità di elettricità posseduta dal corpo di prova. Poiché il risultato deve essere invece indipendente dal particolare valore della carica usata, l' intensità del campo elettrico non potrà che essere espressa dal rapporto fra la forza alla quale la carica rivelatrice è soggetta e la quantità di elettricità presentata dalla carica stessa.

Ed è proprio per questo motivo che, anche quando la quantità di elettricità della carica in oggetto non risulta infinitesima, ma finita, come avviene di solito nella realtà, il valore assunto dal campo elettrico K_0 nel punto dove è stata posta tale carica (3) potrà essere espresso col rapporto:

3.13-2
$$K_0 = \frac{F}{Q},$$

essendo F la forza che agisce appunto sulla carica Q. La formula ora trovata (3.13-2) ha dunque carattere generale. Da essa appare, tra l'altro, come il campo elettrico possa essere misurato in newton/coulomb. Tuttavia è bene precisare subito, a tale proposito, che questa unità di misura non viene mai usata poiché nel sistema Giorgi il campo elettrico risulta misurato in volt/metro, come si giustificherà nel § 3.18.

3.14 Linee di forza

Per quanto esposto nel paragrafo precedente si comprende come, per ogni punto dello spazio ove esiste un campo elettrico, sia possibile definire un vettore campo elettrico, e quindi come per individuare completamente un campo elettrico nello spazio sia necessario conoscere in ogni suo punto il relativo vettore. Questo verrà indicato con $\overline{K}_0$, poiché

---

(1) Per convenzione. Ciò del resto è in accordo con la convenzione sul verso positivo della corrente elettrica (§ 3.28).

(2) Coll' indice 0 si indicano le grandezze fisiche nel vuoto.

(3) In questo caso il campo K_0 è dovuto anche alla carica Q considerata, poiché tale carica ha modificato in maniera più o meno sensibile il campo elettrico preesistente.

con il simbolo K_0 (senza linea di soprassegno) si intende identificare esclusivamente, come è consuetudine, il suo modulo.

Ora, ai fini pratici, è molto comodo poter avere una rappresentazione grafica dell'andamento del campo elettrostatico dovuto alle cariche elettriche presenti in una certa regione di spazio. A tale scopo servono le cosiddette linee di forza. Sono queste delle curve (vedi fig. 3.14-1) che

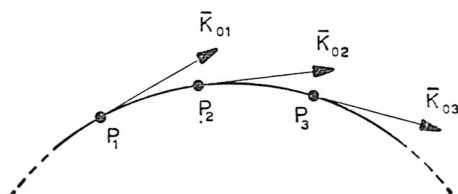



Fig. 3.14-1

hanno la particolare proprietà di avere in ogni punto per tangente il vettore campo elettrico $\overline{K}_0$. In sostanza si può anche dire che una linea di forza rappresenta la traiettoria che verrebbe a descrivere una minuscola carica elettrica (infinitesima, per non disturbare il campo preesistente) *positiva* qualora fosse libera di muoversi. Anzi, per convenzione, il verso delle linee di forza è proprio quello corrispondente al moto naturale delle cariche elettriche positive.

Si noti che per ogni punto dello spazio non può passare che una sola linea di forza, salvo il caso in cui nel punto considerato non sia concentrata una carica elettrica : in questa evenienza da quel punto ovviamente usciranno (od entreranno) più linee di forza. Scende quindi da ciò che le linee di forza non si incrociano mai.

Molte proprietà dei campi elettrici possono essere descritte tramite le relative linee di forza : di qui appunto la loro grande utilità. Ad esempio risulta che ove le linee di forza sono più fitte là il campo elettrico è certamente più intenso rispetto a dove le linee di forza sono più rade e viceversa.

3.15 Comportamento dei corpi conduttori

È bene precisare subito che nei fenomeni elettrostatici le superfici dei corpi conduttori sono sempre *equipotenziali*. Ciò vuol dire che tutti i punti della superficie hanno ovviamente la stessa differenza di potenziale rispetto ad un punto preso come riferimento, ossia anche che fra due punti qualsiasi della superficie non vi può essere una differenza di potenziale. Tutto questo è logico se si pensa che una *d.d.p.* fra due punti di uno stesso corpo conduttore esige delle cariche elettriche in movimento, mentre nella Elettrostatica i fenomeni sono dovuti invece a cariche elettriche assolutamente ferme.

Si deduce da quanto è stato ora detto come eventuali linee di forza elettrica interessanti la superficie di un conduttore debbano essere orto-

gonali ad essa: il campo elettrico su di una superficie non può avere cioè componenti tangenziali alla superficie del corpo conduttore (vedi fig. 3.15-1), perché se avesse tali componenti gli elettroni di conduzione sarebbero in movimento sotto l'azione di queste componenti, in contrasto quindi con l' Elettrostatica.

Altra proprietà presentata dalle cariche elettriche nei corpi conduttori elettrizzati è che queste si portano sempre in superficie. Infatti nell' interno di un conduttore, qualunque esso sia, non è possibile avere un

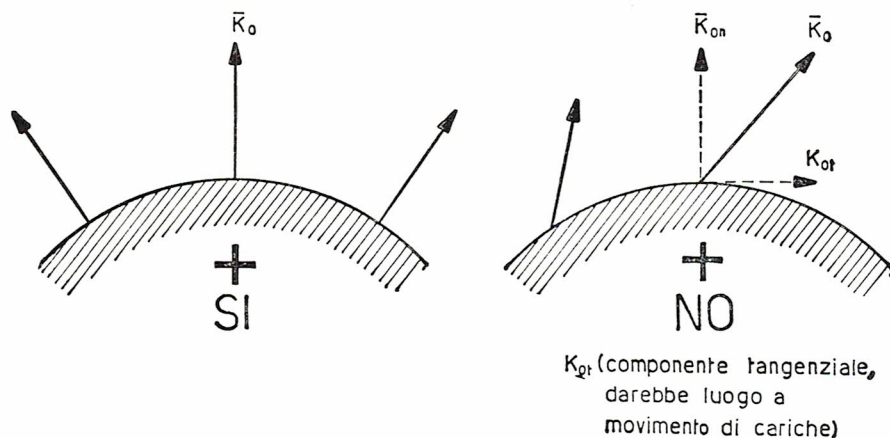



Fig. 3.15-1

campo elettrico. Questo deve essere infatti rigorosamente nullo, altrimenti gli elettroni di conduzione sarebbero in movimento, il che è in contrasto appunto con l' ipotesi di fenomeno statico. Ciò porta per conseguenza che le cariche elettriche non possono esistere accumulate allo interno di un corpo conduttore (la dimostrazione può essere condotta tramite il teorema di Gauss, che verrà enunciato nel § 3.111), ma solamente sulla sua superficie ed in modo tale che questa risulti equipotenziale.

Dopo quanto è stato esposto risulterà comprensibile come un corpo costituito da un sottile involucro metallico, chiuso, comunque sia il suo stato elettrico superficiale, avrà sempre nel suo interno un campo elettrico nullo. Ciò significa che nell' interno di questo corpo non potranno manifestarsi delle azioni elettrostatiche per causa dello stato elettrico superficiale e quindi anche, di conseguenza, per qualsiasi campo elettrico che potesse investirlo dall'esterno. Viceversa, eventuali corpi elettrizzati posti internamente all' involucro metallico, ma da esso isolati, daranno luogo fra di loro ai soliti fenomeni elettrostatici, e ciò indipendentemente dallo stato elettrico dell' involucro stesso.

È chiaro quindi che un corpo così fatto rappresenta uno *schermo elettrostatico*, cioè un dispositivo che sottrae quanto esso contiene alla azione dei campi elettrici esterni. Tale schermo potrà essere costituito in pratica mediante una lastra, o anche una pellicola, assai sottile, purché

di materiale buon conduttore (rame, ma anche carta stagnola, ad esempio) e tale da racchiudere *interamente* quanto deve essere schermato. Per schermature di più grande estensione si ricorre, per convenienza, all'uso di reti metalliche, o di gabbie metalliche, le quali svolgono ugualmente bene l'importante funzione dello schermaggio elettrostatico (1). La gabbia di Faraday ne è appunto un esempio.

3.16 Configurazione di particolari campi elettrici

È molto utile prendere visione delle configurazioni assunte dalle linee di forza dovute a particolari, quanto comuni, corpi conduttori carichi di elettricità.

Nel caso più semplice di una carica elettrica puntiforme isolata nello spazio, lontana praticamente cioè da altri corpi carichi (vedi fig. 3.16-1), le linee di campo elettrico sono costituite da tante semirette aventi per centro la carica data. Sono inoltre uniformemente distribuite (per evidenti ragioni di simmetria) e si irradiano all'infinito. Queste linee di forza d'altronde usciranno dal corpo puntiforme, o vi entreranno, secondoché questo si presenterà carico positivamente (fig. 3.16-1*a*) o negativamente (fig. 3.16-1*b*).

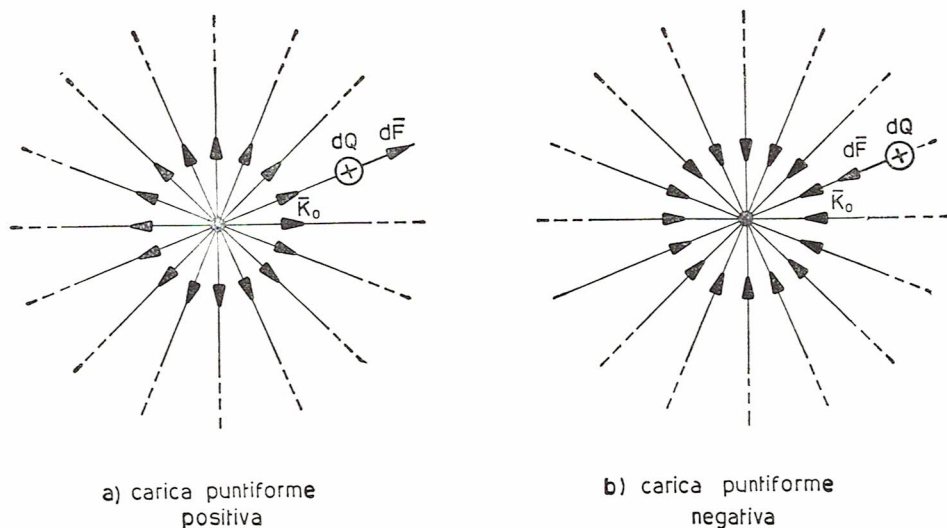



Fig. 3.16-1

(1) Purché le dimensioni delle *maglie* siano abbastanza piccole rispetto alle dimensioni dello schermo.

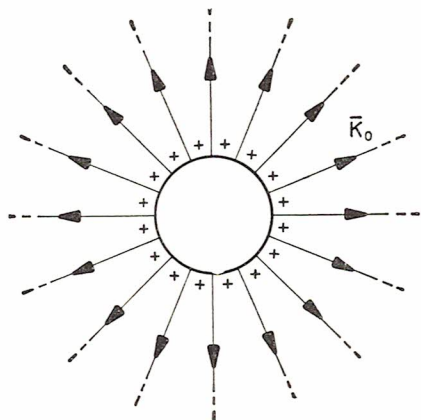
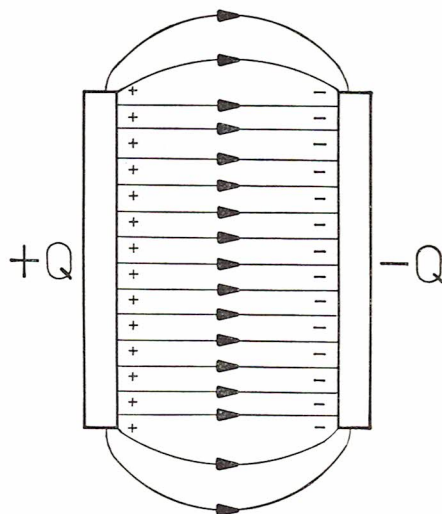



Fig. 3.16-2 *Fig. 3.16-3*

Nel caso in cui il corpo carico di elettricità non sia rigorosamente puntiforme, ma abbia una certa dimensione, ad esempio sia sferico, le linee di forza risultano ancora costituite da tante semirette regolarmente disposte nello spazio (vedi fig. 3.16-2) e tali come se provenissero dal centro del corpo. Ciò ancora per evidenti ragioni di simmetria.

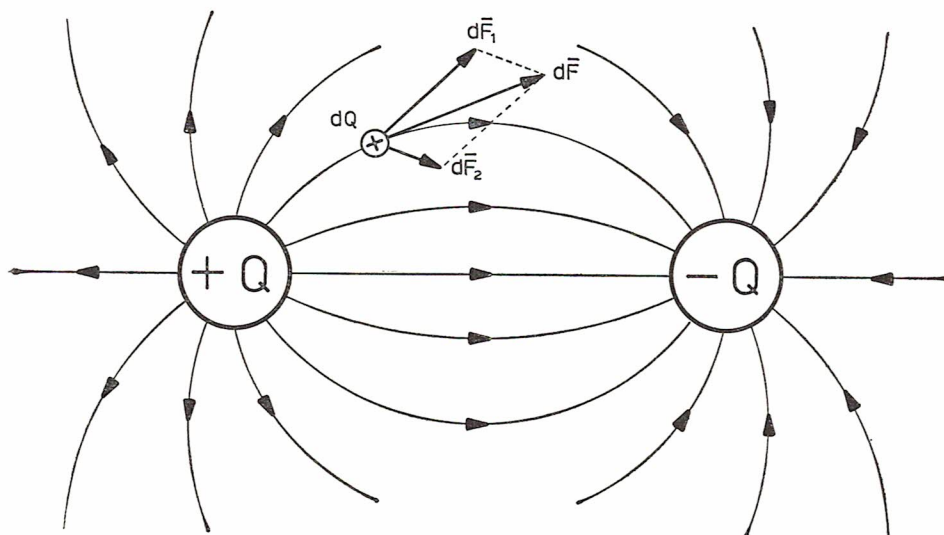



Fig. 3.16-4

D'altronde anche quando i corpi sono due, se portano cariche eguali in valore ma di segno contrario, le linee di forza, che si potranno trovare ad esempio pensando di esplorare lo spazio interessato mediante una

carica rivelatrice infinitesima dQ [1], presentano ancora andamenti abbastanza semplici, se i corpi sono di forma regolare, poiché allora vi sarà sempre un carattere di simmetria. Si vedano ad esempio le figg. 3.16-3 e 4, ove appare rispettivamente il campo elettrico esistente fra due corpi piani e paralleli e fra due corpi sferici.

In fig. 3.16-5 si è riportato invece il caso di un corpo sferico, carico

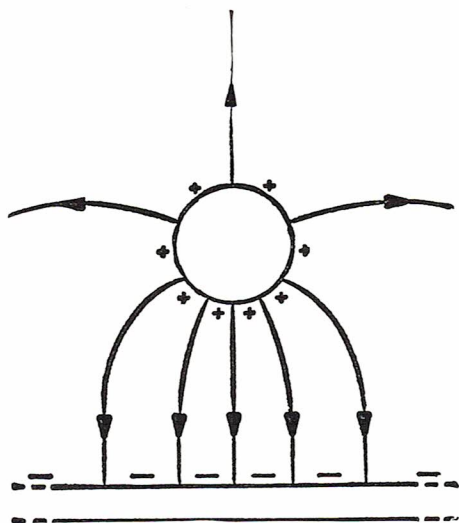



Fig. 3.16-5

positivamente, non molto lontano da un corpo piano molto esteso, carico negativamente.

Quando invece i corpi carichi sono più di due, le linee di forza assumono generalmente andamenti meno regolari, come la fig. 3.16-6 mostra chiaramente.

È importante concludere osservando come le linee di forza elettrica siano sempre in sostanza delle linee che congiungono cariche positive con cariche negative. I casi riportati nelle figg. 3.16-3, 4, 5, 6 sono sufficientemente chiari e convincenti, forse un po' meno quelli delle figg. 3.16-1 e 2, ove le linee di forza sembrano disperdersi nello spazio infinito senza raggiungere alcun altro corpo carico.

In realtà, come già si disse nel capitolo 1, poiché fisicamente le cariche elettriche non si generano, ma risultano da un'azione di separazione dando così luogo a cariche elettriche positive e negative in egual misura, si ha allora che, quando si considera una carica isolata nello spazio, come è stato supposto nelle figg. 3.16-1 e 2, in realtà si deve

---

[1] In questi casi sulla carica elettrica rivelatrice agirà la risultante delle forze elettrostatiche, ciascuna delle quali si troverà semplicemente considerando l'azione dovuta ad una singola carica.

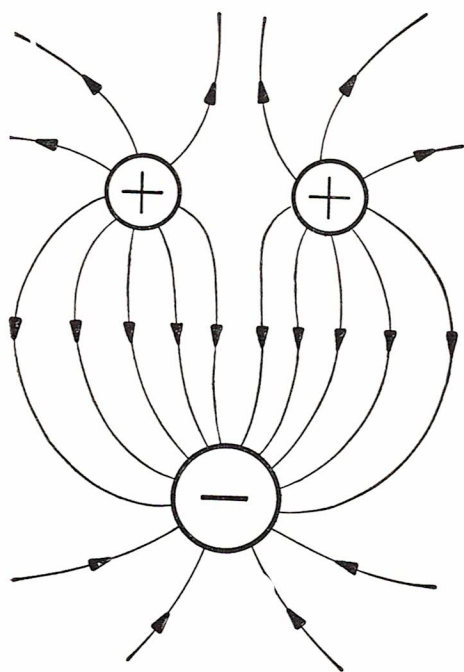



Fig. 3.16-6

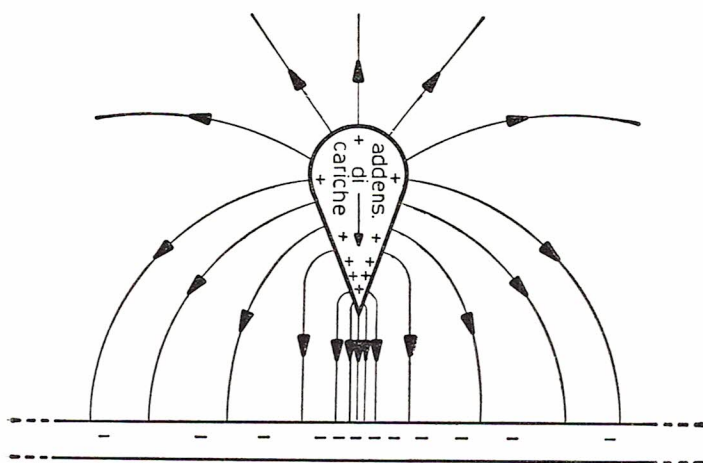



Fig. 3.16-7

considerare che la corrispettiva carica di segno opposto sia stata portata all' infinito. Cioè ad una carica Q, ad esempio positiva, concentrata in un certo punto dovrà corrispondere dislocato all' infinito un insieme di cariche per il complessivo valore Q, di segno opposto naturalmente. Le linee di forza raggiungeranno appunto all' infinito tali cariche.

È ancora importante aggiungere, dopo aver fatto l'osservazione che, in sostanza, le linee di forza costituiscono dei collegamenti ideali fra le

cariche elettriche di segno opposto dislocate nello spazio ([2]), come, ai fini della configurazione dei campi elettrici, abbia influenza perciò la distribuzione delle cariche elettriche sulla superficie dei corpi che ne costituiscono il supporto materiale (fa eccezione il caso del corpo puntiforme ovviamente, ma questo rappresenta del resto un caso ideale). A questo proposito si ricordi che le linee di forza sono sempre ortogonali alla superficie dei corpi conduttori, poiché le cariche elettriche si distribuiscono sulle loro superfici in modo tale che queste risultano equipotenziali (vedi ad esempio la fig. 3.16-7).

3.17 Condensatori elettrici - Capacità

Al sistema formato da due corpi metallici isolati fra di loro, fra i quali sia possibile stabilire un campo elettrico, si dà il nome di condensatore elettrico. I due corpi metallici isolati, che praticamente si realizzano mediante lastre, lamine o nastri metallici, tenuti fermi mediante adeguati supporti isolanti, costituiscono le cosiddette armature del condensatore. In fig. 3.17-1 si è riportato un condensatore piano, al quale

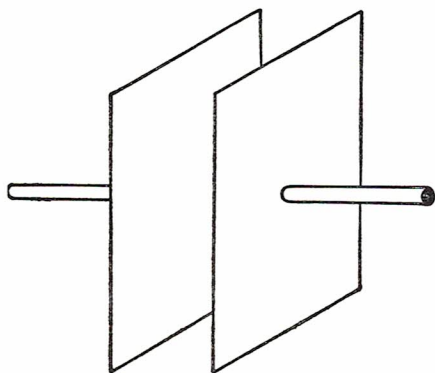



Fig. 3.17-1

si farà costantemente riferimento in questo paragrafo, per ragioni di semplicità.

È interessante capire anzitutto come in pratica sia possibile dislocare sulle due armature delle cariche elettriche di segno opposto, affinché fra le armature stesse possa nascere un campo elettrico. A tale scopo basta collegare le due armature ai poli di un generatore elettrico di tensione

---

([2]) Si può immaginare ad esempio che ciascuna linea di forza colleghi le cariche elettriche elementari di segno opposto. Ad esempio un elettrone con un atomo privo di un elettrone, e così via. Per questo motivo si può affermare che quando il campo elettrico è prodotto da più corpi carichi, l'insieme di linee di forza interessante un corpo risulterà direttamente proporzionale alla quantità di elettricità da esso posseduta.

continua (vedi fig. 3.17-2). Che cosa succederà all' istante in cui le armature verranno collegate al generatore? Evidentemente questo sottrarrà elettroni all'armatura che si trova collegata al polo positivo per portarli all'armatura collegata al polo negativo: tutto ciò continuerà fintantoché la forza interna del generatore elettrico riuscirà a portare elettroni dal polo positivo a quello negativo. Quando non riuscirà più in tale scopo, sarà perché anche fra le armature del condensatore si

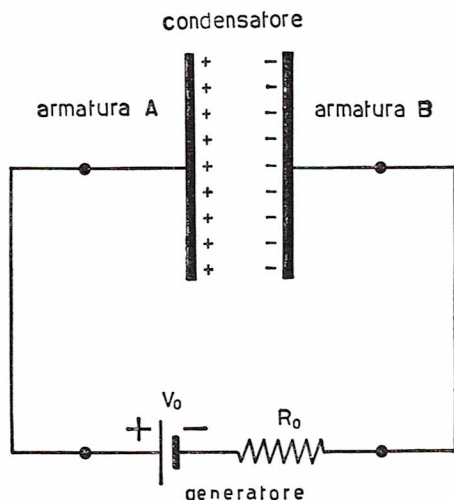



Fig. 3.17-2

sarà stabilita la tensione V_0 del generatore. In queste condizioni si è raggiunto lo stato di equilibrio: il fenomeno allora diventa *statico*.

Il risultato definitivo è dunque che l'armatura A (vedi fig. 3.17-2) porterà distribuita sulla sua faccia interna una quantità di elettricità positiva Q, mentre l'armatura B porterà distribuita sulla sua faccia interna [1] una eguale quantità di elettricità, ma negativa, e, cosa importante, fra le due armature esisterà una certa *d.d.p.* V, anzi, in questo caso, la stessa che il generatore presenta a vuoto (V_0).

Nello spazio compreso fra le due armature nascerà così un campo elettrico $\overline{K}_0$, le cui linee di forza saranno rettilinee ed uniformemente distribuite, salvo in prossimità dei bordi delle armature, come già si è visto nel precedente paragrafo (fig. 3.16-3), ove esse si presentano incurvate.

Dopo quanto è stato detto a proposito del processo fisico che porta a caricare un condensatore, si comprende come la quantità di elettricità dislocata su ciascuna armatura dipenda, oltre che dalle caratteristiche

---

[1] A dire il vero non tutte le cariche elettriche dello stesso segno si distribuiscono sulla faccia interna dell'armatura. Tuttavia queste hanno la tendenza sempre a portarsi sulla faccia interna perché spinte dalla forza attrattiva coulombiana che solo così risulta massima.

del sistema, anche dal valore della *f.e.m.* del generatore, poiché come fu esposto nel § 1.33, da questa dipende il numero di elettroni in eccesso che un generatore riesce a mantenere rispetto al suo polo positivo. Nel nostro caso, più precisamente si può affermare che il numero di elettroni in eccesso sull'armatura negativa dipende dal valore della *d.d.p.* che tale armatura ha rispetto a quella positiva.

Scende quindi che la quantità di elettricità Q dislocata su di una armatura risulta direttamente proporzionale alla *d.d.p.* V presente fra le due armature. Si potrà perciò scrivere, indicando con C il fattore di proporzionalità, che:

3.17-1 $$Q = C\,V\,.$$

Alla costante C è stato dato il nome di *capacità elettrica*. Per un dato condensatore la capacità rappresenta perciò la quantità di elettricità che esso può immagazzinare quando fra le sue armature la *d.d.p.* è uguale ad 1 volt. Infatti, per la 3.17-1, la capacità C viene definita come segue:

3.17-2 $$C = \frac{Q}{V}.$$

Naturalmente la capacità C risulta una nuova grandezza elettrica, in quanto essa, come si è visto, viene espressa da un rapporto di grandezze elettriche ben definite. La sua unità di misura, il coulomb/volt, ha ricevuto il nome di farad (abbreviato F). Per definizione si ha dunque:

3.17-3 $$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}}.$$

Si noti a questo proposito che 1 farad rappresenta una capacità elettrica enorme, praticamente non realizzabile. Per questo motivo saranno ricorrenti solo i suoi sottomultipli, come il microfarad (abbr. $\mu F = 10^{-6}$ F), che rappresenta già una capacità grande, il nanofarad (abbr. $nF = 10^{-9}$ F) per le capacità di valore intermedio e il picofarad (abbr. $pF = 10^{-12}$ F) per le piccole capacità.

Risulta da quanto sopra esposto che la capacità di un condensatore è una grandezza misurabile. Ciò si realizza in pratica mediante speciali apparecchiature di misura (ponti). D'altra parte sono stati costruiti dei condensatori campione al fine di poter disporre di capacità note con grande precisione.

3.18 Potenziale elettrostatico

Il caso trattato nel precedente paragrafo, pur costituendo un sistema elettrostatico particolare (condensatore piano), permette alcune utili

osservazioni e deduzioni. Si ricorda qui come, tra l'altro, si è fisicamente dimostrata l'esistenza di una *d.d.p.* fra le armature di un condensatore piano quando esso è sede di un campo elettrico. Infatti, se non fosse presente una *d.d.p.* ai capi del condensatore, questo risulterebbe scarico e quindi privo di campo elettrico. A questo proposito, ora è logico pensare che nel caso non solo del condensatore piano, ma di un qualsiasi sistema elettrostatico, quando fra due corpi si manifesta un campo elettrico, debba esistere pure fra gli stessi corpi una certa differenza di potenziale, e viceversa.

Si deduce così che differenze di potenziale e campi elettrici debbono costituire coppie di grandezze elettriche fra di loro indissolubili. E questa

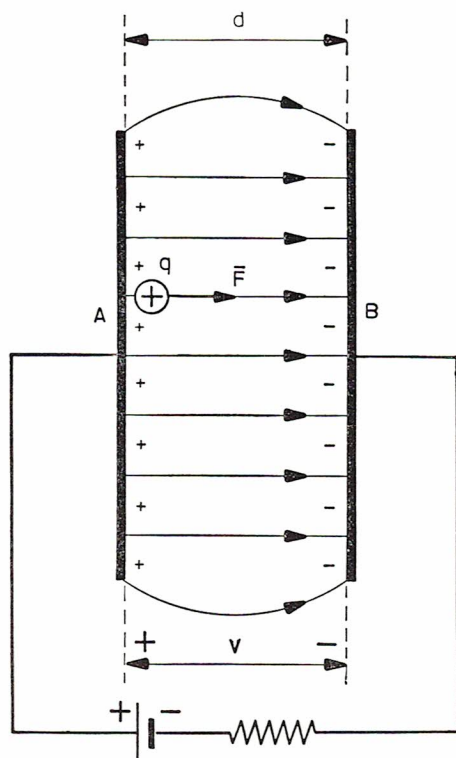



Fig. 3.18-1

proprietà dovrà essere generale. Arrivati a questa conclusione non resta che cercare quale sarà la relazione che intercorre nei sistemi elettrostatici fra le due grandezze ora nominate.

A tale scopo, per ragioni di semplicità, si incominci a considerare un condensatore piano, costituito da due armature piane e parallele distanti d, caricato alla tensione V, ed una sua qualsiasi linea di forza, purché lontana dai bordi, la quale risulterà così rettilinea e lunga d (ad es. linea AB di fig. 3.18-1). Si pensi ora di portare sull'armatura positiva del condensatore, là dove parte la linea di forza scelta come sopra (punto A),

una piccola carica positiva q, tale da non alterare il campo elettrico preesistente, e di lasciarla quindi libera di muoversi. È chiaro che questa carica elettrica verrà spinta da una forza $F = qK_0$. Tale forza risulta costante su tutta la linea di forza considerata in quanto, come si dimostrerà nel § 3.112, il campo K_0 lungo una qualsiasi linea di forza di un condensatore piano è sempre di valore costante. Pertanto, quando la carica q considerata sarà arrivata sull'altra armatura (punto B), avrà compiuto il seguente lavoro meccanico L:

3.18-1 $$L = \text{forza} \cdot \text{spostamento} = F \cdot d = qK_0 d \,.$$

D'altronde, nello stesso tempo, lo spostamento della carica tra le due armature, fra le quali esiste la differenza di potenziale V, ha richiesto un'energia elettrica W (vedi fig. 3.18-1 e formula 1.33-1) ammontante a:

3.18-2 $$W = qV \,.$$

Poiché il lavoro L compiuto dalla carica elettrica considerata nel muoversi fra le due armature deve essere eguale, per il principio della conservazione dell'energia, all'energia W ricevuta si potrà scrivere che:

3.18-3 $$qK_0 d = qV \,,$$

e quindi ricavare immediatamente l'espressione del campo elettrico K_0:

3.18-4 $$K_0 = \frac{V}{d} \,.$$

Questa è appunto la relazione che lega, in un condensatore piano il valore del campo elettrico al valore della differenza di potenziale presente fra le sue armature: una legge come si vede di perfetta proporzionalità, essendo $\frac{1}{d}$ il fattore di proporzionalità.

Il risultato ottenuto in 3.18-4 è importante perché permette subito di intuire come, presi due punti qualsiasi P_1 e P_2 su di una certa linea di forza (vedi fig. 3.18-2), fra questi due punti dovrà esserci sicuramente una certa differenza di potenziale, così come fra gli estremi della stessa linea di forza considerata (punti A e B) dovrà esistere una differenza di potenziale maggiore della precedente, poiché maggiore è la distanza fra i punti considerati. In sostanza lungo una qualsiasi linea di forza il potenziale (1) (elettrostatico, poiché i fenomeni qui considerati sono

(1) Per potenziale in un punto si intende la differenza di potenziale fra il punto considerato ed un altro punto preso come riferimento, le cui caratteristiche siano quindi immutabili. Quest'ultimo punto è di solito un punto di terra. I potenziali sono allora delle *d.d.p.* considerate rispetto a terra.

dovuti a cariche assolutamente ferme) andrà diminuendo nello stesso verso presentato dalla linea di forza.

Il caso trattato (fig. 3.18-2) è indubbiamente molto generale. E sarà certamente interessante vedere come ora risulterà legato il campo elettrico in un punto (ad esempio P' di fig. 3.18-2) al potenziale elettrostatico in quel punto stesso. A tale scopo, si consideri ancora una piccola carica positiva q posta nel punto P' ove il campo elettrico ha il valore K_0 e si lasci quindi che questa carica, sotto l'azione della forza $F = qK_0$, si sposti di un tratto infinitesimo dl lungo la linea di forza passante per P'. La carica di conseguenza compirà il lavoro meccanico $dL = Fdl = qK_0 dl$; mentre il sistema elettrico le fornirà l'energia $dW = -qdV$ (²), essendo dV la differenza di potenziale infinitesima esistente fra gli estremi del tratto infinitesimo dl percorso (cioè fra i punti P' e P'' di fig. 3.18-2).

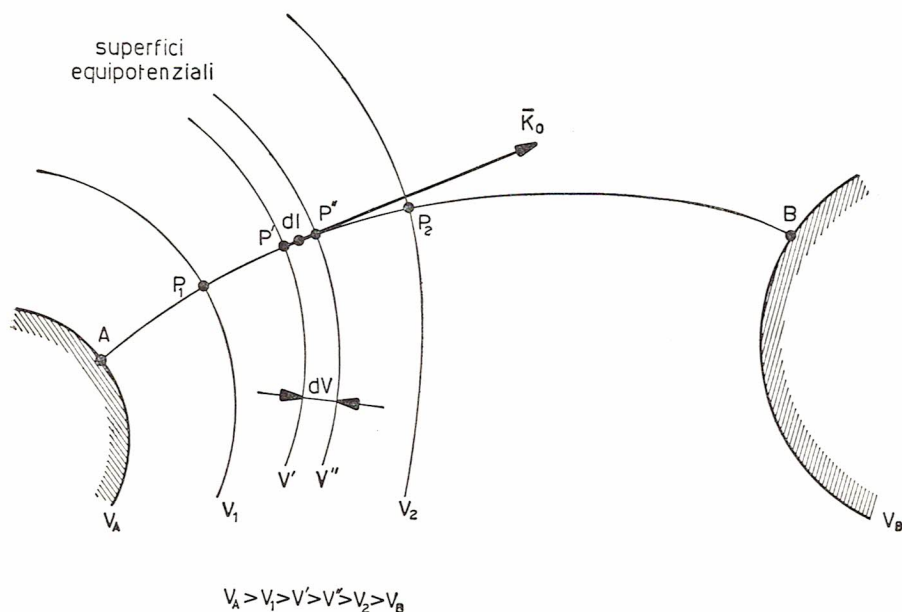



Fig. 3.18-2

Poiché $dL = dW$, per il principio della conservazione dell'energia, si ha che $qK_0 dl = -qdV$ e quindi in definitiva che:

3.18-5 $$K_0 = -\frac{dV}{dl}.$$

Il campo elettrico risulta perciò ora definibile come rapporto fra la variazione che subisce il potenziale elettrostatico nello spostamento infi-

---

(²) $dW = q(V' - V'')$, poiché $V' > V''$. Solamente che $dV = V'' - V'$, per definizione matematica; risulta così: $dW = q(V' - V'') = q(-dV)$.

nitesimo lungo la linea di forza nell' intorno del punto in cui si considera il campo elettrico e lo stesso spostamento ([3]). Si comprende così come la 3.18-4 sia un caso particolare della 3.18-5.

Si può concludere pertanto affermando che fra due punti di una *stessa* linea di forza esiste sempre una certa differenza di potenziale, la quale risulterà tanto più grande quanto più saranno lontani i punti considerati. Fra punti non appartenenti alla stessa linea di forza vi sarà ancora una certa *d.d.p.*, purché i due punti non appartengano ad una stessa superficie equipotenziale, caso contrario ovviamente la *d.d.p.* sarà certamente nulla (vedi *d.d.p.* fra i diversi punti di fig. 3.18-3).

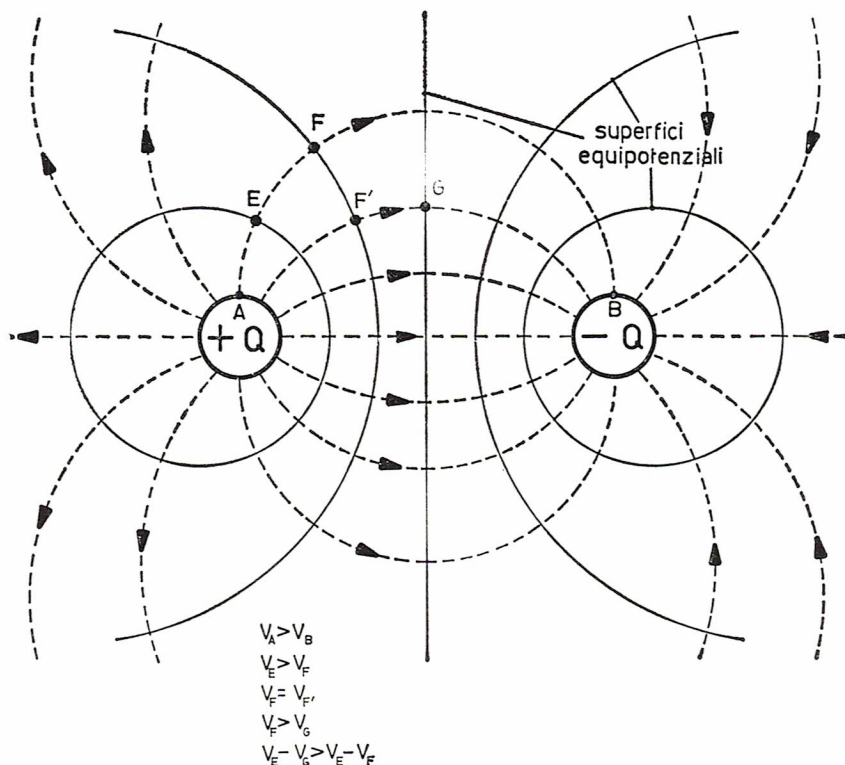



Fig. 3.18-3

Si ricordi d'altronde che sono superfici equipotenziali tutte le superfici ortogonali alle linee di forza elettrica. Infatti, per quanto precisato nella nota 3 di questo paragrafo, il campo elettrico non può presentare

([3]) La definizione è ancora valida anche se lo spostamento non avviene lungo una linea di forza. In tal caso, detto ds lo spostamento e dV la *d.d.p.* che esiste agli estremi di questo tratto infinitesimo, l'espressione $-\dfrac{dV}{ds}$ rappresenta il valore della componente del campo elettrico nella direzione dello spostamento s. Quindi:

una componente su di una superficie equipotenziale. Naturalmente ogni superficie equipotenziale sarà caratterizzata da un ben definito potenziale. Fra due superfici equipotenziali esisterà perciò una certa *d.d.p.* : questa sarà tanto più grande quanto più lontane risulteranno fra di loro le due superfici. Si veda ancora la fig. 3.18-3, dove sono state riportate le linee di forza e le relative tracce delle superfici equipotenziali che giacciono nel piano contenente i centri dei due conduttori sferici A e B.

Un' ultima osservazione. La formula 3.18-4, ma anche la 3.18-5, permette di dare al campo elettrico una unità di misura assai semplice e nello stesso tempo molto significativa, poiché esso, risultando come rapporto fra una tensione ed una lunghezza, verrà misurato in volt/metro (abbreviazione V/m). Questa è appunto l' unità che è stata fissata dal sistema Giorgi per il campo elettrico.

3.19 Induzione elettrostatica

Se un corpo conduttore, isolato e scarico, di forma qualsiasi, viene avvicinato da un corpo carico di elettricità si nota che esso si elettrizza. Precisamente (vedi fig. 3.19-1) si ha che la parte più vicina

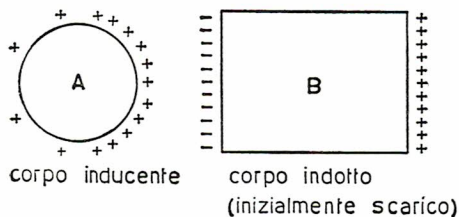



Fig. 3.19-1

al corpo carico viene a manifestare rispetto a questo cariche di segno opposto, mentre la parte più lontana manifesta cariche dello stesso segno. La zona centrale del corpo conduttore in questione risulta invece non elettrizzata.

Questo è il fenomeno della *induzione elettrostatica*. Il corpo carico che determina il fenomeno viene detto *inducente*, mentre quello che subisce il fenomeno viene chiamato col nome di corpo *indotto*. Le cariche elettriche di quest' ultimo si diranno naturalmente *indotte* anch'esse.

È importante aggiungere subito che, se il corpo inducente perdesse la sua carica elettrica o se venisse allontanato, allora dal corpo indotto sparirebbero le cariche indotte, il corpo indotto cioè tornerebbe nelle sue identiche condizioni iniziali.

3.18-5′ $$K_{0s} = -\frac{dV}{ds}\,.$$

Si noti che l' intensità del campo elettrico viene talvolta indicata col nome di *gradiente del potenziale*. La giustificazione di questa espressione sta nella 3.18-5′.

La ragione fisica di questo fenomeno sta nel fatto che gli elettroni di conduzione, presenti nel corpo indotto, subiscono inevitabilmente le azioni di forza da parte del campo elettrico del corpo inducente. Poiché gli elettroni di conduzione sono mobili, questi, sotto l'azione delle suddette forze elettrostatiche, incominceranno a spostarsi. Un certo numero di elettroni allora, a causa di questa azione di scorrimento, verrà ad accumularsi, in superficie, ad un'estremità del corpo indotto, mentre l'altra sua estremità risulterà positiva per la perdita della stessa quantità di elettroni. Si dimostra però che anche in questo caso la distribuzione delle cariche indotte di segno opposto sulla superficie del corpo indotto è tale per cui essa rimane *equipotenziale* e che internamente ad essa il campo elettrico risulta nullo (proprietà dei corpi conduttori).

Il fenomeno dell' induzione elettrostatica è molto importante perché è quasi sempre presente là dove sono in gioco cariche elettriche e corpi conduttori.

Si veda ad esempio cosa succede introducendo un corpo conduttore sferico in un campo elettrico dovuto a due corpi carichi, pure essi sferici: la fig. 3.19-2*b* mostra come si sia alterata notevolmente la

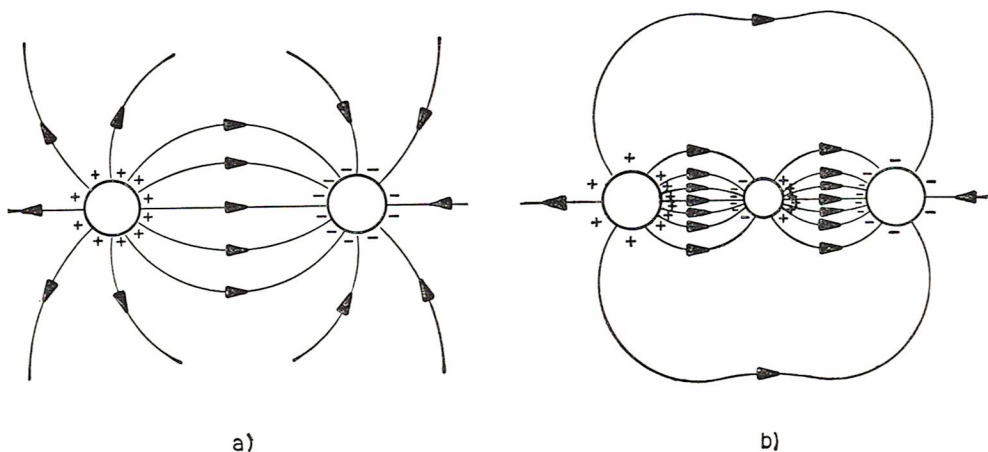



Fig. 3.19-2

distribuzione del campo elettrico preesistente (vedi fig. 3.19-2*a*). L'andamento del nuovo campo elettrico si può tracciare quindi solamente tenendo conto anche delle cariche indotte. D'altra parte si ricordi che, a loro volta, le cariche indotte influiscono sul corpo inducente, col risultato di alterarne la distribuzione originale delle cariche elettriche, e quindi di complicare il problema [1]. La fig. 3.19-2*b* mostra infatti

---

[1] Così ad esempio il campo elettrico riportato in fig. 3.16-6 tiene già conto del fenomeno dell' induzione elettrostatica. E si comprenderà come, dati più corpi conduttori carichi, sarà difficile conoscere a priori la distribuzione delle cariche elettriche sulla superficie dei conduttori stessi, così come l' introduzione in un sistema di un nuovo conduttore, anche scarico, porterà a notevoli modificazioni del campo elettrico preesistente.

come si abbia un maggiore addensamento delle cariche elettriche sulla superficie del corpo inducente là dove questa è più vicino al corpo indotto.

3.110 Vettore spostamento elettrico

Per ragioni che si comprenderanno meglio quando si passerà a studiare le proprietà dei campi elettrici entro la materia, è conveniente introdurre già nello studio dei fenomeni elettrostatici nel vuoto una seconda grandezza elettrica vettoriale. Questa, denominata *spostamento elettrico*, o anche *induzione elettrica* (simbolo $\bar{D}_0$), risulta essere un vettore parallelo a quello rappresentante il campo elettrico $\bar{K}_0$ nello stesso punto, poiché legato a quest' ultimo dalla seguente relazione:

3.110-1 $$\bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{K}_0 ,$$

dove ε_0 è appunto la costante di proporzionalità fra i due vettori, la quale correntemente viene chiamata *costante dielettrica* del vuoto. Del-

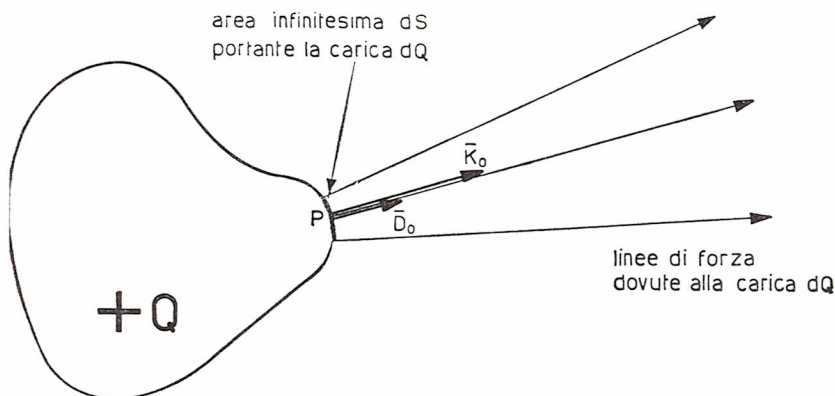



Fig. 3.110-1

l' unità di misura di questa nuova grandezza elettrica si occuperà il § 3.112. Per ora basti sapere che nel sistema Giorgi:

3.110-2 $$\varepsilon_0 = \frac{D_0}{K_0} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{farad}}{\text{metro}} ,$$

e che pertanto il vettore $\bar{D}_0$ dovrà presentare valore e dimensioni fisiche diverse da quelle del corrispondente vettore $\bar{K}_0$.

Per introdurre una delle proprietà fondamentali di questo nuovo vettore si consideri ad esempio un corpo conduttore carico di elettricità (vedi fig. 3.110-1). Preso allora nell' intorno di un punto P qualsiasi,

posto sulla superficie del conduttore, un elemento di area infinitesima dS (1), si consideri la quantità di elettricità dQ (quindi pure essa infinitesima) presente nella predetta superficie dS : è chiaro che il rapporto dQ/dS rappresenterà la densità di carica elettrica superficiale nel punto considerato (P).

Ora, poiché nel punto P, ortogonalmente alla superficie dS considerata è presente un campo elettrico $\overline{K}_0$ (vedi fig. 3.110-1), esisterà, per quanto esposto sopra, anche il suo vettore parallelo $\overline{D}_0$ il cui modulo, si dimostra (2), coincide per l'appunto con la densità di carica elettrica superficiale in quel punto (P). Si potrà scrivere quindi che:

3.110-3 $$D_0 = \frac{dQ}{dS} \text{ (3)} .$$

Da questa formula appare dunque che lo spostamento elettrico è una grandezza fisica la cui unità di misura risulta essere il coulomb/metro quadrato.

L' utilità di questo nuovo vettore, le cui proprietà sono sintetizzate dalle 3.18-1 e 3, apparirà nel prossimo paragrafo.

3.111 Flusso del vettore spostamento - Teorema di Gauss

Dato un campo vettoriale, ad esempio del vettore spostamento $\overline{D}_0$, e quindi un certo insieme di linee di forza che ne danno graficamente l'andamento (una linea di forza di questo campo vettoriale (1) avrà in ogni suo punto per tangente il vettore $\overline{D}_0$, per cui essa coinciderà con la corrispondente linea di forza elettrica), si definisce flusso del vettore considerato attraverso una certa superficie S [simbolo $\Phi_s(\overline{D}_0)$], si veda la fig. 3.111-1a, il prodotto:

3.111-1 $$\Phi_s(\overline{D}_0) = D_0 S \cos \alpha ,$$

ove D_0 rappresenta il valore (modulo) del vettore spostamento ove è posta la superficie S ed α è l'angolo formato fra la normale $\overline{n}$ alla super-

---

(1) Si è preso un elemento infinitesimo dS perché sulla superficie di un conduttore qualsiasi le cariche elettriche non risultano mai distribuite con uniformità.

(2) Ad esempio mediante il teorema di Gauss, di cui si dirà nel § 3.111.

(3) Qualora la carica Q fosse distribuita con uniformità sull' intera superficie S del conduttore si avrebbe più semplicemente che:

3.110-3′ $$D_0 = \frac{Q}{S} .$$

---

(1) Chiamata brevemente linea d' induzione.

ficie e il vettore $\bar{D}_0$. Si noti che nel calcolo del flusso, quando è possibile, le aree considerate vengono prese ortogonali alle linee di forza, per cui $\cos\alpha = 1$, e ciò per evidenti ragioni di semplicità.

D'altronde, quando per ragioni di disuniformità del campo vetto-

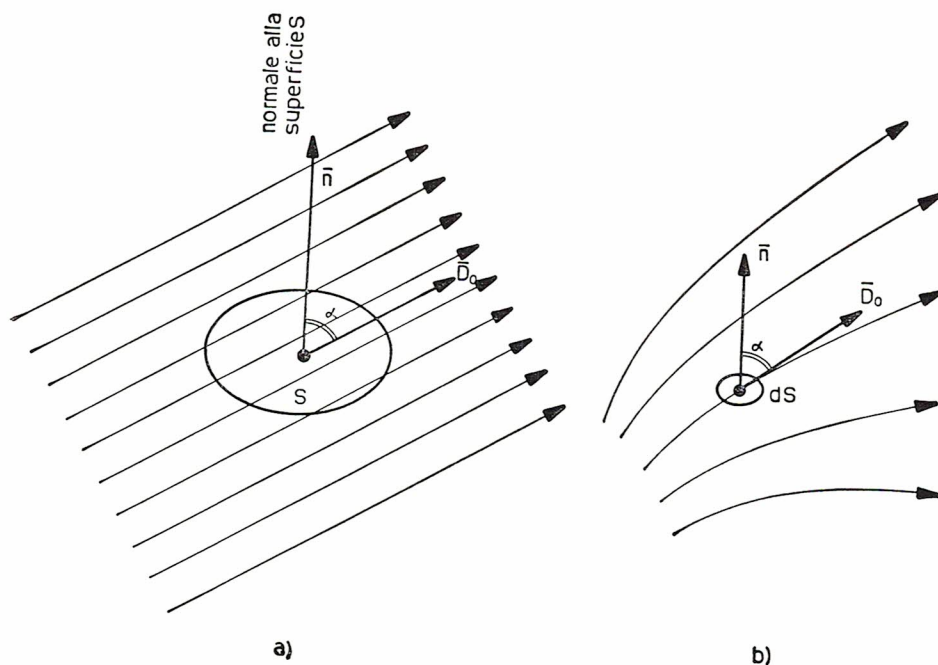



Fig. 3.111-1

riale (vedi fig. 3.111-1*b*) si debba considerare un'area molto piccola, ad esempio infinitesima dS, si potrà scrivere in analogia con la 3.111-1:

3.111-2 $$d\Phi_{ds}(\bar{D}_0) = D_0 dS \cos\alpha\,,$$

espressione che rappresenta il flusso infinitesimo del vettore $\bar{D}_0$ attraverso la superficie infinitesima dS, la cui normale $\bar{n}$ forma l'angolo α con il vettore $\bar{D}_0$. Naturalmente per risalire quindi al flusso relativo ad una superficie di più grandi dimensioni occorrerà *sommare* tutti i flussi infinitesimi interessanti l'area in questione. Sarà cioè $\Phi_s = \int_S d\Phi_{ds} = \int_S D_0 dS \cos\alpha$.

A questo punto è necessario introdurre un'altra definizione, quella di tubo di flusso. Si definisce tubo di flusso (o anche tubo di forza) del vettore $\bar{D}_0$ il volume racchiuso dall' insieme di tutte le linee di forza del vettore $\bar{D}_0$ che si appoggiano al contorno di una superficie data o ad

una data linea chiusa ([2]) (vedi fig. 3.111-2). Per definire un tubo di flusso in un campo vettoriale occorre quindi una (ed una sola) superficie od una sola linea chiusa in posizione ben precisa rispetto al campo vettoriale dato.

Ora, la proprietà fondamentale dei tubi di flusso è che il flusso si mantiene costante attraverso una qualsiasi sezione del tubo di flusso

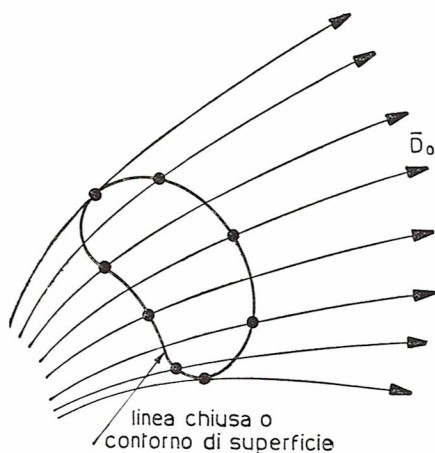



Fig. 3.111-2

stesso. Ad esempio, con riferimento alla situazione riportata in fig. 3.111-3, ove le sezioni sono ortogonali alle linee di forza del vettore spostamento, si potrà scrivere che:

$$3.111\text{-}3 \qquad d\Phi_{ds1}(\overline{D}_{01}) = D_{01}dS_1 = d\Phi_{ds2}(\overline{D}_{02}) = D_{02}dS_2 = \ldots.$$

La dimostrazione di quanto scritto in 3.111-3 è facile se si pensa alla stessa definizione di tubo di flusso. Infatti le linee d' induzione che costituiscono un tubo di flusso sono in numero costante e ben determinato, per cui attraverso una sezione qualsiasi dello stesso tubo di flusso passerà sempre lo stesso numero di linee d' induzione. Per questo fatto, poiché è noto d'altronde che un certo numero di linee di forza e quindi di induzione collegano idealmente una certa quantità di elettricità ben definita, si può affermare che la quantità di elettricità interessata da un tubo di flusso è sempre la stessa.

Così si può considerare ad esempio che su ciascuna superficie retta

---

([2]) Purché non coincida con una linea di forza.

del tubo di flusso di fig. 3.111-3, pensata metallizzata, sia distribuita per induzione elettrostatica la stessa quantità di elettricità:

3.111-4 $$dQ_1 = dQ_2 = \ldots = dQ_A = dQ_B .$$

Da questa condizione ed in base alla formula 3.110-3, che fornisce genericamente l'espressione $dQ = D_0 dS$, si potrà arrivare alla seguente relazione:

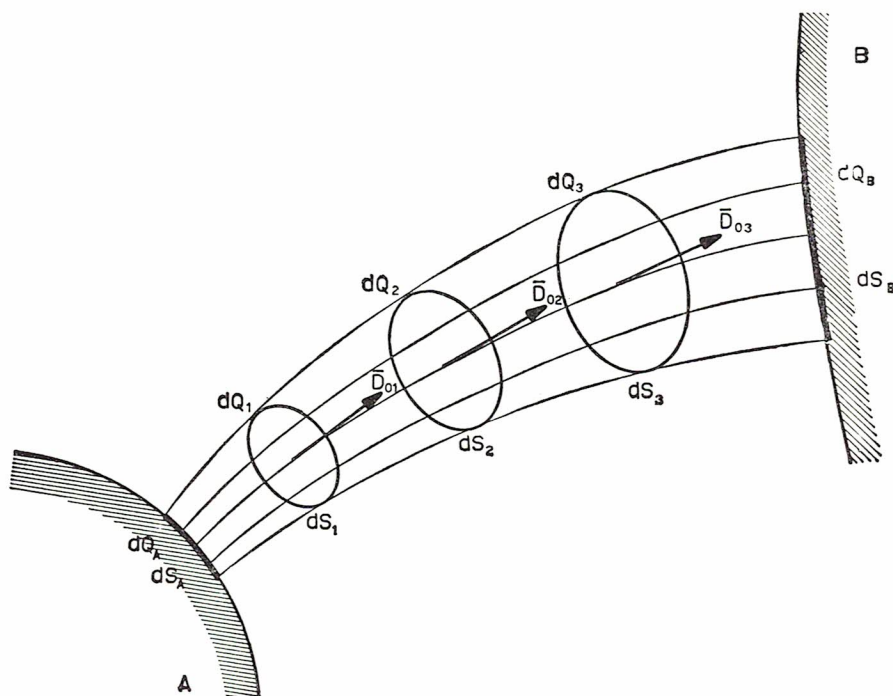



Fig. 3.111-3

3.111-5 $$D_{01} dS_1 = D_{02} dS_2 = \ldots.$$

la quale dimostra appunto, come si era affermato, che il flusso del vettore $\bar{D}_0$ in un tubo di flusso rimane costante.

Giunti a questo punto è possibile finalmente enunciare il teorema di Gauss. Questo afferma che il flusso totale del vettore spostamento uscente da una superficie *chiusa* qualsiasi è eguale alla somma algebrica delle cariche elettriche racchiuse dalla superficie considerata. In formula si potrà scrivere dunque:

3.111-6 $$\Phi_s(\bar{D}_0) = \Sigma Q \text{ (3)}.$$

---

(3) Nel sistema Giorgi l'unità di misura del flusso del vettore induzione elettrica risulta perciò il coulomb.

Nel caso ad esempio di una superficie sferica di raggio r racchiudente una carica puntiforme Q (vedi fig. 3.111-4), poiché il vettore spostamento $\bar{D}_0$ attraverso la superficie è sempre ortogonale alla superficie stessa ($\cos\alpha = 1$) e di valore costante (D_0), in quanto i punti di

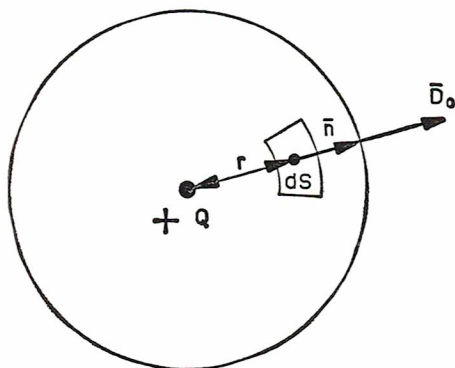



Fig. 3.111-4

una sfera equidistano dal centro ove giace la carica elettrica, il flusso varrà:

3.111-7 $$\Phi_s(\bar{D}_0) = D_0 \cdot 4\pi r^2 ,$$

per cui, in base al teorema di Gauss, sarà:

3.111-8 $$4\pi r^2 D_0 = Q ,$$

o anche:

3.111-9 $$4\pi r^2 \varepsilon_0 K_0 = Q .$$

Quest' ultima formula è assai importante perché permette di ricavare l'espressione del campo elettrico:

3.111-10 $$K_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

in un punto distante r da una carica puntiforme Q.

3.112 Capacità di un condensatore piano

Il condensatore piano, cioè il condensatore costituito da due armature metalliche eguali, parallele e non molto distanti fra di loro, è il tipo più diffuso nella tecnica. Qui si supporrà che le armature si trovino nel vuoto. In queste condizioni si cercherà di calcolarne la capa-

cità elettrica: si tratterà cioè in sostanza di pervenire ad una relazione che leghi, per il condensatore dato, carica Q e differenza di potenziale V. Il rapporto di queste due grandezze elettriche fornirà l'espressione della capacità $\left(C = \dfrac{Q}{V}\right)$.

A tale fine risulta di grande aiuto quanto è stato studiato fino ad ora. L' unica ipotesi che si deve porre per poter arrivare facilmente ai risultati è che le linee di forza entro lo spazio compreso fra le armature siano rettilinee ed uniformemente distribuite, e ciò anche in vicinanza dei bordi. Nessuna linea esce fuori quindi dal condensatore (vedi fig. 3.112-1). A tale proposito si precisa che l'effetto di incurva-

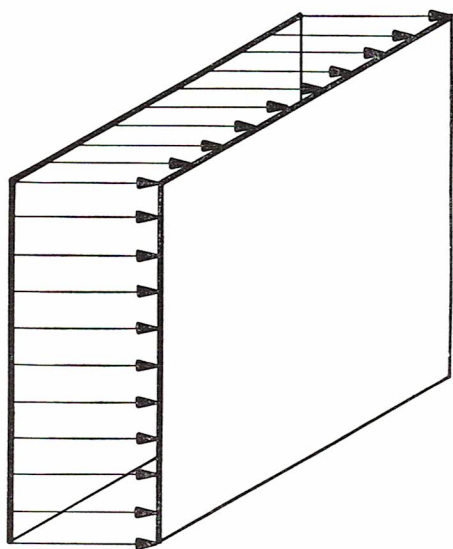



Fig. 3.112.1

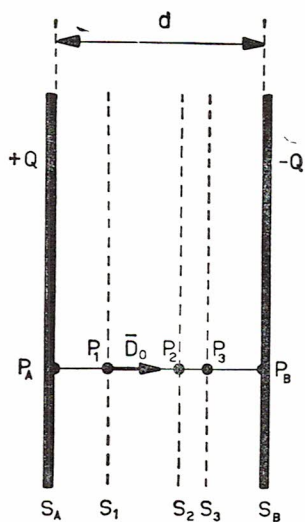



Fig. 3.112-2

tura e la fuoruscita delle linee di forza in prossimità dei bordi sono in realtà tanto più trascurabili quanto più piccola è la distanza delle due armature in confronto con le dimensioni trasversali delle armature stesse. I risultati cui si perverrà in questo paragrafo saranno perciò tanto più vicini alla realtà quanto più l'effetto ai bordi sarà trascurabile.

Con l' ipotesi sopra accennata è chiaro allora che lo spazio compreso fra le due armature di un condensatore carico diventa un tubo di flusso a sezione retta costante, eguale a quella S delle armature. Se quindi su ciascuna di queste si trova dislocata la quantità di elettricità Q ($+Q$ sull'armatura positiva, $-Q$ su quella negativa), si potrà affermare, per quanto è stato riportato nel paragrafo precedente, che in ciascun punto posto nello spazio compreso fra le armature l' intensità del vettore spostamento $\bar{D}_0$ assumerà il valore costante (vedi fig. 3.112-2):

3.112-1 $$D_0 = \frac{Q}{S},$$

per cui anche il campo elettrico $\overline{K}_0$ avrà in ciascun punto intensità costante, precisamente varrà:

3.112-2 $$K_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

A questo punto è necessario procurarsi un'altra espressione del campo elettrico K_0 poiché la 3.112-2 non contiene il parametro *d.d.p.* V. A tale scopo basterà ricordare quanto è stato detto nel § 3.18 a proposito del legame che esiste fra campi elettrici e *d.d.p.* Si è visto infatti che il campo elettrico di un condensatore piano può essere espresso col seguente rapporto:

3.112-3 $$K_0 = \frac{V}{d},$$

dove d rappresenta la distanza fra le armature del condensatore.

Ponendo ora tale espressione del campo elettrico K_0 nella 3.112-2, si potrà ricavare finalmente Q in funzione di V, cioè quindi:

3.112-4 $$Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} V.$$

Ricordando che il coefficiente di proporzionalità fra carica Q e *d.d.p.* V altro non è che la capacità C del condensatore ($Q = CV$), dalla 3.112-4 si ottiene immediatamente che:

3.112-5 $$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

La formula 3.112-5 permette dunque di calcolare il valore della capacità offerta da un condensatore ad armature piane e parallele nel vuoto (1), note che siano le sue caratteristiche geometriche (e il valore della costante dielettrica del vuoto). Generalizzando i risultati ottenuti, si può affermare che la capacità elettrica di un sistema di conduttori è sempre funzione delle sue dimensioni geometriche: precisamente un avvicinamento o un aumento di superficie dei conduttori porterà ad un aumento della capacità del sistema, mentre un allontanamento od una diminuzione di superficie porterà ad una diminuzione della capacità del sistema.

---

(1) O nell'aria, come verrà dimostrato nel § 3.23.

Dalla formula 3.112-5 si deduce ancora che la costante dielettrica del vuoto ε_0 risulta misurabile in farad/metro. Infatti si ricava facilmente che:

3.112-6 $$\varepsilon_0 = \frac{Cd}{S},$$

e quindi che ε_0 può appunto essere misurata in $\frac{\text{farad} \cdot \text{metro}}{\text{metro}^2} = \frac{\text{farad}}{\text{metro}}$ (abbr. F/m). Pertanto:

3.112-7 $$\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \text{ farad/metro},$$

come fu già posto in 3.110-2.

3.113 Collegamento in parallelo ed in serie di più condensatori

I condensatori elettrici sono da considerarsi anch'essi dei *bipoli*, poiché rappresentano dei dispositivi circuitali a due morsetti. Ogni

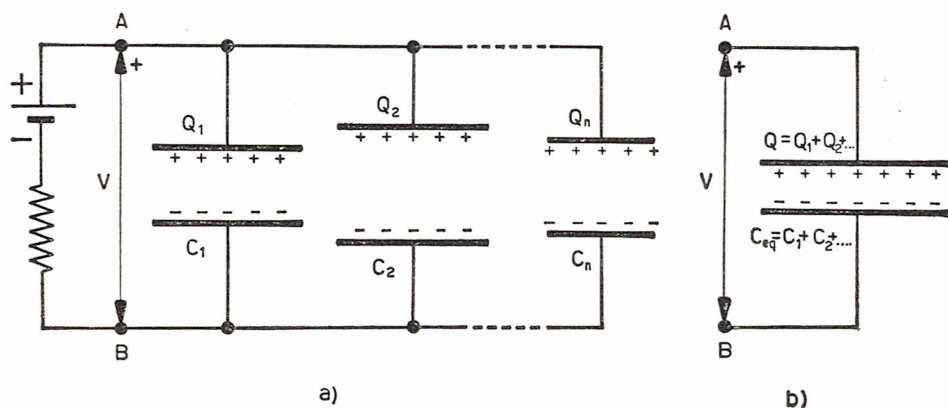



Fig. 3.113-1

condensatore ha infatti due terminali con i quali si accede elettricamente alle sue armature.

I condensatori d'altronde possono essere inseriti nei circuiti o da soli oppure raggruppati. Questi gruppi sono costituiti allora da più condensatori collegati fra loro in serie o in parallelo, o anche in serie-parallelo, e ciò per le ragioni che ora appariranno assai evidenti.

Si incominci a considerare più condensatori in parallelo (vedi fig. 3.113-1*a*). Ciò significa, per definizione di collegamento in parallelo, che tutti i condensatori saranno sottoposti alla stessa differenza di potenziale V. Indicata dunque con C_1, C_2, ... C_n la capacità del primo,

del secondo, ... dell'ennesimo condensatore, è chiaro che ognuno di questi immagazzinerà rispettivamente la seguente quantità di elettricità:

3.113-1 $$Q_1 = C_1 V \,,\; Q_2 = C_2 V \,,\; \ldots .\; Q_n = C_n V \,,$$

e quindi che l' insieme di tutti i condensatori posti in parallelo possiederà la quantità di elettricità Q:

3.113-2 $$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots . + Q_n = (C_1 + C_2 + \ldots . + C_n)V \,,$$

poiché le armature positive risultano tutte collegate fra di loro, così come lo sono tutte quelle negative.

Naturalmente l' insieme di questi condensatori, per il fatto di possedere la quantità di elettricità Q, sotto la differenza di potenziale V, manifesterà anch'esso una capacità (capacità equivalente C_{eq}), che risulterà per definizione dal rapporto Q/V. Per la stessa relazione 3.113-2 si avrà quindi che:

3.113-3 $$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + \ldots . + C_n \,.$$

La formula ora trovata fornisce dunque il modo per calcolare la capacità equivalente (equivalente per quella parte di circuito che sta a sinistra dei punti A e B di fig. 3.113-1a) di più condensatori in parallelo: basterà infatti semplicemente sommare le capacità presentate dai singoli condensatori.

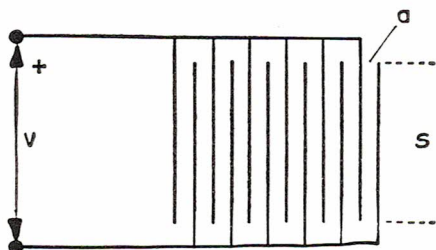



Fig. 3.113-2

Risulta così che col collegamento in parallelo di più condensatori è possibile realizzare dei sistemi [1] aventi una capacità notevole. Naturalmente ogni condensatore dovrà essere adatto a sopportare l' intera tensione V.

Una realizzazione molto usata in pratica per i condensatori in aria, al fine di ottenere appunto capacità di valore più elevato, è quella che vede riunite più lastre piane e parallele, equidistanti, disposte come è stato schematizzato in fig. 3.113-2 (condensatore piano multiplo). È

---

(1) Cosiddette *batterie* di condensatori.

chiaro che la capacità totale di questo sistema è data dalla somma delle capacità che ogni singola armatura positiva viene ad avere rispetto a quella contigua negativa. Indicata quindi con S la superficie utile di ciascuna armatura e con d la distanza fra due armature contigue, la capacità del sistema varrà:

3.113-4 $$C = (2\,n - 1)\,\varepsilon_0 \frac{S}{d}\,,$$

essendo n il numero delle armature che portano cariche dello stesso segno.

Ma i vari condensatori possono essere collegati fra di loro anche in serie, come appare in fig. 3.113-3a. Si tratta di un sistema che si può con-

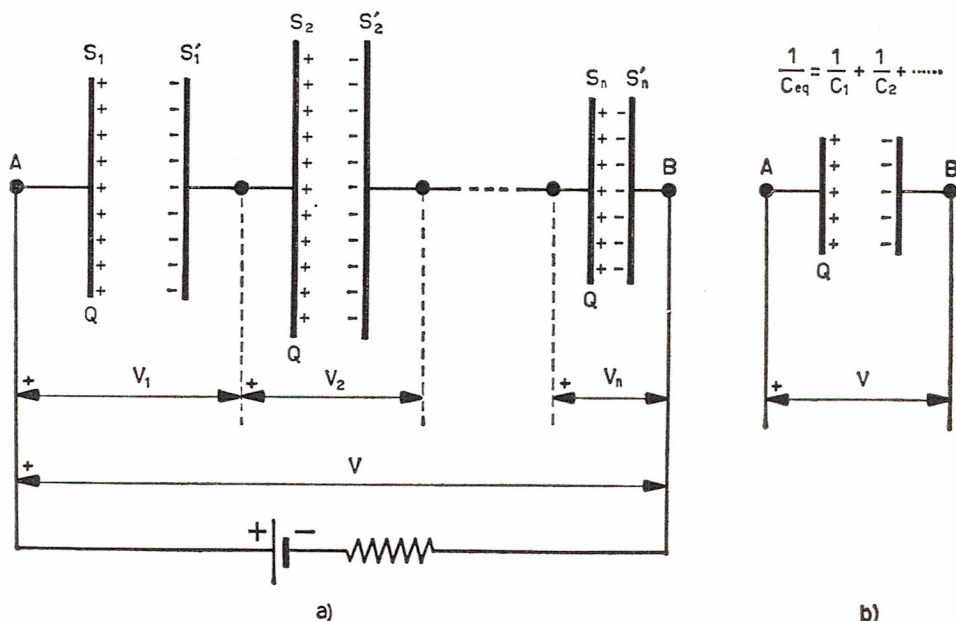



Fig. 3.113-3

siderare formato da due conduttori direttamente caricati dal generatore (questi due conduttori sono le armature estreme, quelle indicate in fig. 3.113-3a con S_1 ed S'_n) e da tanti conduttori intermedi che si caricheranno per induzione (armature intermedie S'_1, S_2 ed S'_2 .... S_n).

Ora in definitiva il generatore dislocherà direttamente, o per induzione, su ciascuna armatura dei vari condensatori la stessa quantità di elettricità Q, positiva sulle armature S_1, S_2 .... S_n, negativa sulle armature S'_1 S'_2 .... S'_n, poiché evidentemente $Q_{s_1} = Q_{s'_n}$, ma $Q_{s'_1} = Q_{s_1}$ (per induzione), ecc. .... Indicata perciò rispettivamente con V_1, V_2, ... V_n la *d.d.p.* ai capi dei condensatori dati, si potrà scrivere che:

3.113-5 $$V_1 = \frac{Q}{C_1}\,,\; V_2 = \frac{Q}{C_2}\,, \ldots\; V_n = \frac{Q}{C_n}.$$

È chiaro d'altronde che la *d.d.p.* V applicata al sistema dovrà frazionarsi sui vari condensatori in proporzione inversa alle varie capacità, come indica la 3.113-5. Si potrà scrivere quindi che:

3.113-6 $$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n}.$$

D'altra parte, poiché il sistema sotto la *d.d.p.* V ha immagazzinato la quantità di elettricità Q, presenterà una capacità il cui valore sarà espresso appunto dal rapporto Q/V, cioè in questo caso:

3.113-7 $$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dots + \dfrac{1}{C_n}},$$

o anche:

3.113-7′ $$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Queste sono le formule che permettono dunque di calcolare la capacità equivalente di più condensatori in serie [2]. È importante ricordare a tale proposito che il valore della capacità equivalente di più condensa-

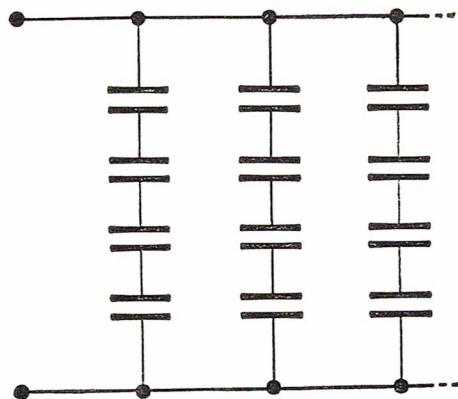



Fig. 3.113-4

tori in serie risulta *sempre* più piccolo del valore presentato dalla capacità più piccola.

L' utilità del collegamento in serie sta nel fatto che esso offre la possibilità di distribuire una data tensione su di un certo numero di con-

---

[2] Esse sono del tutto simili quindi a quelle di più conduttanze in serie. Nel caso di due capacità C_1 e C_2 in serie si ha infatti:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

densatori, i quali singolarmente vengono così sollecitati da una tensione di valore inferiore rispetto all' intera tensione applicata al sistema. Ad esempio con n condensatori di eguale capacità ciascun condensatore, facente parte della serie, ha una *d.d.p.* che vale $\frac{1}{n}$ di quella applicata al sistema. Naturalmente la capacità equivalente del sistema risulterà $\frac{1}{n}$ di quella presentata da ogni singolo condensatore.

Molto usato anche il collegamento serie-parallelo (vedi fig. 3.113-4) il quale dà al sistema i tipici benefici dell' uno e dell'altro collegamento. Esso permette infatti di realizzare forti capacità per *d.d.p.* notevoli.

3.114 Partitori di tensione capacitivi

Un partitore di tensione capacitivo è costituito essenzialmente da due condensatori C_1 e C_2 collegati in serie, come appare nella fig. 3.114-1 [1],

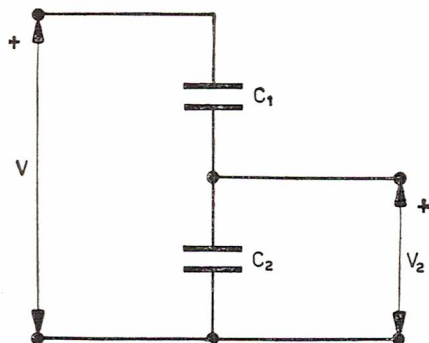



Fig. 3.114-1

e ciò allo scopo di ridurre il valore di una data tensione. D'altronde partitori capacitivi si possono formare spontaneamente nei circuiti elettrici a causa delle capacità parassite, purtroppo sempre presenti.

Per calcolare la tensione V_2, ai capi della capacità C_2, in funzione di quella V applicata al sistema converrà procedere come segue. Si incominci a trovare la quantità di elettricità Q posseduta da ciascuna capacità. Sarà, per quanto visto nel paragrafo precedente (3.113-7):

---

[1] Si noti che il simbolo grafico circuitale della capacità è quello indicato nella fig. 3.114-2. Esso d'altronde viene usato anche come simbolo del condensatore.

Fig. 3.114-2

$$Q = C_{eq} V = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} V = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V . \tag{3.114-1}$$

Pertanto la tensione V_2 ai capi di C_2 varrà:

$$V_2 = Q \frac{1}{C_2} , \tag{3.114-2}$$

e quindi, per la 3.114-1, in definitiva:

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V . \tag{3.114-3}$$

Questa è la formula, che converrà ricordare perché di uso assai corrente, la quale fornisce l'espressione della tensione di uscita di un partitore capacitivo. Si noti che essa è analoga a quella di un partitore ohmico costituito da due conduttanze G_1 e G_2 collegate in serie. In questo ultimo caso infatti $V_2 = G_1 V/(G_1 + G_2)$.

3.115 Capacità di condensatori sferici e di altri tipi

In questo paragrafo si riportano le formule che permettono il calcolo della capacità di alcuni tipi di condensatori o di sistemi elettrici

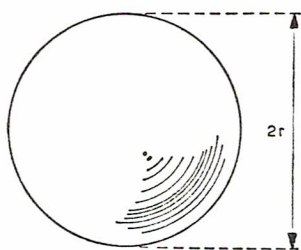



Fig. 3.115-1

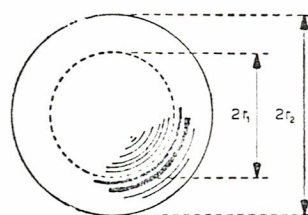



Fig. 3.115-2

abbastanza diffusi nella tecnica. Tali formule non verranno dimostrate.

Si ricordi che i risultati numerici sono in farad qualora le varie grandezze in gioco siano espresse secondo le unità di misura del sistema Giorgi.

a) Capacità di una sfera, di raggio r, lontana da altri corpi (vedi fig. 3.115-1):

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r . \tag{3.115-1}$$

In sostanza è la capacità fra la sfera ed un'armatura ideale posta all' infinito.

b) Capacità fra due sfere concentriche, di raggio rispettivamente r_1 ed r_2 (vedi fig. 3.115-2):

3.115-2
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} .$$

c) Capacità fra due cilindri coassiali, lunghi l, di raggio rispettivamente r_1 ed r_2 (vedi fig. 3.115-3):

3.115-3
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \frac{r_2}{r_1}} .$$

d) Capacità fra due conduttori cilindrici, lunghi l, entrambi di raggio r, paralleli e distanti d (lontani da altri corpi e tali che $r << d$) (vedi fig. 3.115-4):

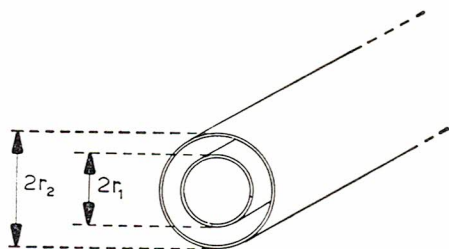



Fig. 3.115-3

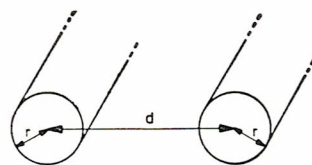



Fig. 3.115-4

3.115-4
$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \frac{d}{r}} .$$

e) Capacità di un conduttore cilindrico di raggio r, di lunghezza l, parallelo ad un piano conduttore di superficie infinita, da cui dista h ($r << h$) (vedi fig. 3.115-5):

3.115-5
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \frac{2h}{r}} .$$

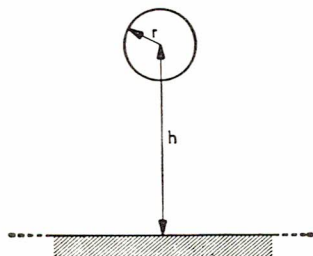



Fig. 3.115-5

3.116 Problemi di applicazione al § 3.1

Esercizio 3.1161

Le posizioni nello spazio di quattro cariche elettriche puntiformi ($Q_A = 0{,}05 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_B = 0{,}02 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_C = -0{,}01 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_D = 0{,}06 \cdot 10^{-6}$ C) sono tali da occupare i vertici di un quadrato di lato $a = 60$ cm (vedi fig. 3.1161-1*a*).

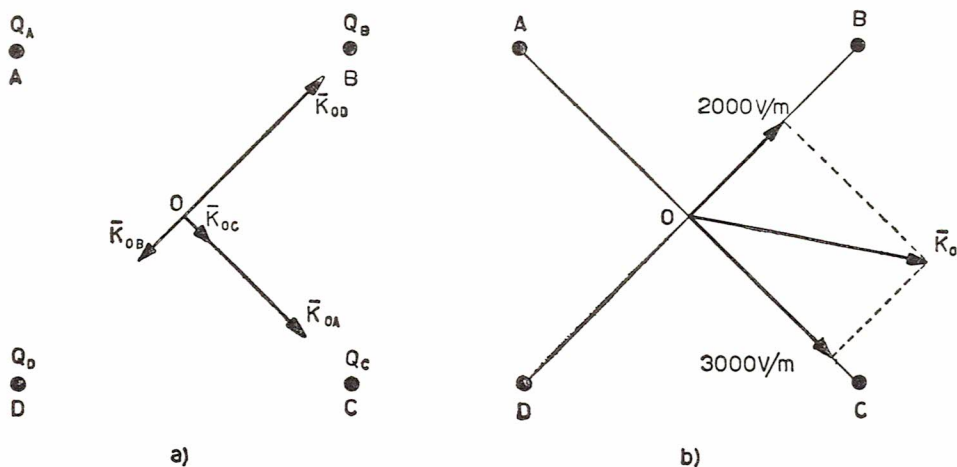



Fig. 3.1161-1

Si trovi il valore che il campo elettrico K_0 assume nel centro O di tale quadrato.

Soluzione

Il campo elettrico nel punto O si troverà componendo vettorialmente in quel punto i campi elettrici dovuti alle quattro cariche elettriche date. Come prima cosa allora si cercherà di conoscere modulo, direzione e verso del vettore campo elettrico nel punto O dovuto ad ogni singola carica. Poiché il segmento $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{0{,}60\sqrt{2}}{2} = 0{,}424$ m ed $1/4\pi\varepsilon_0 = 8{,}98 \cdot 10^9$, risulterà che:

1) il campo K_{0A} nel punto O dovuto alla sola carica Q_A vale:

$$K_{0A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \overline{OA}^2} Q_A = \frac{8{,}98 \cdot 10^9}{0{,}424^2} 0{,}05 \cdot 10^{-6} \cong 2500 \text{ V/m}.$$

Il vettore ha la direzione individuata dai punti A ed O e il verso da A ad O.

2) Il campo K_{0B} nel punto O dovuto alla sola carica Q_B vale:

$$K_{0B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \overline{OB}^2} Q_B = \frac{8{,}98 \cdot 10^9}{0{,}424^2} 0{,}02 \cdot 10^{-6} \cong 1000 \text{ V/m} .$$

Il vettore ha la direzione individuata dai punti B ed O e il verso da B ad O.

3) Il campo K_{0C} nel punto O dovuto alla sola carica Q_C vale:

$$K_{0C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \overline{OC}^2} Q_C = \frac{8{,}98 \cdot 10^9}{0{,}424^2} 0{,}01 \cdot 10^{-6} \cong 500 \text{ V/m} .$$

La direzione del vettore è individuata dai punti C ed O e il verso è quello che va da O a C.

4) Il campo K_{0D} nel punto O dovuto alla carica Q_D vale:

$$K_{0D} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \overline{OD}^2} Q_D = \frac{8{,}98 \cdot 10^9}{0{,}424^2} 0{,}06 \cdot 10^{-6} \cong 3000 \text{ V/m} .$$

La direzione del vettore è individuata dai punti D e O e il verso è quello che va da D ad O.

Il campo elettrico $\overline{K}_0$ risultante si trova, come già è stato detto, componendo i vettori $\overline{K}_{0A}$, $\overline{K}_{0B}$, $\overline{K}_{0C}$, $\overline{K}_{0D}$. Questi sono stati riportati sulla fig. 3.1161-1*a*. La risultante di tali vettori presenta d'altronde, si veda la fig. 3.1161-1*b*, due componenti ortogonali (poiché le diagonali di un quadrato sono ortogonali fra di loro) secondo le direzioni OB ed OC: precisamente la componente in direzione OB ammontante a $3000 - 1000 = 2000$ V/m e la componente secondo la direzione OC ammontante a $2500 + 500 = 3000$ V/m. In definitiva l' intensità del campo K_0 nel punto O varrà:

$$K_0 = \sqrt{2000^2 + 3000^2} = 10^3 \sqrt{13} = 3600 \text{ V/m} .$$

Esercizio 3.1162

Si traccino le linee di forza del campo elettrico dovuto a due cariche elettriche puntiformi, entrambe dello stesso segno e valore.

Soluzione

L'andamento delle linee di forza, giacenti in un piano qualsiasi

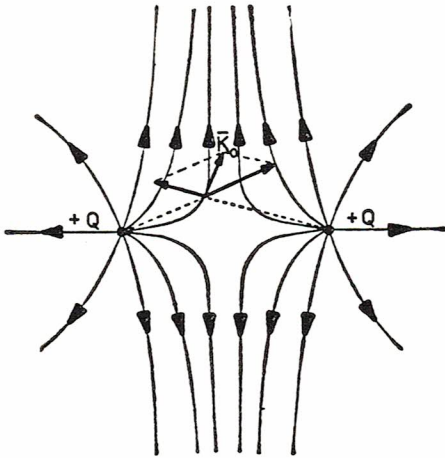



Fig. 3.1162-1

contenente le due cariche, è stato riportato in fig. 3.1162-1, nel caso che le cariche siano positive.

Si osservi che nel punto di mezzo situato sulla congiungente delle due cariche il campo elettrico è nullo, mentre in tutti gli altri punti esso non è nullo e si troverà col solito metodo di composizione vettoriale.

Esercizio 3.1163

Per mezzo della legge di Coulomb si trovi il valore che assume il campo elettrico K_0 in un punto distante d da un corpo puntiforme, portante la carica Q.

Soluzione

Supposto di dislocare alla distanza d voluta dalla carica Q una carica infinitesima dQ, questa verrà sollecitata dalla seguente forza (legge di Coulomb) :

$$dF = \frac{Q \cdot dQ}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

D'altronde il rapporto dF/dQ dà proprio, per definizione, il valore del campo elettrico nel punto ove si trova la carica infinitesima dQ, che è anche il punto ove si deve calcolare il valore assunto dall' intensità del campo elettrico. Perciò sarà :

$$K_0 = \frac{dF}{dQ} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

Questa formula appare in 3.111-10 del testo, ove è stata ricavata però col teorema di Gauss.

Esercizio 3.1164

Fra due corpi piani metallici paralleli, portanti ciascuno la carica $Q = 6 \cdot 10^{-6}$ coulomb, viene posto centralmente un conduttore sferico scarico, il quale risulta perciò soggetto al fenomeno dell'induzione elettrostatica. Si tracci l'andamento delle linee di forza e si trovi a quanto ammonta la carica indotta sapendo che le linee di forza che arrivano e quindi che partono dal corpo sferico sono un terzo di quelle totali.

Soluzione

Per l'andamento delle linee di forza si veda la fig. 3.1164-1. Per quanto riguarda l'ammontare della carica indotta Q_i su ciascuna mezza

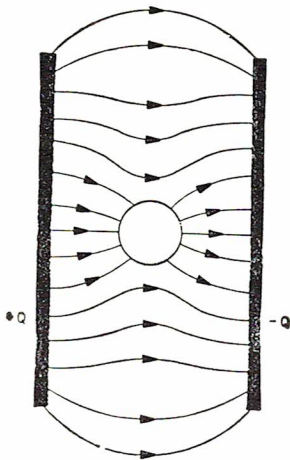



Fig. 3.1164-1

sfera si può dire che essa vale un terzo di quella Q posseduta da ciascun corpo inducente. La spiegazione si ha considerando che il numero totale delle linee di forza del vettore spostamento uscenti (od entranti) da un conduttore rappresenta sempre la sua carica totale positiva (o negativa).

In questo caso è dunque:

$$Q_i = \frac{1}{3} Q = 2 \text{ microcoulomb} .$$

Esercizio 3.1165

Si trovi il valore della forza che sollecita un elettrone ($q_e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C) posto a due millimetri da una piastra metallica positiva di area $S = 50 \times 100$ mm portante la carica $Q = 10^{-9}$ C. Questa piastra dista 5 mm da una eguale piastra, carica negativamente (vedi fig. 3.1165-1). Si dica inoltre se tale forza varia al variare della posizione del punto considerato.

Soluzione

Come prima cosa è necessario trovare il valore assunto dal campo elettrico K_0 nel punto ove si trova l'elettrone. A tale scopo si incominci ad osservare che lo spazio compreso fra le due piastre costituisce un tubo di flusso, se si prescinde dall' incurvatura delle linee di forza ai bordi (vedi fig. 3.1165-1). Poiché d'altronde la carica Q è uniformemente

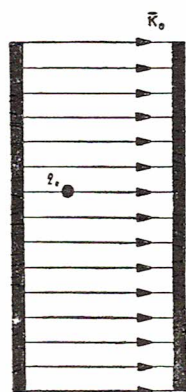



Fig. 3.1165-1

distribuita su ciascuna piastra, si potrà affermare che in qualsiasi punto del tubo di flusso, e quindi anche nel punto considerato, si ha:

$$D_0 = \frac{Q}{S},$$

per cui il campo elettrico vale:

$$K_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Naturalmente un elettrone deve essere considerato come una carica

tanto piccola da non alterare il campo elettrico preesistente. La forza F_e che sollecita l'elettrone avrà perciò l'intensità:

$$F_e = K_0 q_e = \frac{Q q_e}{\varepsilon_0 S} = \frac{10^{-9} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{8{,}86 \; 10^{-12} \cdot 5000 \cdot 10^{-6}} = 3{,}61 \cdot 10^{-15} \text{ newton}.$$

Il risultato, come si vede, è indipendente dalla distanza che l'elettrone ha dalle piastre (e anche dalla sua posizione entro le piastre, purché esso non si avvicini troppo ai bordi, ove le linee di forza incominciano in realtà ad incurvare).

Esercizio 3.1166

Un condensatore ad armature piane e parallele, distanti $d = 4$ mm, è carico alla tensione $V = 200$ volt. Si trovi: *a*) la *d.d.p.* fra l'arma-

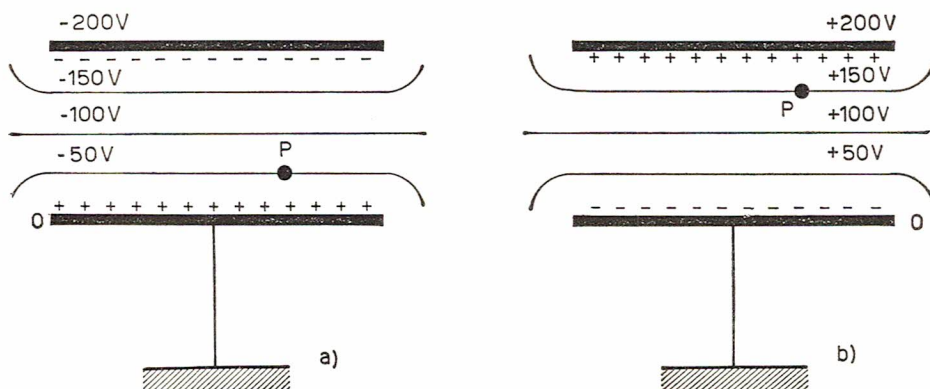



Fig. 3.1166-1

tura positiva ed un punto P posto all'interno delle armature e distante $\delta = 1$ mm dall'armatura positiva; *b*) il potenziale del punto P nel caso in cui l'armatura positiva o quella negativa sia collegata a massa.

Soluzione

a) Poiché il campo elettrico K_0 all'interno di un condensatore del tipo dato è uniforme e costante ($K_0 = V/d$), la *d.d.p.* ΔV relativa ad un tratto di linea di forza lunga δ varrà:

$$\Delta V = K_0 \delta = \frac{\delta}{d} V = \frac{1}{4} 200 = 50 \text{ volt}.$$

b) Il potenziale di P, quando l'armatura positiva è connessa a massa (vedi fig. 3.1166-1*a*), ammonta allora a — 50 volt (il potenziale di P è negativo rispetto a massa).

Il potenziale di P quando invece è l'armatura negativa connessa a massa (vedi fig. 3.1166-1*b*) vale + 150 volt (il potenziale di P è positivo rispetto a massa).

Esercizio 3.1167

Si trovi il valore della capacità equivalente fra i punti A e B, quindi fra i punti E ed F della rete riportata in fig. 3.1167-1, dove $C_1 = C_3 = 10000$ pF , $C_2 = C_4 = 20000$ pF.

Soluzione

a) Calcolo della capacità equivalente C_{AB}.

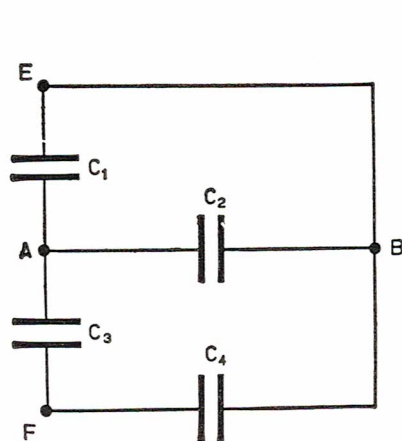



Fig. 3.1167-1

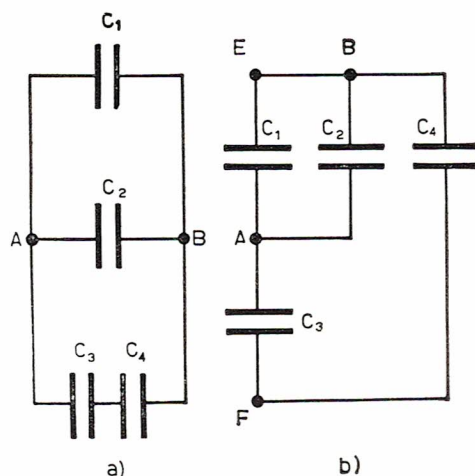



Fig. 3.1167-2

La capacità fra i punti A e B, si veda la fig. 3.1167-2*a*, ammonta a:

$$C_{AB} = C_1 + C_2 + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 10^{-8} + 2 \cdot 10^{-8} + \frac{10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{(1+2)\,10^{-8}} = 36660 \text{ pF}.$$

b) Calcolo della capacità equivalente C_{EF}.

La capacità fra i punti E ed F, si veda la fig. 3.1167-2*b*, risulta:

$$C_{EF} = \frac{(C_1 + C_2) C_3}{C_1 + C_2 + C_3} + C_4 = \frac{(1+2)\,10^{-8} \cdot 10^{-8}}{(1+2+1)\,10^{-8}} + 2 \cdot 10^{-8} = 27500 \text{ p F}.$$

Esercizio 3.1168

Tre condensatori ($C_1 = 10$ nF, $C_2 = 20$ nF, $C_3 = 20$ nF) sono collegati in serie e sottoposti alla tensione $V = 1000$ volt (vedi fig. 3.1168-1).

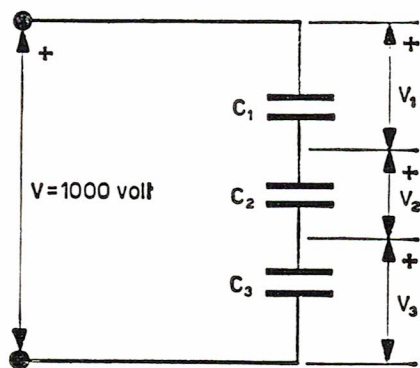



Fig. 3.1168-1

In queste condizioni si trovi: *a*) la quantità di elettricità Q dislocata su ciascuna armatura, *b*) la tensione ai capi di ciascun condensatore.

Soluzione

a) La quantità di elettricità Q si può calcolare con la formula $Q = C_{eq} V$, ove:

$$C_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}} = \frac{1}{\dfrac{1}{10^{-8}} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^{-8}} + \dfrac{1}{2 \cdot 10^{-8}}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ farad},$$

per cui:

$$Q = C_{eq} V = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ coulomb.}$$

b) Determinato come sopra l'ammontare di Q, la *d.d.p.* ai capi di ciascun condensatore si troverà facilmente come segue:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-8}} = 500 \text{ volt}$$

e poiché, $C_2 = C_3$:

$$V_2 = V_3 = \frac{Q}{C_2} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-8}} = 250 \text{ volt}.$$

Esercizio 3.1169

Si calcoli la capacità verso terra di un'antenna radio la quale è costituita, essenzialmente, da un filo conduttore del diametro di 12 mm, lungo 100 metri, parallelo al suolo, da cui dista 30 metri.

Soluzione

Poiché il suolo si può considerare come un corpo piano conduttore, di estensione infinita, e d'altronde poiché in questo caso è soddisfatta la condizione $r << h$ (infatti $r = 6 \cdot 10^{-3}$ metri, $h = 30$ metri), si potrà fare ricorso, per il calcolo della capacità richiesta, alla formula 3.115-5 riportata nel testo.

Si ha dunque, esprimendo tutte le dimensioni lineari in metri:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \dfrac{2h}{r}} = \frac{6{,}28 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2}{2{,}30 \log \dfrac{60}{6 \cdot 10^{-3}}} = \frac{55{,}7 \cdot 10^{-10}}{2{,}30 \cdot 4} =$$

$$= 606 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} = 606 \quad \text{picofarad}\,.$$

3.2 Campo elettrico nei dielettrici

3.21 Polarizzazione

Quando un campo elettrico viene ad agire su di un corpo costituito da materiale isolante, essendo questo praticamente privo di elettroni di conduzione o di altre cariche libere, a differenza dei corpi conduttori, non si potrà avere il fenomeno dell' induzione elettrostatica poiché ciò implica uno spostamento materiale di cariche elettriche in seno alla massa del materiale stesso. Tuttavia il campo elettrico determina anche nei materiali isolanti un fenomeno fisico assai interessante ed importante, che va sotto il nome di *polarizzazione dielettrica*.

Si consideri dunque un materiale isolante soggetto ad un campo

elettrico, quindi attraversato da un certo numero di linee di forza [1]. Poiché il materiale è formato in ultima analisi da atomi, si incominci a considerare quale sarà l'azione del campo elettrico sopra un atomo. È intuitivo pensare che gli elettroni periferici degli atomi, sottoposti alle forze elettrostatiche dovute al campo elettrico, non riusciranno più a ruotare su orbite centrate, ma su orbite discentrate rispetto al nucleo (vedi fig. 3.21-1*b*), il quale a sua volta sarà anch'esso sollecitato a spo-

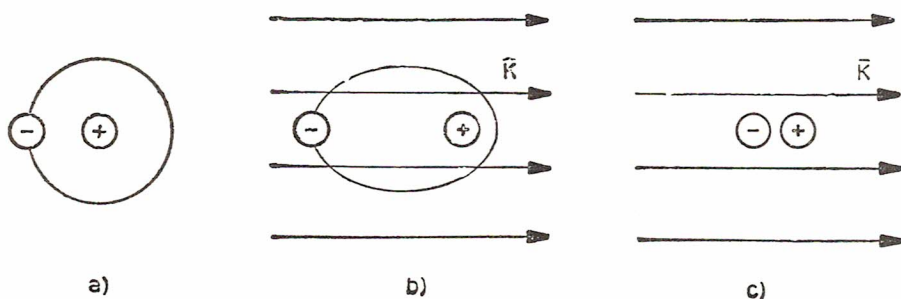



Fig. 3.21-1

starsi nello stesso verso in cui agisce il campo. Naturalmente le forze attrattive che tengono uniti gli elettroni periferici al loro nucleo si opporranno a tali deformazioni, così come fanno le forze di natura elastica nei corpi materiali deformati quando sono sollecitati da forze meccaniche esterne.

Il campo elettrico dunque deforma gli atomi dei materiali dielettrici nel senso che i nuclei risultano discentrati rispetto alle orbite elettroniche periferiche e viceversa. Tale scentramento, e quindi tale deformazione, saranno tanto più sentiti quanto più forte risulterà l'azione del campo elettrico; d'altronde esse spariranno non appena verrà a scomparire il campo elettrico. Si riscontra perciò una perfetta analogia con i corpi elastici i quali, quando sono soggetti a forze esterne, si deformano in modo proporzionale alla sollecitazione e ritornano nella forma primitiva non appena queste hanno finito di agire.

Il risultato pratico dell'azione di deformazione subìta dall'atomo è che questo non appare più elettricamente neutro, come ora si cercherà di spiegare. Si incominci coll'osservare infatti la fig. 3.21-1*a*, ove l'atomo non è sottoposto all'azione di alcun campo elettrico: si comprende come l'atomo in queste condizioni sia neutro dato che, ad una certa distanza dal nucleo, l'azione delle cariche elettriche dovute agli elettroni

---

[1] Mentre nell'Elettrostatica i materiali conduttori non possono essere attraversati da linee di forza, come si è già visto, i materiali isolanti ne sono invece attraversati. I materiali isolanti sono dunque *trasparenti* ai campi elettrici: per questa proprietà essi sono stati denominati *dielettrici*. Dielettrico è quindi sinonimo di isolante.

periferici è come se fosse dovuta ad un'unica carica posta nel centro delle orbite, cioè ove si trova il nucleo, neutralizzando quindi la carica di questo, si intende agli effetti esterni dell'atomo stesso.

Osservando la fig. 3.21-1*b*, ove l'atomo ora risulta sottoposto all'azione di un campo elettrico, si comprende invece come, pur risultando ancora ad una certa distanza l'azione degli elettroni periferici equivalente ad un' unica carica posta al centro delle orbite, tuttavia, poiché il nucleo non occupa più tale posizione a causa dell'avvenuto discentramento, l'atomo non potrà risultare più neutro.

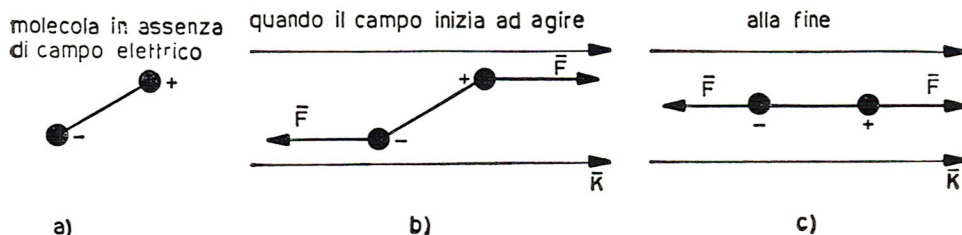



Fig. 3.21-2

Dal punto di vista elettrostatico, sempre per quanto riguarda le azioni elettriche al di fuori dell'atomo stesso, cioè ad una certa distanza da questo, l'atomo in queste condizioni potrà essere schematizzato come in fig. 3.21-1*c*, cioè con due cariche elettriche eguali, ma di segno opposto, poste ad una distanza piccolissima fra di loro. Tale sistema, nella Fisica, prende il nome di *dipolo elettrico* (2).

Concludendo dunque, ciascun atomo di un materiale isolante soggetto all'azione di un campo elettrico si comporterà come un minuscolo dipolo elettrico il cui asse coinciderà con la direzione presentata dalle

(2) Generalmente il dipolo viene disegnato come riportato in fig. 3.21-1'.

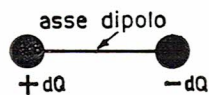



Fig. 3.21-1'

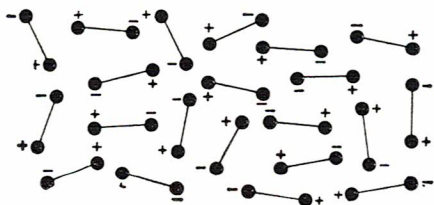



Fig. 3.21-2'

linee di forza del campo. Questo è il fenomeno della polarizzazione per *deformazione*.

Al fenomeno della polarizzazione per deformazione si aggiunge quello della polarizzazione per orientamento quando le molecole che costituiscono il materiale presentano già di per se stesse carattere *polare*, cioè quando di per sé esse non sono neutre [3], ma costituiscono appunto dei minuscoli dipoli elettrici. La polarizzazione nasce poiché queste molecole tendono ad orientarsi nella direzione del campo elettrico, quando

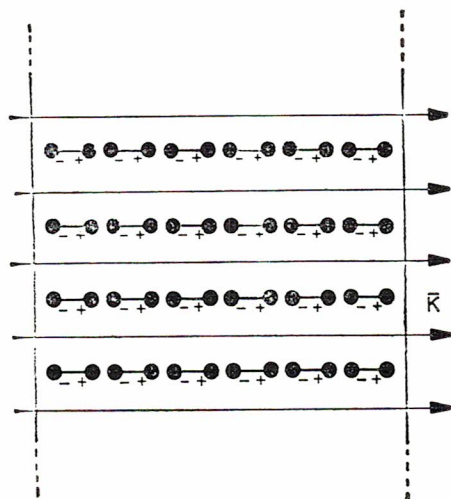



Fig. 3.21-3

sono sottoposte alla sua azione. La fig. 3.21-2 illustrerà meglio quanto ora è stato esposto.

Un dielettrico sottoposto all'azione di un campo elettrico subisce dunque il fenomeno della polarizzazione (per deformazione, più quella per orientamento se il materiale ha carattere *polare*). Esso potrà essere schematizzato, al fine del suo comportamento rispetto ai campi elettrici, con un numero infinitamente grande [4] di minuscoli dipoli elettrici orientati secondo le linee di forza agenti, come è stato accennato in fig. 3.21-3. Con questa schematizzazione, anche se un po' approssimata, si riesce a spiegare il comportamento dei materiali isolanti sottoposti a campi elettrici, come si vedrà nei prossimi paragrafi.

---

[3] Anche le sostanze formate da questo tipo di molecola si presentano a noi, cioè esternamente, elettricamente neutre. Infatti l'agitazione termica tende a disorientare l'elevatissimo numero di dipoli, di cui il corpo sarà costituito, in modo tale che la loro risultante elettrica all'esterno è nulla (vedi fig. 3.21-2′). Sostanze aventi carattere polare sono ad esempio l'acqua, l'ammoniaca, alcune sostanze plastiche.

[4] Più precisamente quanti sono gli atomi o le molecole.

3.22 Vettori campo e spostamento elettrico nei dielettrici

Si consideri di portare in un campo elettrico, che agisce nel vuoto, un corpo parallelepipedo di materiale isolante omogeneo, come appare in fig. 3.22-1. Che cosa succederà? Evidentemente, per quanto è stato detto nel paragrafo precedente, il materiale dielettrico costituente il corpo si polarizza, col risultato che compariranno sulle due facce esterne, quelle ortogonali alle linee di forza, delle cariche elettriche, precisamente

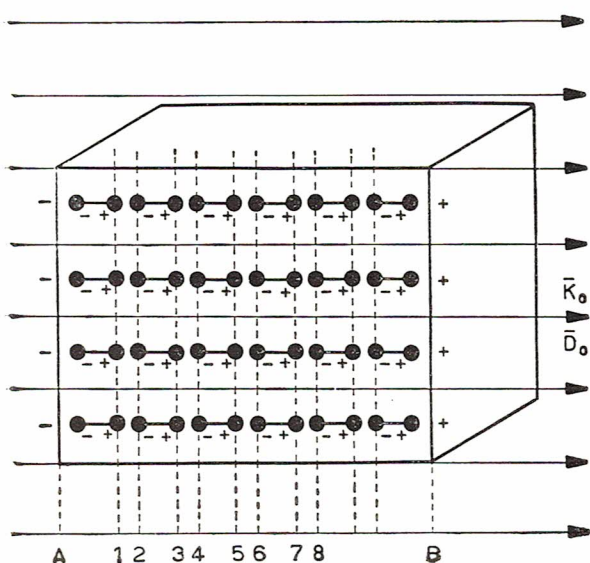



Fig. 3.22-1

sulla faccia ove entrano le linee di forza, delle cariche negative, mentre sulla faccia ove escono le linee di forza, delle cariche positive. Si comprende infatti come, agli effetti esterni, le cariche elettriche di segno opposto dei dipoli elettrici contigui si abbiano a neutralizzare a due a due perché molto vicine (dimensioni atomiche) (ad esempio nella figura 3.22-1 le cariche poste sul piano 1 si neutralizzano con quelle poste sul piano 2, le cariche che si trovano sul piano 3 si neutralizzano con quelle del piano 4 e così via); mentre le cariche che affiorano sulla faccia *A* e quelle che affiorano sulla faccia *B* non si possono neutralizzare, perché distanti fra di loro tutta la lunghezza del corpo.

La conclusione è dunque questa: se il dielettrico risulta uniformemente polarizzato, ciò che avviene quando il materiale è omogeneo, allora entro la sua massa è come se non vi fossero cariche elettriche, mentre queste invece sono presenti solo sulla sua superficie. Il campo elettrico sarà perciò dovuto ora alle cariche preesistenti, più le cariche superficiali di polarizzazione. Naturalmente all'interno del materiale le linee di forza

del campo elettrico proseguiranno il loro cammino [1]. Per questo motivo all' interno di un corpo dielettrico polarizzato esisterà sempre, punto per punto, un vettore campo elettrico, che verrà indicato con $\overline{K}$.

La differenza fra il fenomeno dell' induzione elettrostatica nei conduttori e il fenomeno della polarizzazione nei dielettrici, fenomeni che entrambi si manifestano solamente quando il materiale è posto in un campo elettrico, sta appunto in questo: all' interno del conduttore il campo elettrico si annulla, all' interno del dielettrico invece esso prosegue. I corpi conduttori interrompono dunque le linee di forza, i dielettrici no. Ciò perché nei conduttori, sotto l'azione del campo elettrico esterno, si è avuto un effettivo movimento di cariche elettriche, per cui all' interno del corpo il campo elettrico esterno è stato annullato dal campo prodotto da queste cariche, che assumono una distribuzione sulla superficie del corpo tale appunto da determinare internamente l'annullamento del campo esterno; nei materiali isolanti si ha invece solo una deformazione della struttura molecolare, non uno spostamento di cariche: il campo elettrico non risulta perciò annullato all' interno, ma solo indebolito (caso di fig. 3.22-1).

D'altronde anche nell' interno di un materiale polarizzato esiste, punto per punto, un vettore spostamento elettrico, che viene indicato con $\overline{D}$, il quale tien conto propriamente del fenomeno della polarizzazione dielettrica. Come risulti tutto ciò qui non verrà dimostrato. Caratteristica di questo vettore è di essere nei materiali omogenei ancora parallelo al vettore $\overline{K}$ e legato ad esso dalla seguente relazione di proporzionalità:

3.22-1 $$\overline{D} = \varepsilon \overline{K},$$

ove ε rappresenta la *costante dielettrica* del materiale.

Si noti da ultimo che quando i materiali non sono omogenei, ad esempio perché il corpo è costituito da più parti formate ciascuna da mate-

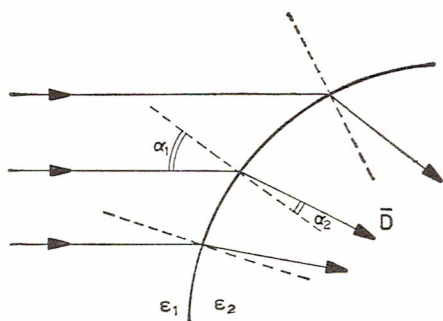



Fig. 3.22-2

[1] A dire il vero, nel caso riportato in fig. 3.22-1, non tutte le linee di forza del campo elettrico esterno proseguono all' interno del materiale, poiché in esso l' intensità del campo è inferiore a quella del campo esterno e ciò a causa delle cariche di polarizzazione.

riali dielettrici differenti, si ha l' interessante fenomeno per il quale le linee di forza del campo elettrico, e quindi dello spostamento elettrico, cambiano bruscamente direzione nei punti ove il mezzo dielettrico cambia appunto di caratteristiche elettriche (precisamente di costante dielettrica).

A tale proposito, indicate con ε_1 ed ε_2 le costanti dielettriche dei due materiali contigui e con α_1 ed α_2 gli angoli che le tangenti alle linee di forza formano con le rispettive normali alla superficie di separazione, si veda per maggior comprensione la fig. 3.22-2, viene dimostrato che i valori assunti dalle tangenti trigonometriche dei predetti angoli sono legati ai valori delle costanti dielettriche dei due materiali dalla seguente relazione:

3.22-2
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

che esprime in sostanza la legge di rifrazione delle linee di forza nel passaggio attraverso mezzi aventi differenti valori di costante dielettrica.

3.23 Costante dielettrica

Al fattore di proporzionalità ε che esiste fra vettore spostamento e campo elettrico in ogni punto occupato da un materiale, come è già stato accennato nel precedente paragrafo, si dà il nome di costante dielettrica.

Proprietà di questa grandezza elettrica è di riassumere in sé le caratteristiche che i materiali isolanti presentano dal punto di vista della polarizzazione totale; precisamente a tale proposito si ha che, maggiore è il grado di polarizzazione manifestato dal materiale, più alto risulta il valore presentato dalla costante ε.

Si deduce quindi immediatamente che ogni materiale isolante presenta un suo ben preciso valore di costante dielettrica, poiché ogni materiale sottoposto all'azione del campo elettrico si polarizza con quel certo grado e con quelle modalità strettamente dipendenti dalla sua struttura molecolare.

Non sarà difficile notare che la costante dielettrica ε, risultando come quella ε_0, dal rapporto fra spostamento e campo elettrico, avrà per unità di misura il farad/metro.

Si vuole però fare osservare subito come, ai fini pratici, sia molto comodo esprimere il valore della costante dielettrica ε di una certa sostanza in funzione della costante dielettrica del vuoto ε_0. In tal caso ε, che ovviamente rappresenta la costante dielettrica *assoluta* del materiale, viene espressa nel seguente modo:

3.23-1
$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0,$$

dove ε_r ha il chiaro significato di costante dielettrica *relativa* del mate-

TABELLA 3.23

Sostanza	Costante dielettrica relativa	Rigidità dielettrica kV/mm
Elio (0 °C, 760 mmHg)	1,00006	—
Neon » »	1,00012	—
Idrogeno » »	1,00026	—
Ossigeno » »	1,00055	—
Azoto » »	1,00060	—
Aria » »	1,00059	3
Metano » »	1,0009	—
Vapor d'acqua (117 °C)	1,006	—
Carta	2	6
Olio minerale	2,2	14
Paraffina	2,2	30
Polietilene	2,2	30
Polistirolo	2,5	20
Gomma	2,5	20
Cloruro di polivinile	2,5	50
Bachelite	5	10
Vetro	6	20
Porcellana	7	30
Mica (muscovite)	7	100
Alcool etilico	26	—
Acqua (purissima)	81	7
Ossido di titanio	100	5
Titanati di *Ba* — *Sr*	2000	5

riale considerato. La costante dielettrica relativa ε_r non ha perciò dimensioni fisiche: essa verrà espressa quindi da un numero puro. Poiché in pratica si parla sovente in termini di costante relativa, resta inteso che nelle formule tale costante ε_r dovrà essere sempre riportata moltiplicata per ε_0. Quindi $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}$(F/m).

Nella tabella 3.23 appaiono alcuni valori della costante dielettrica relativa delle sostanze isolanti più comuni.

Si noti anzitutto come esistono sostanze la cui costante dielettrica relativa differisce assai poco da 1, tanto da essere posta eguale ad 1 nella maggioranza dei calcoli [per queste quindi $\varepsilon \cong \varepsilon_0$ (1)]. Appartengono a tale categoria molti dei dielettrici gassosi, come l'azoto, l'ossigeno, l'aria È per questo motivo, cioè appunto perché $\varepsilon \cong \varepsilon_0$, che i fenomeni, e quindi le leggi dell' Elettrostatica relativa al vuoto, sono praticamente validi anche quando, anziché uno spazio vuoto, si abbia in realtà uno spazio riempito d'aria o di altri gas analoghi dal punto di vista della costante dielettrica. Ad esempio la legge di Coulomb, con la formula data in 3.12-1 e con la costante k espressa in 3.12-2, vale anche nell'aria, lasciando ε_0 al suo posto.

3.24 Rigidità dielettrica

Nel § 3.21 è stato detto come i materiali dielettrici sottoposti all'azione di un campo elettrico si polarizzino con un' intensità che risulta direttamente proporzionale al valore del campo elettrico stesso. Potrebbe sembrare quindi che fosse possibile spingere l' intensità della polarizzazione a valori sempre più alti aumentando l' intensità del campo elettrico agente. Purtroppo le cose non vanno in questo modo poiché, arrivati ad un certo valore del campo elettrico, il materiale isolante perde le sue caratteristiche isolanti, così come un corpo elastico ad un certo momento si rompe (o si deforma irrimediabilmente) all'eccedere della sollecitazione meccanica.

Un semplice richiamo sulla costituzione elettronica della materia ci fa capire infatti che all'aumentare dell' intensità del campo elettrico corrisponde un aumento delle forze che sollecitano gli elettroni periferici. Si arriverà perciò ad una condizione alla quale le forze interne di attrazione, che tengono legati gli elettroni periferici al loro nucleo, non riusciranno più ad equilibrare quelle dovute al campo elettrico esterno: in tal caso gli elettroni, non più vincolati al loro nucleo, sfuggiranno all'azione di questo diventando liberi e determinando quindi nella massa del materiale una corrente elettrica. Questa di solito si produce *istantaneamente* ed è molto violenta: viene denominata per l'appunto *scarica elettrica* ed è tale da creare effetti termici e luminosi notevoli. Essa porterà naturalmente alla temporanea o permanente perdita delle caratte-

---

(1) Errore commesso inferiore all'1 ‰. Per l'aria infatti lo scarto è dello 0,059 %, come si può desumere osservando la tabella 3.23.

ristiche isolanti del materiale a seconda della vastità e della durata di questo fenomeno anormale.

Ora, il valore massimo del campo elettrico per il quale i materiali isolanti rispondono come tali, cioè resistono ancora alla sollecitazione elettrica, è stato denominato *rigidità dielettrica* (1). Ed è chiaro, dopo quanto è stato richiamato, che ciascun materiale presenterà un suo valore di rigidità dielettrica, poiché per ogni materiale differente è la struttura interna e quindi differenti le forze che tendono a mantenere gli elettroni periferici legati ai loro nuclei.

A questo proposito è molto importante ricordare che la rigidità dielettrica di un materiale è funzione di diversi fattori fra i quali la omogeneità e la purezza del materiale, il contenuto di umidità e la temperatura, il modo di sollecitazione sia come forma del campo che come durata. Per tutti questi motivi la rigidità dielettrica non è una vera e propria *costante* del materiale, ma solamente un parametro indicativo circa le possibilità che il dato materiale ha di resistere ai campi elettrici.

Un caso particolare di scarica nell'aria è costituito dal cosiddetto *effetto corona.* Questo fenomeno si presenta quando l'aria che circonda un conduttore perde, in vicinanza della sua superficie, le caratteristiche isolanti (essa diventa infatti fortemente ionizzata), il che avviene quando l' intensità del campo elettrico supera il valore presentato dalla rigidità dielettrica dell'aria. Il fenomeno prende il nome di *corona* perché attorno al conduttore è talvolta visibile una corona luminosa dovuta appunto alla ionizzazione dell'aria.

Nella tabella 3.23 sono stati riportati i valori della rigidità dielettrica (valori continui) per alcune sostanze isolanti più comuni.

Si noti che nel sistema Giorgi la rigidità dielettrica viene misurata naturalmente in volt/metro. Tuttavia in pratica i valori vengono espressi, per ragioni di comodità, in chilovolt/centimetro o anche in chilovolt/millimetro, come è il caso dei dati riportati nella tabella 3.23.

3.25 Materiali isolanti

Nella pratica corrente si dice che un materiale è isolante, o dielettrico, quando esso presenta una resistività elevatissima, vale a dire cioè quando sottoposto ad un campo elettrico, avente qualsiasi direzione, le correnti di conduzione sono veramente trascurabili rispetto a quelle che si avrebbero in materiali conduttori soggetti alle stesse condizioni elettriche. La conduzione nei materiali isolanti è dunque estremamente tenue, ma non nulla : ciò è dovuto alla conducibilità elettronica (anche se evanescente) ed alla presenza di particelle non neutre (ioni, impurità fortemente ionizzate) sempre diffuse nella massa del materiale.

Ma un materiale isolante si rende in realtà utile solo se presenta

---

(1) Simbolo K_r, cioè campo di rottura.

congiuntamente anche altre caratteristiche. Esso dovrà possedere, oltre che una resistività elevata, anche una grande rigidità dielettrica; inoltre dovrà sopportare variazioni di temperatura, anche notevoli, senza alterare in maniera pregiudizievole le sue caratteristiche. Così pure dovrà essere anigroscopico e, fatto assai importante, dovrà *invecchiare* in maniera poco apprezzabile, cioè dovrà rimanere in attività per lungo tempo senza alterarsi sensibilmente. A queste esigenze si potranno aggiungere quelle che derivano da considerazioni sulla costante dielettrica (ad esempio per i condensatori è bene che essa sia di valore il più elevato possibile).

Purtroppo i materiali dielettrici costituiscono una categoria di sostanze da doversi trattare con molta cautela, poiché essi risultano sensibili sia alle sollecitazioni elettriche che meccaniche (urti, vibrazioni) sia alle condizioni ambientali (temperatura, umidità, vapori di altro genere, polvere, ecc.). Per questo motivo i dielettrici costituiscono la parte più delicata e quindi più vulnerabile di molte apparecchiature elettriche.

A caratterizzare dunque i materiali isolanti servono i seguenti tre parametri principali: la resistività, che dà conto del grado di isolamento che essi sono in grado di realizzare, la rigidità dielettrica, che tien conto del grado di resistenza alla sollecitazione elettrica, la costante dielettrica, che esprime il grado di polarizzazione del materiale. È bene precisare subito come fra questi tre parametri non esista una relazione o una dipendenza poichè si tratta di tre grandezze che tengono conto di fenomeni differenti fra di loro, i quali cioè si manifestano indipendentemente l' uno dall'altro.

Così un materiale può avere resistività elettrica assai bassa ma costante dielettrica elevatissima (titanati) oppure resistività elevatissima ma costante dielettrica di valore piuttosto basso (polistirolo) [1]. Nessun nesso dunque fra questi valori anche se a determinare il comportamento e le caratteristiche di un dielettrico sono responsabili in ultima analisi solamente delle cariche elettriche elementari, le quali entrano però nella costituzione della materia in diversi modi.

3.26 Capacità di un condensatore piano con dielettrico omogeneo

Si consideri un condensatore piano fra le cui armature sia stato posto un materiale isolante, omogeneo, di costante dielettrica ε, il quale sia tale da riempire completamente lo spazio compreso fra le armature stesse (vedi fig. 3.26-1). Come si procederà al calcolo della capacità presentata dal condensatore in queste condizioni?

Posta come al solito l' ipotesi che sia nullo l'effetto ai bordi, detta V

---

[1] Per i valori assunti dalla resistività di alcuni dielettrici si veda la tabella 1.46.

la *d.d.p.* presente fra le armature distanti d e Q la carica dislocata su ciascuna armatura di superficie S, si potrà scrivere subito che:

3.26-1 $$Q = DS\,,$$

poiché il flusso del vettore $\bar{D}$ attraverso la superficie S vale la quantità

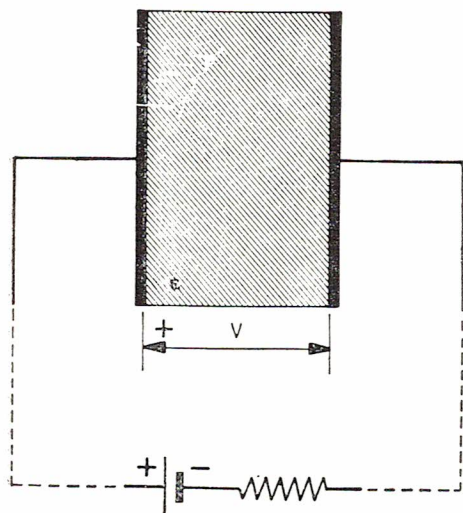



Fig. 3.26-1

di elettricità distribuita su di un'armatura; ed inoltre si potrà affermare che:

3.26-2 $$V = Kd\,,$$

poiché la formula che lega il valore dell' intensità del campo elettrico al potenziale elettrostatico rimane sempre fondamentalmente la 3.18-4, anche in presenza di materiali isolanti, se omogenei (naturalmente K_0 andrà sostituito con K), purché per tensione V ora si intenda quella che effettivamente è applicata al dielettrico, come è infatti in questo caso.

Pertanto, facendo il rapporto fra la 3.26-1 e 2, e ricordando che $D = \varepsilon K$, si ottiene:

3.26-3 $$C = \frac{Q}{V} = \frac{DS}{Kd} = \frac{\varepsilon KS}{Kd} = \varepsilon\,\frac{S}{d} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\frac{S}{d}\,.$$

La capacità di un condensatore piano, avente per dielettrico un materiale omogeneo di costante dielettrica relativa ε_r, assume dunque ε_r volte il valore della capacità che lo stesso condensatore presenta quando il suo dielettrico è il vuoto o l'aria.

Come mai dunque, fisicamente, la capacità di un condensatore aumenta all'aumentare del valore della costante dielettrica del suo dielettrico ? Per spiegare questo fatto si incominci a considerare che cosa succede quando lo spazio compreso fra le due armature di un condensatore piano, inizialmente costituito dal vuoto o dall'aria, carico alla tensione V e portante su ciascuna armatura la carica Q_0, si riempie con un dielettrico omogeneo avente una ben definita costante dielettrica. Ovviamente questo si polarizza, si veda la fig. 3.26-2 ; d'altronde le cariche di

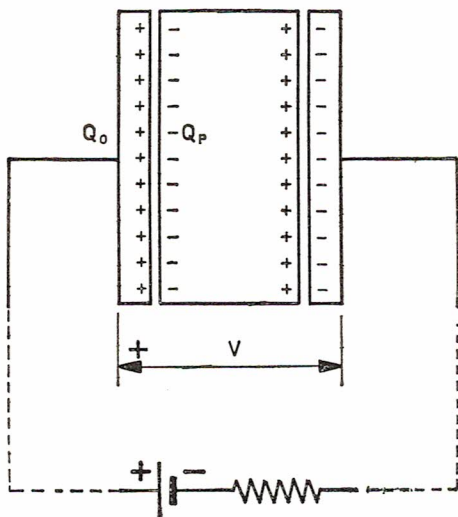



Fig. 3.26-2

polarizzazione che affiorano sulle due facce esterne del materiale, indicate con Q_p, sono di segno opposto a quelle Q_0 presenti inizialmente sulle armature, per cui la carica risultante nell' intorno di ciascuna armatura tenderà a diminuire per portarsi al valore $Q_0 - Q_p$.

Ma ciò non può avvenire se il condensatore è collegato a un generatore elettrico che mantiene la *d.d.p.* V fra le sue armature, poiché il generatore vi invierà nuove cariche elettriche, al fine di neutralizzare l'azione di quelle di polarizzazione Q_p. In definitiva dunque, effettivamente su ciascuna armatura si troverà dislocata una quantità di elettricità pari a $Q_0 + Q_p$, mentre nell' intorno dell'armatura si farà sentire l'azione di una carica risultante $(Q_0 + Q_p) - Q_p = Q_0$, cioè ancora eguale a quella che si avrebbe nel caso che il dielettrico fosse il vuoto : per questo motivo il campo elettrico non ha subìto variazione di sorta e vale perciò $\frac{V}{d}$, come se ci fosse ancora il vuoto [1].

---

[1] Questo caso particolare dimostra in sostanza che il vettore induzione trae origine dalle cariche vere (nel nostro caso $Q_0 + Q_p$) mentre il vettore campo elettrico trae origine dalle cariche libere ($Q_0 + Q_p - Q_p = Q_0$). In altre parole solo le cariche vere sono sorgenti del vettore $\overline{D}$.

D'altronde la capacità C in questa nuova condizione, risultando, come sempre, per definizione dal rapporto fra la quantità di elettricità totale assorbita dal condensatore ($Q = Q_0 + Q_p$) e la differenza di potenziale V fra le sue armature, e tenendo presente che $\frac{Q_0}{V}$ rappresenta la capacità C_0 dello stesso condensatore avente per dielettrico l'aria o il vuoto, sarà espressa dalla seguente relazione:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_0 + Q_p}{V} = \frac{Q_0}{V} + \frac{Q_p}{V} = C_0 + \frac{Q_p}{V}, \tag{3.26-4}$$

da cui risulta immediatamente che $C > C_0$, poiché la tensione V non ha variato il suo valore.

Ma la 3.26-4 serve anche a dimostrare che la capacità C è tanto più grande rispetto a quella C_0, quanto più grande risulta il termine Q_p/V, cioè quanto più elevato è il valore assunto da Q_p rispetto a V. Ora ciò avviene in maniera tanto più sensibile quanto più il dielettrico è polarizzabile, cioè in ultima analisi, quanto più alto è il valore della sua costante dielettrica, come volevasi dimostrare.

3.27 Capacità di un condensatore piano con più dielettrici

Si consideri un condensatore piano fra le armature del quale siano stati posti, per semplicità, solamente due dielettrici omogenei, di spes-

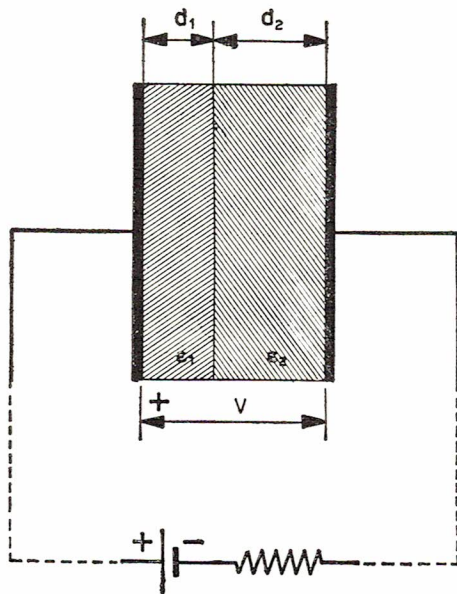



Fig. 3.27-1

sore rispettivamente d_1 e d_2 e di costante dielettrica rispettivamente ε_1 ed ε_2, tali da riempire completamente lo spazio compreso fra le due armature, come mostra la fig. 3.27-1.

Il calcolo della capacità del condensatore può essere impostato ad esempio in questo modo. Si incominci coll'osservare che le linee di forza entro i due dielettrici sono rettilinee (salvo ai bordi) e ortogonali alla superficie di separazione dei due materiali. Questa superficie è perciò equipotenziale; d'altronde lo spazio compreso fra le armature si può considerare un tubo di flusso. Pertanto, indicata con Q la quantità di elettricità dislocata su di un'armatura, indicati con K_1, K_2 e con D_1, D_2 il campo elettrico e lo spostamento elettrico rispettivamente nel dielettrico di costante dielettrica ε_1 ed ε_2, si potrà scrivere che:

3.27-1 $$Q = D_1 S = D_2 S\,,$$

da cui si ricava l'importante relazione, del resto nota, che:

3.27-2 $$D_1 = D_2 = D\,.$$

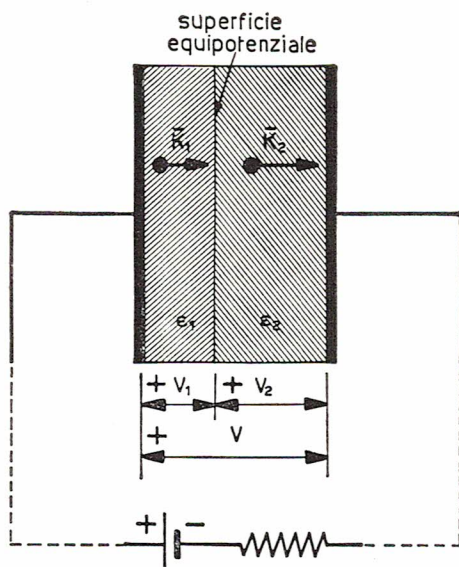



Fig. 3.27-2

Perciò in ciascuno dei due dielettrici si avrà un campo elettrico, costante, del valore:

3.27-3 $$K_1 = \frac{D}{\varepsilon_1}\quad,\quad K_2 = \frac{D}{\varepsilon_2}\,.$$

Ma la differenza di potenziale V applicata fra le armature del condensatore, si veda la fig. 3.27-2, si distribuirà sui due dielettrici, i quali sono separati da una superficie equipotenziale, nella seguente misura:

$$V_1 = K_1 d_1 \qquad V_2 = K_2 d_2 , \tag{3.27-4}$$

per cui si avrà anche che:

$$V = V_1 + V_2 = K_1 d_1 + K_2 d_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_1} d_1 + \frac{Q}{S\varepsilon_2} d_2 . \tag{3.27-5}$$

In definitiva dunque, poiché la capacità C del condensatore dato altro non è che il rapporto Q/V, risulterà per la stessa 3.27-5:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{S\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{S\varepsilon_2}} = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} . \tag{3.27-6}$$

A questa formula, così come del resto alle precedenti, si può pervenire in altra maniera, precisamente considerando il condensatore dato come due condensatori piani posti in serie aventi egual superficie S, armature distanti d_1 e d_2, rispettivamente riempite con isolanti di costante dielettrica ε_1 ed ε_2, come è stato riportato in fig. 3.27-3. Ciò è possibile

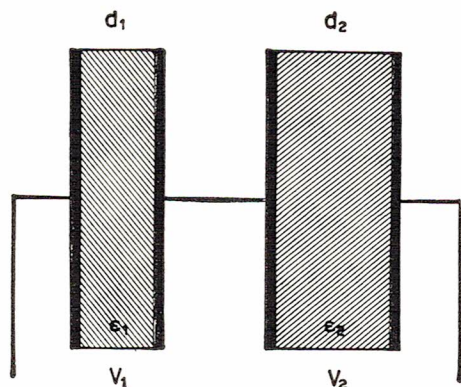



Fig. 3.27-3

in quanto la superficie di separazione dei due dielettrici è equipotenziale.

Infatti una superficie equipotenziale in Elettrostatica può essere sempre considerata metallizzata, poiché ciò non altera minimamente né il campo elettrico né lo spostamento elettrico (1). Metallizzando quindi la superficie di separazione fra i due dielettrici, il condensatore dato si comporterà effettivamente come se fosse costituito da due condensatori in serie, come già si è detto. Si potrà perciò fare ricorso a quanto è stato riportato nel § 3.113, a proposito dei condensatori collegati in serie, con

(1) Questa è una delle caratteristiche delle superfici equipotenziali.

l' unica avvertenza di sostituire ε_0 con la costante dielettrica ε del materiale isolante impiegato.

Da ultimo può essere interessante conoscere quale sia il grado di sollecitazione elettrica subìta dai due dielettrici. Ricorrendo a quanto è stato riportato in 3.27-3, si ottiene subito la relazione che lega il campo elettrico nei due dielettrici dati. Infatti si ha che:

3.27-7 $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

cioè nel passaggio da un mezzo isolante all'altro il campo elettrico subisce una brusca variazione di intensità e ciò in ragione inversa delle relative costanti dielettriche. Precisamente per la 3.27-7 risulta che il campo elettrico assume l' intensità più elevata in quel dielettrico il quale presenta la più piccola costante dielettrica. Questo fatto è importante ai fini delle sollecitazioni alle quali vengono sottoposti i dielettrici e alle quali essi devono resistere con notevole margine di sicurezza.

Si osservi che quanto è stato ora esposto a proposito di un condensatore piano a due dielettrici può essere esteso facilmente al caso in cui fra le armature vi siano più strati di materiale dielettrici. Si veda ad esempio l'esercizio 3.291.

3.28 Campi elettrici nei corpi conduttori percorsi da corrente

Si abbia un corpo conduttore, avente resistività elettrica ρ, il quale sia percorso da corrente elettrica. Per semplicità di trattazione il corpo

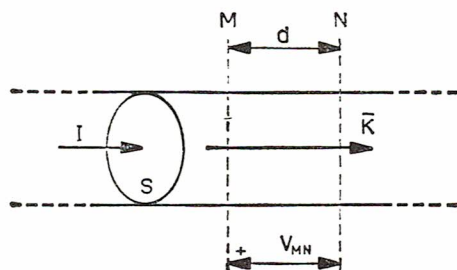



Fig. 3.28-1

risulti costituito da un filo avente sezione retta costante S e percorso da corrente continua, di intensità I (vedi fig. 3.28-1). Si chiede se, in queste condizioni, entro il materiale costituente il conduttore, sia presente un campo elettrico $\overline{K}$.

La risposta non può essere che affermativa: infatti, se nell' interno del conduttore considerato esistono degli elettroni che si stanno muovendo ordinatamente nella direzione dell'asse del conduttore, è perché su di essi risultano applicate certamente delle forze agenti nella dire-

zione del movimento stesso, la qual cosa esige quindi che vi sia un campo elettrico $\overline{K}$ che agisca all' interno del materiale conduttore.

È interessante cercare a questo proposito quale relazione esista fra il modulo del vettore campo elettrico $\overline{K}$ [1], presente all' interno del conduttore, e le altre grandezze elettriche in gioco.

Si incominci coll'osservare dunque che in un conduttore vi è corrente solo se ai suoi capi è stata applicata una differenza di potenziale e quindi se, considerate nel conduttore due sezioni qualsiasi, distanti d, ad esempio le sezioni M ed N di fig. 3.28-1, fra queste si noterà una caduta di tensione V_{MN}.

Questa caduta di tensione V_{MN} potrà essere espressa d'altronde in funzione della resistività ρ e delle dimensioni geometriche del tronco di conduttore considerato come segue:

$$V_{MN} = \rho \frac{d}{S} I \,. \tag{3.28-1}$$

Si dividano quindi entrambi i membri della relazione sopra scritta per il termine d, si otterrà allora la seguente espressione:

$$\frac{V_{MN}}{d} = \rho \frac{I}{S} \,, \tag{3.28-2}$$

che converrà discutere.

È abbastanza evidente come il rapporto V_{MN}/d rappresenti il valore del campo elettrico che deve esistere fra i punti M ed N, entro il conduttore. Per convincersi di ciò si pensi che un elettrone (q_e), il quale percorra il tratto compreso fra N ed M (lungo d), viene a compiere il lavoro $L = q_e K d$, mentre nello stesso tempo esso riceve l'energia $W = q_e V_{MN}$. Poiché per il principio della conservazione dell'energia si ha $L = W$, si ricava da quanto sopra scritto appunto che $K = V_{MN}/d$. D'altra parte il rapporto I/S che compare nella 3.28-2 rappresenta la densità di corrente σ in una sezione qualsiasi del conduttore, e quindi anche in un punto qualsiasi del conduttore dato.

La 3.28-2 assume perciò assai semplicemente la forma:

$$K = \rho\, \sigma \,, \tag{3.28-3}$$

la quale rappresenta la relazione che esiste punto per punto fra il modulo del campo elettrico e della densità di corrente in un conduttore percorso uniformemente da corrente.

---

[1] La direzione del vettore $\overline{K}$ coincide con quella del moto degli elettroni (asse del conduttore), mentre il verso sarà quello presentato dal moto delle cariche convenzionali (cioè positive).

È importante osservare che la 3.28-3, ricavata nel caso particolare di un corpo cilindrico percorso uniformemente da corrente, è generale poiché vale in realtà per qualsiasi corpo, o mezzo, percorso da corrente anche in modo non uniforme purché la densità di corrente nel punto considerato venga allora espressa dalla relazione dI/dS, in conformità a quanto è stato detto alla fine del § 1.24.

È abbastanza facile intuire ora che la *densità di corrente* è in realtà una grandezza elettrica vettoriale (²). La direzione e il verso di questo vettore $\bar{\sigma}$ coinciderà con la direzione e il verso presentato dal moto delle cariche elettriche costituenti la corrente convenzionale (cariche positive). Il vettore $\bar{\sigma}$ è quindi *parallelo* al vettore $\bar{K}$. La 3.28-3 pertanto può essere espressa nella forma vettoriale:

3.28-4 $$\bar{K} = \rho\,\bar{\sigma}\,,$$

che rappresenta per ogni punto di un mezzo avente resistività ρ l'equivalente della legge di Ohm circuitale.

La 3.28-4 dimostra in maniera inequivocabile quanto si ebbe a dire nel § 3.15 e cioè che se, nella massa di un conduttore, non vi sono cariche in movimento in una certa direzione (ad esempio direzione secondo l'asse x) non vi può essere in quella direzione campo elettrico (infatti se $\sigma_x = 0$ anche $K_x = 0$); d'altronde, se in nessuna direzione si ha movimento di cariche, il campo in quel punto dovrà essere rigorosamente nullo.

3.29 Problemi di applicazione al § 3.2

Esercizio 3.291

Lo spazio compreso fra le armature di un condensatore ($S = 100$ cm², $d = 6{,}5$ mm) è stato riempito con tre lastre piane di dielettrico di

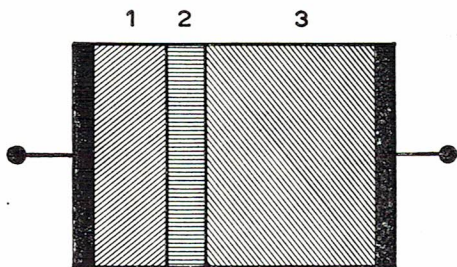



Fig. 3.291-1

diversa qualità e spessore ($\varepsilon_{r_1} = 3$, $d_1 = 1{,}5$ mm; $\varepsilon_{r_2} = 2$, $d_2 = 1$ mm; $\varepsilon_{r_3} = 4$, $d_3 = 4$ mm) (vedi fig. 3.291-1). Si trovi la capacità del conden-

(²) Il flusso di questo vettore attraverso una sezione S rappresenta quindi la corrente I attraverso la stessa sezione. Risulta perciò che:

$$I = \Phi_S(\bar{\sigma}) = \int_S \sigma dS$$

satore e il valore del campo elettrico nei tre dielettrici quando la tensione applicata al condensatore vale 1000 volt.

Soluzione

Considerando il condensatore dato come costituito da tre condensatori in serie, di capacità rispettivamente C_1, C_2, C_3, ciascuno avente la stessa superficie S e dielettrico omogeneo, si ha subito che:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r_2}} + \frac{d_3}{\varepsilon_{r_3}}} = \frac{8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{\left(\frac{1{,}5}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{4}\right) 10^{-3}} =$$

$$= 44{,}3 \text{ pF}\,.$$

D'altronde la quantità di elettricità Q dislocata su ciascuna armatura ammonta a:

$$Q = CV = 44{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{3} = 44{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ coulomb}\,.$$

Pertanto il campo elettrico nei tre dielettrici varrà, ricordando che lo spazio compreso fra le due armature è un tubo di flusso e quindi che $D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Q}{S}$, :

$$K_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{\varepsilon_1 S} = \frac{44{,}3 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 166\,500 \text{ V/m}$$

$$K_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{\varepsilon_2 S} = \frac{44{,}3 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 250\,000 \text{ V/m}$$

$$K_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_3} = \frac{Q}{\varepsilon_3 S} = \frac{44{,}3 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 125\,000 \text{ V/m.}$$

Si può controllare i risultati ora ottenuti ricordando che deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$K_1 d_1 + K_2 d_2 + K_3 d_3 = V\,.$$

Sostituendovi i dati trovati, si ha infatti:

$$166{,}5 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} + 250 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-3} + 125 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 250 + 250 + 500 = 1000 \text{ volt.}$$

Esercizio 3.292

Due elettrodi piani e paralleli, distanti fra di loro 1 mm, ed aventi ciascuno una superficie di 50 cm^2, presentano una capacità di 100 pF.

Si trovi: *a*) Il valore della costante dielettrica relativa del materiale che riempie completamente lo spazio compreso fra i due elettrodi; *b*) il valore minimo che, con tensione di 1000 volt fra gli elettrodi, deve presentare la rigidità dielettrica del suddetto materiale affinché questo abbia a presentare una sollecitazione elettrica non superiore ad un decimo di quella massima sopportabile.

Soluzione

a) La costante dielettrica si ricava dalla formula della capacità $\left(C = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, \dfrac{S}{d}\right)$. Quindi

$$\varepsilon_r = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S} = \frac{10^{-10} \cdot 10^{-3}}{8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-4}} = 2{,}26 \, .$$

b) Nel dielettrico il campo elettrico K, che rappresenta appunto la sollecitazione elettrica cui è sottoposto il materiale isolante, assume il valore:

$$K = \frac{V}{d} = \frac{1000}{10^{-3}} = 10^6 \text{ V/m} = 1000 \text{ V/mm} \, .$$

D'altronde il problema impone che la rigidità dielettrica K_r risulti, come minimo, dieci volte il valore ora trovato per il campo elettrico. Sarà perciò:

$$K_r \geqq 10000 \text{ V/mm} \, .$$

Esercizio 3.293

Due condensatori ad armature piane e parallele servono per ridurre una tensione di 40 kV. Uno dei due condensatori è in aria ($K_r =$ $= 3$ kV/mm) l'altro in olio minerale ($\varepsilon_r = 2{,}5$; $K_r = 15$ kV/mm). Si trovi quale rapporto deve esistere fra le aree delle armature dei due condensatori e quale deve essere la distanza di queste affinché il campo elettrico in ciascun dielettrico sia 1/6 della rispettiva rigidità dielettrica e la tensione ai capi del condensatore in aria risulti 1/100 di quella applicata al sistema (vedi fig. 3.293-1).

Soluzione

Con i dati del problema si possono calcolare immediatamente le distanze d_1 e d_2 alle quali devono stare le armature dei due condensatori, rispettivamente in olio ed in aria, affinché sia rispettata la condizione di sicurezza per l' isolante che riempie lo spazio compreso fra le due armature.

Infatti, poiché $V_1 = 39{,}6$ kV e $V_2 = 0{,}4$ kV, impiegando quali unità

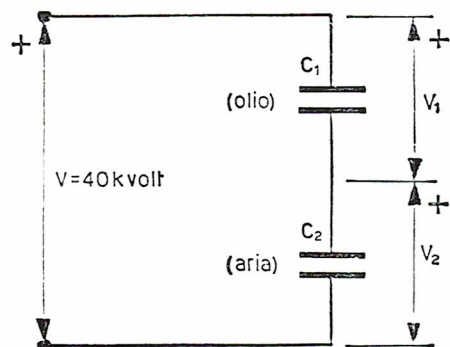



Fig. 3.293-1

di misura per la tensione il kV e per le distanze il mm, si ha subito che:

$$d_1 = \frac{6\ V_1}{K_{r1}} = \frac{6 \cdot 39{,}6}{15} = 15{,}8 \text{ mm}$$

$$d_2 = \frac{6\ V_2}{K_{r2}} = \frac{6 \cdot 0{,}4}{3} = 0{,}8 \text{ mm}.$$

D'altronde le capacità dei due condensatori dovranno essere tali da determinare la voluta riduzione di tensione ($V_2 = 0{,}01$ V). Si può scrivere perciò (vedi fig. 3.293-1):

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{V_2}{V} = 0{,}01,$$

ossia anche:

$$\frac{1}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}} = 0{,}01.$$

Da questa espressione si ricava facilmente che:

$$C_2 = 99\ C_1$$

e sviluppando:

$$\varepsilon_{r_2}\,\varepsilon_0\,\frac{S_2}{d_2} = 99\,\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0\,\frac{S_1}{d_1}\,.$$

Si può così ottenere finalmente la condizione cui devono sottostare i valori delle aree delle superfici dei due condensatori:

$$\frac{S_2}{S_1} = 99\,\frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}}\,\frac{d_2}{d_1} = 99\cdot 2{,}5\,\frac{0{,}8}{15{,}8} = 12{,}5\,.$$

Esercizio 3.294

Si calcoli quale deve essere il raggio minimo di un filo conduttore portante la carica $q = 10^{-6}$ coulomb per metro lineare, lontano da altri corpi e circondato dall'aria ($K_r = 3$ kV/mm), affinché non si manifesti l'effetto corona.

Soluzione

L'effetto corona si manifesta quando l' intensità del campo elettrico in prossimità della superficie del conduttore raggiunge, o supera, il valore presentato dalla rigidità del mezzo isolante in cui si trova il conduttore.

Col teorema di Gauss ([1]) si incominci a calcolare allora il valore che assume il campo elettrico sulla superficie cilindrica del corpo conduttore (vedi fig. 3.294-1). Si osservi a questo proposito che l' intensità del

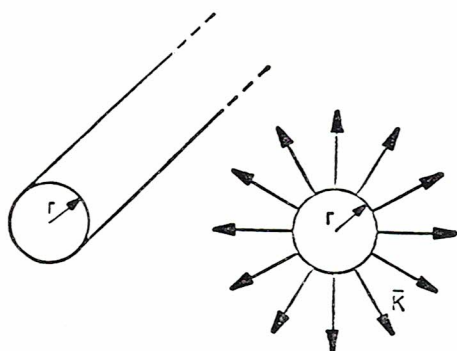



Fig. 3.294-1

campo elettrico è indipendente dal punto considerato sulla predetta superficie e ciò per ragioni di simmetria cilindrica. Sarà pertanto:

([1]) Il problema può essere risolto anche senza fare ricorso direttamente al teorema di Gauss, ricordando semplicemente che sulla superficie di un corpo carico l' induzione coincide con il valore presentato dalla densità di carica superficiale (paragrafo 3.110).

$$\Phi(\varepsilon\bar{K}) = \varepsilon K \cdot \text{superficie laterale cilindro} = Q\,,$$

da cui, poiché la superficie del cilindro, che si suppone lungo l, vale $2\pi rl$, si ottiene:

$$K = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rl} = \frac{q}{2\pi\varepsilon r}.$$

Si noti che il rapporto Q/l rappresenta appunto la carica q posseduta da 1 metro lineare di conduttore.

D'altronde l'effetto corona inizia a manifestarsi quando $K = K_r$; il raggio minimo si ricaverà perciò dall'espressione sopra scritta eguagliata a K_r, cioè:

$$r = \frac{q}{2\pi\varepsilon K_r} = \frac{10^{-6}}{6{,}28 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{6}} = 6 \cdot 10^{-3} = 6 \text{ mm}\,.$$

3.3 Energia del campo elettrico

3.31 Energia immagazzinata da un condensatore carico

Si consideri un condensatore qualsiasi: affinché esso risulti carico, è necessario che un certo numero di elettroni vengano sottratti ad una delle due armature e portati sull'altra armatura. Questo fatto può avvenire naturalmente solamente sotto l'azione di un agente esterno, ad esempio per opera di un generatore elettrico, il quale dovrà a tal fine compiere un certo lavoro.

Sia il condensatore inizialmente scarico: per caricarlo lo si colleghi dunque ad un generatore elettrico. Naturalmente, per arrivare allo stato finale, che vede l'armatura positiva priva di tanti elettroni quanti ne sono necessari per determinare la carica Q finale, occorrerà un certo intervallo di tempo. Ora, in un istante qualsiasi di questo intervallo di tempo (detto periodo transitorio o anche semplicemente *transitorio*) è chiaro che la quantità di elettricità dislocata su di un'armatura sarà compresa ovviamente fra il valore iniziale, che è zero, e quello finale, che ammonta a Q. Questa quantità di elettricità, indicata con q, cioè con lettera minuscola perché la grandezza è relativa

ad uno stato elettrico variabile, sarà legata alla corrispondente differenza di potenziale esistente in quello stesso istante fra le armature del condensatore dalla relazione:

3.31-1 $$q = C\,v\ ,$$

essendo C la capacità del condensatore stesso.

Per un condensatore che si sta caricando, la relazione fra la *d.d.p.* presente in un certo istante fra le sue armature e la carica posseduta in quello stesso istante è dunque costituita da una legge di proporzionalità, rappresentabile quindi con una semiretta passante per l'origine di un sistema di assi coordinati cartesiani, come mostra la fig. 3.31-1.

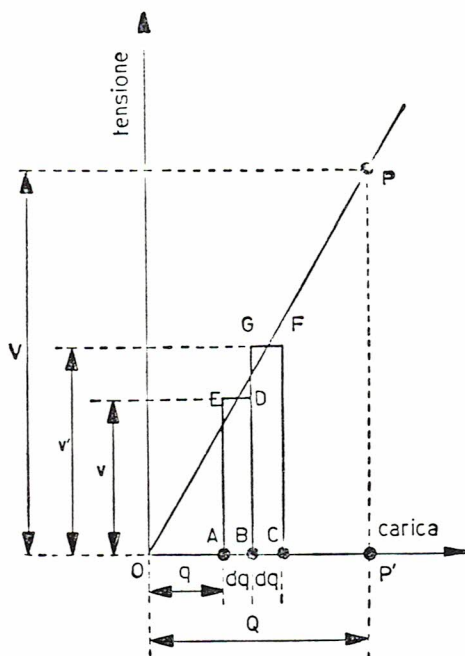



Fig. 3.31-1

Ora, l'energia elettrica che il condensatore ha assorbito, e quindi immagazzinato, per raggiungere lo stato finale rappresentato dalla *d.d.p.* V e dalla quantità di elettricità Q (punto P del grafico di fig. 3.31-1) potrà essere calcolata come equivalente del lavoro che è stato compiuto per portare l' insieme delle cariche elementari costituenti la quantità di elettricità Q da un'armatura all'altra. A tale scopo si incominci ad osservare che in un intervallo di tempo infinitesimo, compreso fra l' istante iniziale e quello finale di carica avverrà che da un'armatura all'altra del condensatore si trasferirà la quantità di elettricità dq, pure infinitesima. Questo trasferimento esigerà naturalmente il seguente lavoro (infinitesimo):

3.31-2 $$dL = dq \cdot v\ ,$$

poiché fra le armature è presente la *d.d.p.* $v\ (0 < v \leq V)$. Sul grafico di fig. 3.31-1 questo lavoro è rappresentato dall'area del rettangolino avente per base la quantità infinitesima dq e per altezza la *d.d.p.* v che vi è in quell' istante fra le armature (rettangolo $ABDE$).

D'altronde è chiaro che il lavoro che dovrà essere compiuto nello istante successivo a quello poc'anzi considerato, per portare ancora una quantità di elettricità infinitesima dq, sarà espresso da $dL' = dq \cdot v'$ (rettangolo $BCFG$), con $v' > v$, poiché, per l'apporto della precedente carica dq, è aumentata la tensione ai capi del condensatore.

Per calcolare a quanto ammonterà alla fine del processo di carica il lavoro che si è dovuto compiere per trasferire, per successive quantità infinitesime dq, l' intera carica Q da un'armatura all'altra basterà evidentemente *sommare* tutti i lavori infinitesimi compiuti successivamente dall' inizio della carica ($v = 0$) alla fine ($v = V$). Questa somma potrà essere eseguita facilmente per via grafica : in tal caso essa è rappresentata allora dall'area del triangolo $O\,P'\,P$ di fig. 3.31-1, area che vale $\frac{1}{2}\,QV$. Infatti questo triangolo si può considerare come costituito dagli infiniti rettangolini di area infinitesima rappresentanti ciascuno il lavoro nei successivi istanti di carica, come già si è visto.

Il lavoro totale che si è dovuto compiere per caricare il condensatore vale quindi $\frac{1}{2}\,QV$ (1) : per il principio della conservazione dell'energia questo lavoro si troverà nel condensatore sotto forma di energia elettrica potenziale. Un condensatore di capacità C, carico alla tensione V, ha perciò immagazzinato un'energia elettrica W_c il cui ammontare è calcolabile dunque con una delle seguenti formule :

3.31-3 $$W_c = \frac{1}{2}\,QV = \frac{1}{2}\,CV^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}\ \text{(joule)}\,.$$

3.32 Energia elettrostatica

Nel precedente paragrafo si è visto dunque come un condensatore carico possieda una certa energia potenziale. Ci si può chiedere ora dove risieda questa energia. A tale proposito si dimostrerà tra breve come questa energia abbia sede nel mezzo dielettrico ove è presente il campo elettrico.

---

(1) Si prescinde dall'energia dissipata nella resistenza del circuito per effetto Joule dalla corrente di carica.

La dimostrazione non è difficile. Poiché dove vi è campo elettrico vi sono necessariamente delle linee di forza (vedi fig. 3.32-1), si incominci allora a considerare una porzione (tronco) di tubo di flusso infinitesimo, chiuso quindi da due aree infinitesime dS_A e dS_B, distanti il tratto infinitesimo dl, e giacenti su due superfici equipotenziali A e B.

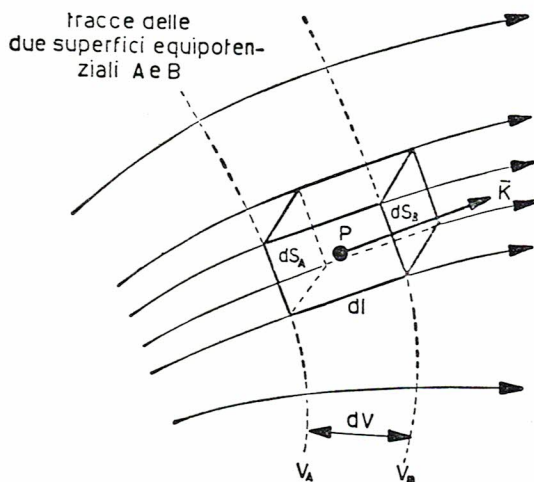



Fig. 3.32-1

Il tronco di tubo di flusso contenga ovviamente il punto P, ove il campo elettrico ha l'intensità K e dove è rivolta la nostra indagine.

Poiché le aree dS_A e dS_B si possono considerare metallizzate (proprietà delle superfici equipotenziali), si ha che quella parte di tubo di flusso compreso fra le suddette aree potrà essere considerato come lo spazio compreso fra le due armature di un minuscolo condensatore. Indicata allora con dQ la quantità di elettricità corrispondente al tubo di flusso infinitesimo considerato e con dV la *d.d.p.* fra le due superfici equipotenziali (la *d.d.p.* fra queste superfici è molto piccola, infinitesima, dato che esse distano di una quantità infinitesima dl) sulle quali trovansi dS_A e dS_B, si potrà affermare che questo minuscolo condensatore ha immagazzinato l'energia potenziale:

3.32-1
$$dW_c = \frac{dQ \cdot dV}{2},$$

in analogia con la prima formula data in 3.31-3.

D'altronde sarà possibile esprimere dQ in funzione dello spostamento elettrico nell'intorno del punto P, poiché $dQ = DdS$ [1] (proprietà del

---

[1] dS rappresenta l'area infinitesima contenente il punto P. Il suo valore però non differisce praticamente da quello di dS_A o dS_B, poiché la lunghezza del tronco è infinitesima.

tubo di flusso), mentre dV verrà espresso in funzione del campo elettrico nell' intorno del punto P, dalla formula $dV = K\,dl$ (a parte il segno —, che qui non interessa). La 3.32-1 diventa perciò:

$$dW_c = \frac{1}{2} KDdS \cdot dl = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 dS \cdot dl \, (^2) , \tag{3.32-2}$$

che rappresenta l'energia elettrostatica potenziale connessa al campo elettrico $\bar{K}$ relativa al volume infinitesimo $dS \cdot dl$, cioè al volume del tronco di tubo di flusso racchiudente il punto P considerato.

Si può quindi affermare che, per ogni unità di volume, l'energia elettrostatica presente è esprimibile con una delle tre seguenti formule:

$$w_c = \frac{1}{2} KD = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} \text{ (joule/m}^3\text{)} . \tag{3.32-3}$$

Dalle 3.32-2 e 3 si deduce pertanto che ove è presente un campo elettrico è presente anche un'energia elettrostatica. Per questo motivo l'energia fornita ad un condensatore si localizza tutta nel mezzo dielettrico (spazio vuoto o riempito completamente o in parte con sostanze isolanti) sottoposto al campo elettrico. Quindi, poiché in un condensatore, ad esempio piano, il campo elettrico è molto intenso fra le armature, internamente, e quasi nullo esternamente, si può affermare che praticamente l'energia elettrostatica si trova *accumulata* tutta nel dielettrico interposto fra le armature. In questo caso particolare è d'altra parte facile dimostrare quanto sopra asserito, cioè che l'energia $W_c = \frac{1}{2} QV$ assorbita in fase di carica si è tutta accumulata nel dielettrico. Infatti, poiché per un condensatore piano si ha che $Q = DS$ e $V = Kd$ (S e d rispettivamente superficie e distanza delle armature) risulta subito:

$$W_c = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} DKS \cdot d = \frac{1}{2} DK \cdot \text{volume dielettrico} . \tag{3.32-4}$$

3.33 Forze attrattive in un condensatore carico

Si vuole cercare ora la relazione che esiste fra le forze attrattive che sollecitano le armature di un condensatore e i suoi parametri geometrici ed elettrici. Il condensatore sia, per semplicità, del tipo ad armature piane di superficie S e distanti l. D'altronde ogni armatura porterà dislocata una certa quantità di elettricità Q, poiché il condensatore, di capacità C, è supposto carico alla tensione V ($Q = CV$). Il dielettrico del conden-

---

(2) ε è la costante dielettrica del mezzo ove vi è il campo elettrico K considerato.

satore sia omogeneo ed abbia costante dielettrica ε; inoltre sia trascurabile l'influenza dei bordi.

Che fra le due armature si manifestino delle forze attrattive, tali cioè da sollecitarle ad avvicinarsi, è ovvio se si pensa che le due armature costituiscono due corpi carichi di elettricità di segno opposto (vedi fig. 3.33-1*a*). Per il calcolo di queste forze non è possibile però fare

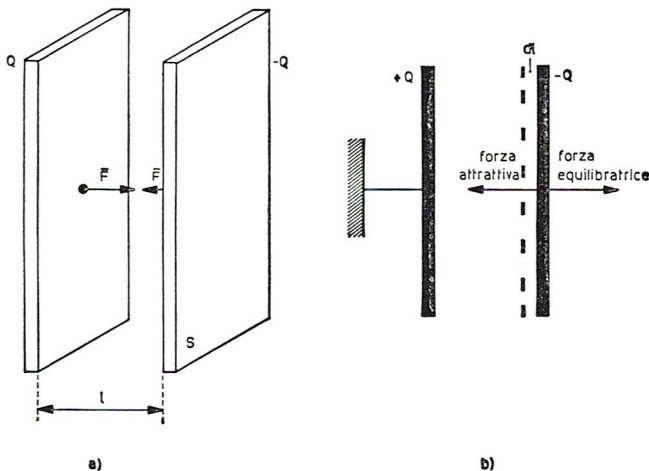



Fig. 3.33-1

ricorso alla formula di Coulomb (3.12-1), poiché le armature sono corpi di grande estensione in confronto alla loro distanza. Il calcolo dovrà essere impostato pertanto in altro modo, precisamente seguendo un ragionamento basato su considerazioni energetiche, come ora verrà esposto.

Sia il condensatore in oggetto ad esempio carico, ma isolato da qualsiasi sorgente di energia (fig. 3.33-1*b*). Si pensi quindi di lasciar muovere una delle due armature, sottoposta alla forza F, parallelamente a se stessa, di un tratto infinitesimo dl. Si compirà allora il lavoro meccanico (infinitesimo):

3.33-1 $$dL = F dl \,,$$

lavoro naturalmente avvenuto a spese dell'energia potenziale posseduta dal condensatore. Infatti, in base ai risultati esposti nel paragrafo precedente, e in particolare per la formula 3.32-3, si può affermare subito che il condensatore nell'avvicinamento delle due armature ha perduto un'energia elettrostatica dW_c pari a:

3.33-2 $$dW_c = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 S \, dl \,,$$

dato che lo spazio fra le armature del condensatore, spazio ove vi è

un campo elettrico di valore costante K [1], ha avuto una diminuzione di volume ammontante a Sdl.

Poiché dunque deve essere $dL = dW_c$, per il principio della conservazione dell'energia, siccome il sistema risulta isolato (il lavoro meccanico compiutosi è sostenuto cioè interamente dall'energia potenziale del condensatore), si potrà scrivere subito che:

3.33-3 $$Fdl = \frac{1}{2} \varepsilon K^2 Sdl ,$$

e quindi anche che:

3.33-4 $$F = \frac{1}{2} \varepsilon S K^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S} ,$$

poiché $K = \dfrac{Q}{\varepsilon S}$.

Ricordando d'altronde che il campo elettrico fra due armature piane separate da un dielettrico omogeneo può essere espresso nel seguente modo $K = \dfrac{V}{l}$, si ottiene anche che:

3.33-5 $$F = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{S}{l^2} V^2 .$$

Le formule trovate in 3.33-4 e 5 rappresentano le espressioni cercate della forza attrattiva in funzione dei parametri geometrici ed elettrici del condensatore dato.

Nel caso invece in cui le armature del condensatore siano permanentemente collegate con una sorgente di energia elettrica, tale da mantenere costante al valore V la *d.d.p.* fra le sue armature (vedi fig. 3.33-2*a*), allora il ragionamento per la ricerca dell'espressione della forza F dovrà essere condotto in quest'altra maniera.

Si incominci coll'osservare come un avvicinamento infinitesimo dl delle piastre porti ad un aumento (infinitesimo) di capacità per cui certa-

---

[1] Il campo K rimane costante perché rimane costante la carica Q su ciascuna armatura. Il caso del condensatore isolato è caratterizzato appunto dal fatto che esso mantiene inalterata la sua carica Q ma non la tensione: quest' ultima invece diminuisce se le armature si avvicinano, aumenta se le armature si allontanano. Infatti ad esempio in quest' ultimo caso l'energia $W_c = \dfrac{1}{2} QV$ aumenta dato che l'energia meccanica impiegata per allontanare le armature va a beneficio del condensatore. Poiché d'altronde Q rimane costante, ad un incremento di W_c corrisponderà in egual misura un aumento di V.

mente, poiché la *d.d.p.* V rimane costante, a questo movimento dovrà corrispondere un aumento della carica Q su ciascuna armatura. Il generatore invierà sulle armature dunque una quantità di elettricità dQ (infi-

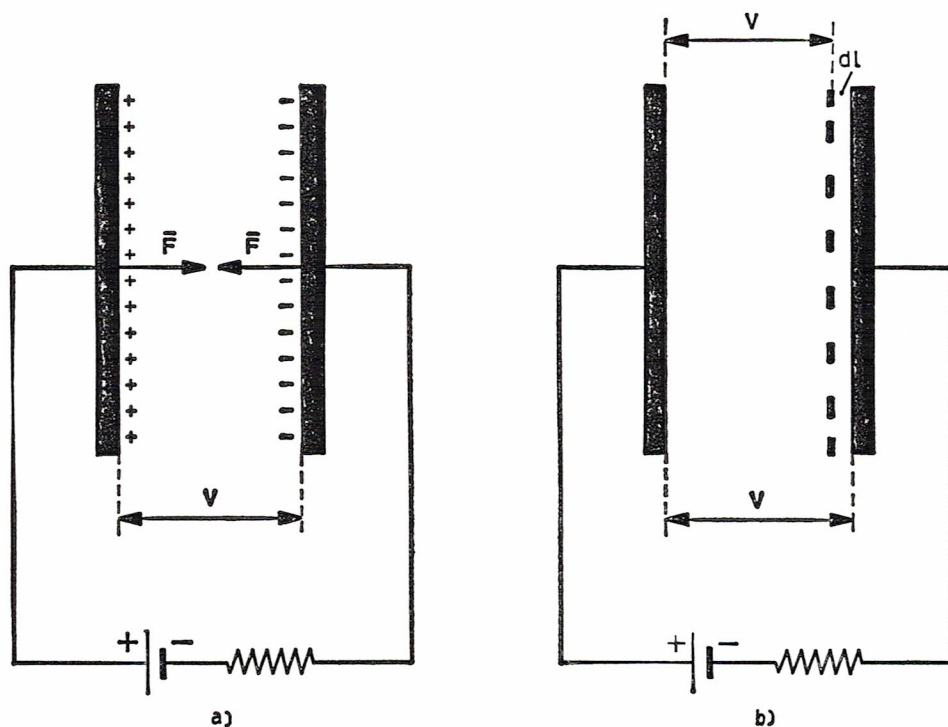



Fig. 3.33-2

nitesima, poiché infinitesima è stata la variazione di capacità dC) esprimibile come segue:

3.33-6 $$dQ = dC \cdot V \; .$$

Per questo fatto, il generatore fornirà al condensatore quindi l'energia:

3.33-7 $$dW_g = dQ \cdot V \; .$$

Il condensatore però ha variato nel contempo la sua energia elettrostatica, poiché è aumentata la sua carica $(Q + dQ)$. Questa variazione ammonta d'altronde a:

3.33-8 $$dW_c = \frac{1}{2}\, dQ \cdot V \; .$$

Il fenomeno risulta perciò ora chiaro: da un lato il generatore ha fornito al sistema una certa quantità di energia (dW_g), dall'altro lato il sistema ha accresciuto la sua energia (dW_c) ed ha contemporaneamente fornito lavoro meccanico all'esterno ($dL = F \cdot dl$). Si potrà perciò scrivere, per il principio della conservazione dell'energia, che:

$$dW_g = dW_c + dL \ , \qquad (3.33\text{-}9)$$

e quindi che:

$$dL = dW_g - dW_c = dQ \cdot V - \frac{1}{2} dQ \cdot V = \frac{1}{2} dQ \cdot V \ . \qquad (3.33\text{-}10)$$

Poiché $dQ = dC \cdot V$, per la 3.33-6, e siccome d'altronde per un condensatore piano la variazione di capacità dC è esprimibile con la seguente formula:

$$dC = \varepsilon \frac{S}{l^2} dl \ (^2), \qquad (3.33\text{-}11)$$

dalla 3.33-10 si ha, dopo aver sostituito, che:

$$dL = F \cdot dl = \frac{1}{2} dC \cdot V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Sdl}{l^2} V^2 \ , \qquad (3.33\text{-}12)$$

ossia anche che:

$$F = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{l^2} V^2 \ . \qquad (3.33\text{-}13)$$

La formula ora trovata è identica dunque alla 3.33-5 relativa al caso del condensatore elettricamente isolato: ciò è logico se si pensa che questa è l'espressione della forza di attrazione che si ha anche quando le armature sono ferme. Nella formula esprimente la forza F non interviene infatti lo spostamento dl che si è supposto di far compiere ad una delle due armature, spostamento che è stato del tutto fittizio, cioè virtuale.

3.34 Alcune osservazioni sui sistemi elettrostatici

A questo punto sono assai importanti alcune osservazioni di carattere generale sui sistemi elettrostatici, perché molto utili in pratica.

---

(2) Questa formula si può ottenere col seguente sviluppo:

$$dC = C' - C = \varepsilon S \left(\frac{1}{l - dl} - \frac{1}{l} \right) = \varepsilon S \frac{dl}{l(l - dl)} = \varepsilon S \frac{dl}{l^2} \ ,$$

poiché dl è trascurabile rispetto ad l.

La Fisica dimostra infatti che, quando un sistema di conduttori carichi si trova isolato da sorgenti di energia, la posizione assunta nello spazio da questi corpi è sempre tale da rendere minima l'energia elettrostatica potenziale. È proprio per questo motivo che due corpi isolati (fra di loro e da sorgenti di energia) carichi di elettricità di segno opposto, tendono ad avvicinarsi. Solo così viene resa minima appunto l'energia posseduta.

Si comprende perciò da quanto è stato esposto sopra che l'energia elettrostatica nei fenomeni elettrici ha lo stesso ruolo che presenta l'energia potenziale nei fenomeni meccanici. *L'energia elettrostatica è quindi sicuramente del tipo potenziale.*

I corpi pesanti nel campo gravitazionale e le cariche elettriche nel campo elettrico ubbidiscono dunque allo stesso principio di minimo. Ed è proprio per soddisfare questo principio che, ad esempio, le cariche elettriche si distribuiscono sulla superficie dei corpi conduttori carichi in modo tale da determinare quel campo elettrico che dà luogo al minimo valore di energia elettrostatica.

3.35 Strumenti elettrostatici

Gli strumenti elettrostatici sono costituiti da due corpi conduttori, fra di loro isolati, dei quali uno è mobile. La struttura è tale da richiamare alla mente quella del condensatore. Naturalmente l'armatura mobile occuperà, in assenza di forze elettrostatiche, una ben definita posizione (posizione di riposo), dalla quale si scosterà quando lo strumento verrà sottoposto all'azione di una tensione. Gli strumenti elettrostatici

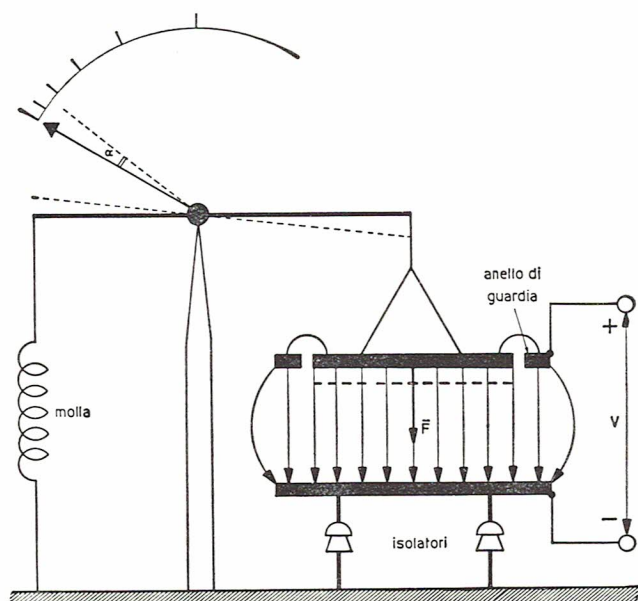



Fig. 3.35-1

sono apparecchi di misura *sensibili appunto alle tensioni*, come ora si vedrà.

Si vuole precisare subito, anzitutto, che esistono in pratica due tipi fondamentali di strumenti elettrostatici: quelli derivanti dal tipo *a bilancia* (vedi fig. 3.35-1) e quelli derivanti dall'elettrometro a quadranti (vedi fig. 3.35-2). Entrambi sono costituiti fondamentalmente,

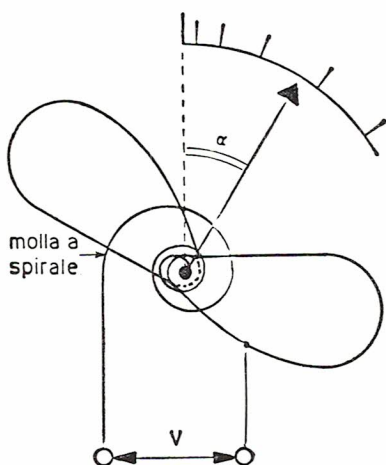



Fig. 3.35-2

come si può vedere dalle figure citate, da due armature isolate fra loro, alle quali fanno capo i morsetti dello strumento.

Precisamente nel tipo *a bilancia* l'armatura mobile, costituita da un disco sostenuto da un sistema di sospensione a bilancia o a leva, è sollecitata in modo da avvicinarsi a quella fissa. D'altronde in questo movimento essa viene mantenuta centrata e parallela: si viene ad avere così un condensatore le cui armature presentano sempre la stessa area affacciata ma diminuiscono di distanza. Nel tipo derivato dall'*elettrometro* invece, l'armatura mobile, costituita da un corpo piano sagomato opportunamente e che può ruotare attorno ad un perno, viene sollecitata a muoversi (ruotare) in modo tale da aumentare l'area della parte affacciata con l'armatura fissa. La distanza delle due armature rimane perciò inalterata.

Comunque il movimento dell'armatura mobile, in entrambi i tipi di strumenti, è sempre tale per cui essa tenderà a raggiungere quella posizione alla quale il sistema dei due corpi conduttori costituenti lo strumento presenta la massima capacità C. Così, se lo strumento è del tipo a *bilancia* (fig. 3.35-1), il piatto mobile si sposterà finché la coppia sviluppata dalla forza F di attrazione elettrostatica dovuta alla tensione applicata non sarà equilibrata dalla coppia dovuta alla forza di richiamo sviluppata dalla molla; se invece lo strumento è del tipo *elettrometro* a quadrante (fig. 3.35-2), l'armatura mobile ruoterà in modo da aumentare la superficie affacciata fintantoché la coppia dovuta alla

attrazione elettrostatica sarà equilibrata dalla coppia resistente sviluppata dalla molla.

Si noti ancora come nello strumento del tipo *a bilancia* riportato in fig. 3.35-1, l'armatura mobile sia circondata da un anello, il cosiddetto *anello di guardia*. Questo è elettricamente collegato all'armatura mobile e serve per eliminare l' influenza dei bordi. In questo modo infatti le linee di campo elettrico fra il disco mobile e l'armatura fissa risultano effettivamente tutte rettilinee.

È importante ricordare da ultimo che, in entrambi i casi, l'angolo α di deviazione dell' indice collegato all'armatura mobile risulta proporzionale al quadrato della tensione applicata. Si potrà scrivere perciò:

3.35-1 $$\alpha = kV^2$$ [1].

Gli strumenti elettrostatici sono dunque apparecchi di misura sensibili alle tensioni (e non alle correnti), precisamente al quadrato del valore della tensione presente ai loro morsetti.

3.36 Elettrizzazione per strofinio - Macchine elettrostatiche

Fra i tanti modi di produrre (separare) cariche elettriche, e quindi campi elettrici, vi è quello che fa ricorso allo strofinio. Storicamente è stato il primo.

Si strofinino ad esempio fra di loro due corpi dielettrici: uno di questi risulterà allora carico di elettricità positiva, l'altro invece risulterà carico di una egual quantità di elettricità, ma di segno opposto, poiché l'azione meccanica dello strofinio (e del contatto) ha fatto sì che diversi elettroni siano stati tolti da quel corpo che ha la tendenza a perderli più facilmente. Pertanto il corpo che ha perduto gli elettroni si caricherà positivamente, l'altro negativamente.

Si noti che il fenomeno dell'elettrizzazione per strofinio può manifestarsi anche quando uno dei due corpi è conduttore, purché sia ben isolato dal sistema meccanico che lo fa muovere.

L' importanza dell'elettrizzazione per strofinio è modesta dal punto di vista tecnico. D'altronde questo fenomeno può dar luogo invece a disturbi o a perturbazioni là dove siano corpi in movimento.

Naturalmente è possibile costruire delle macchine elettriche che sfruttino tale fenomeno: sono questi i generatori elettrostatici del tipo a strofinio, i quali riescono però a fornire energie piccolissime anche se sotto tensioni di valore elevato. Essi sono ormai abbandonati. Migliori dei precedenti sono indubbiamente i generatori elettrostatici del tipo ad induzione, che sfruttano invece il fenomeno dell' induzione elettro-

---

[1] Nel caso degli strumenti a bilancia infatti la forza F è proporzionale al quadrato della tensione applicata fra le armature (formula 3.33-13).

statica, coi quali è possibile raggiungere in costruzioni speciali tensioni elevatissime (qualche decina di milioni di volt, tensione continua si intende).

3.37 Problemi di applicazione al § 3.3

Esercizio 3.371

Per caricare un condensatore ad armature piane e parallele, distanti $d = 0{,}5$ mm, fra le quali si trova un dielettrico omogeneo di costante dielettrica $\varepsilon_r = 5$, si è dovuto fornirgli l'energia elettrica pari a 500 microjoule. Il dielettrico viene sollecitato allora da un campo elettrico $K = 10$ kV/mm. In queste condizioni si trovi il valore della carica Q, della tensione V e dell'area S delle armature del condensatore.

Soluzione

Conviene calcolare anzitutto l'ammontare della tensione esistente fra le armature. Questa infatti vale:

$$V = Kd = 10000 \cdot 0{,}5 = 5000 \text{ volt} .$$

Nota così la tensione, dalla formula $W_c = \frac{1}{2} QV$ si ricaverà il valore della carica Q:

$$Q = \frac{2\, W_c}{V} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^3} = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ coulomb} .$$

Il valore della superficie S si potrà calcolare ad esempio allora tramite la formula della capacità del condensatore $C = \varepsilon_r\, \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{Q}{V}$, cioè:

$$S = \frac{Qd}{V \varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}} = 4{,}52 \cdot 10^{-4} = 4{,}52 \text{ cm}^2 .$$

Esercizio 3.372

Due condensatori $C_1 = 0{,}1$ μF e $C_2 = 0{,}04$ μF, caricati separatamente il primo alla tensione $V_1 = 600$ volt e il secondo alla tensione

$V_2 = 1000$ volt, vengono successivamente collegati in parallelo con le polarità concordi (vedi fig. 3.372-1).

Si trovi : *a*) la *d.d.p.* V ai capi del parallelo ; *b*) l'energia posseduta da ciascun condensatore prima e dopo il collegamento.

Soluzione

a) Il valore V assunto dalla *d.d.p.* ai capi dei due condensatori si trova ricordando che, a parallelo avvenuto, il sistema costituito dai due

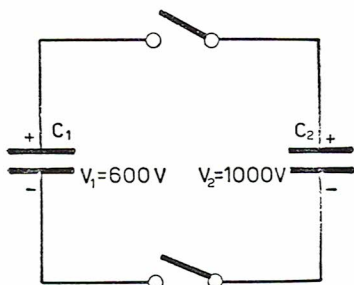



Fig. 3.372-1

condensatori possiede ancora la stessa quantità di elettricità che esso aveva prima del collegamento poiché questo ha unito armature dello stesso segno (principio della conservazione della carica). Quindi si potrà scrivere che :

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} = \frac{(0{,}1 \cdot 600 + 0{,}04 \cdot 1000)\, 10^{-6}}{(0{,}1 + 0{,}04)\, 10^{-6}} = 714 \text{ volt} .$$

Si noti che è il condensatore C_2, il quale vede abbassare la sua *d.d.p.* da 1000 a 714 volt, che con la sua scarica parziale ha fatto aumentare la *d.d.p.* ai capi di C_1 da 600 a 714 volt.

b) L'energia posseduta da ciascun condensatore prima dell' inserzione parallelo ammonta a :

$$W'_{c_1} = \frac{1}{2}\, C_1 V_1^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 600^2 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ joule}$$

$$W'_{c_2} = \frac{1}{2}\, C_2 V_2^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}04 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ joule} ;$$

mentre, a collegamento avvenuto, si ha :

$$W''_{c_1} = \frac{1}{2}\, C_1 V^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 714^2 = 25{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ joule}$$

$$W''_{c_2} = \frac{1}{2}\, C_2 V^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}04 \cdot 10^{-6} \cdot 714^2 = 10{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ joule} .$$

Nella messa in parallelo dei due condensatori si è perso, prevalentemente per effetto Joule [1] dovuto alla corrente di scarica di C_2 e quindi di carica di C_1, l'energia:

$$W'_{c_1} + W'_{c_2} - (W''_{c_1} + W''_{c_2}) = (38{,}0 - 35{,}7)\,10^{-3} = 2{,}3\cdot 10^{-3} \text{ joule}\,.$$

N.B. Si osservi che il procedimento di calcolo rimane lo stesso anche nel caso in cui i due condensatori vengano collegati fra di loro con polarità opposta. Naturalmente ora la tensione, a collegamento effettuato, sarà espressa da $V = \dfrac{Q_1 - Q_2}{C_1 + C_2}$.

Esercizio 3.373

Un condensatore in aria, costituito da due armature piane e parallele ($S = 113$ cm^2, $d = 2$ mm), è stato caricato alla tensione $V = 100$ volt. Il condensatore viene successivamente staccato dal generatore che lo ha caricato e quindi sottoposto a delle forze per cui, alla fine, le armature si sono allontanate, mantenendosi parallele, della quantità $\delta = 0{,}5$ mm. Si trovi il valore della forza elettrostatica che sollecita ciascuna armatura in queste condizioni e il lavoro speso nell'allontanamento.

Soluzione

Per il calcolo della forza ci si avvarrà della formula 3.33-4 data nel testo, poiché la quantità di elettricità Q rimane costante durante il movimento delle armature, in quanto il condensatore è elettricamente isolato. La forza F di attrazione fra le due armature non subirà praticamente quindi alcuna variazione, dato che viene soddisfatta anche in questo caso l'ipotesi della non influenza dei bordi.

D'altronde Q vale:

$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V = 8{,}86\cdot 10^{-12}\,\frac{113\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-3}}\,100 = 5\cdot 10^{-9} \quad \text{coulomb}\,,$$

per cui si ha subito che:

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{25\cdot 10^{-18}}{2\cdot 8{,}86\cdot 10^{-12}\cdot 113\cdot 10^{-4}} = 125\cdot 10^{-6} \text{ newton}\,.$$

---

[1] Nelle inevitabili resistenze costituenti il circuito, anche se queste non appaiono esplicitamente nello schema di fig. 3.372-1.

Il lavoro compiuto per allontanare le due armature risulta allora, poiché la forza F è costante, come segue:

$$L = F \cdot \delta = 125 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 62{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ joule} .$$

Il risultato ora ottenuto può essere controllato nel seguente modo. Indicata con W'_c l'energia posseduta dal condensatore prima del movimento delle sue armature e con W''_c l'energia a movimento effettuato, dovrà essere, per quanto è stato osservato nel § 3.34, :

$$W''_c = W'_c + L ,$$

da cui si ottiene perciò facilmente anche:

$$L = W''_c - W'_c .$$

Per calcolare W'_c si userà d'altronde la seguente formula:

$$W'_c = \frac{1}{2} QV = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}{2} = 250 \cdot 10^{-9} \text{ joule} ;$$

mentre per il calcolo di W''_c si farà ricorso alla formula:

$$W''_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \dfrac{S}{d + \delta}} = \frac{25 \cdot 10^{-18}}{2 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \dfrac{113 \cdot 10^{-4}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}}} =$$

$$= 312{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ joule} .$$

Pertanto risulta che:

$$L = W''_c - W'_c = (312{,}5 - 250)\, 10^{-9} = 62{,}5 . 10^{-9} \text{ joule} ,$$

perfettamente in accordo con quanto già trovato.

Esercizio 3.374

Si trovi il valore della forza che sollecita ciascuna armatura di un condensatore piano ($S = 113$ cm^2), sottoposto alla tensione di 200 volt, il cui dielettrico è costituito da due lastre omogenee ($d_1 = 1$ mm, $\varepsilon_{r_1} = 2$; $d_2 = 2$ mm, $\varepsilon_{r_2} = 7$) come appare in fig. 3.374-1.

Soluzione

Le forze che sollecitano le due armature non sono di eguale intensità. Si consideri infatti che il condensatore dato può essere studiato come due condensatori piani collegati in serie aventi ciascuno un dielettrico omogeneo (vedi fig. 3.374-2) e sottoposto alle seguenti tensioni:

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V = \frac{\frac{\varepsilon_{r_2}}{d_2}}{\frac{\varepsilon_{r_1}}{d_1} + \frac{\varepsilon_{r_2}}{d_2}} V = \frac{3,5}{2 + 3,5} 200 = 127,2 \text{ volt}$$

$$V_2 = V - V_1 = 200 - 127,2 = 72,8 \text{ volt}.$$

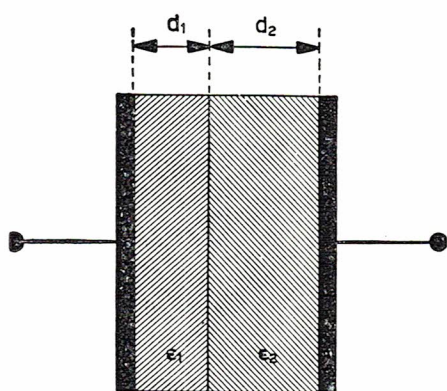
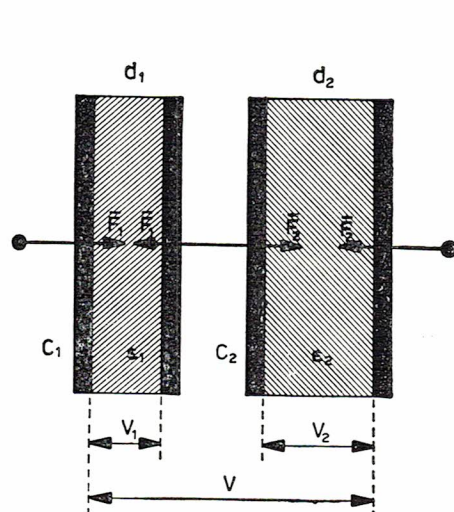



Fig. 3.374-1 *Fig. 3.374-2*

Sarà pertanto, ricordando la formula 3.33-5 del testo:

$$F_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{r_1} \varepsilon_0 \frac{S}{d_1^2} V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{113 \cdot 10^{-4}}{10^{-6}} 1,62 \cdot 10^4 =$$

$$= 1,62 \cdot 10^{-3} \text{ newton}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{r_2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_2^2} V^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{113 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-6}} 0,53 \cdot 10^4 =$$

$$= 0,464 \cdot 10^{-3} \text{ newton}.$$

Si noti che la differenza di queste due forze, cioè $F_1 - F_2 = 1,156 \cdot 10^{-3}$ newton, agisce sulla superficie di separazione dei due dielettrici.

3.4 16 esercizi completamente svolti di Elettrostatica

Esercizio 3.41

Si trovi l'espressione assunta nel punto P dal campo elettrico dovuto a tre cariche eguali puntiformi positive Q, poste nei vertici di un triangolo equilatero di lato a (vedi fig. 3.41-1). Si traccino quindi le linee di forza del campo elettrico risultante.

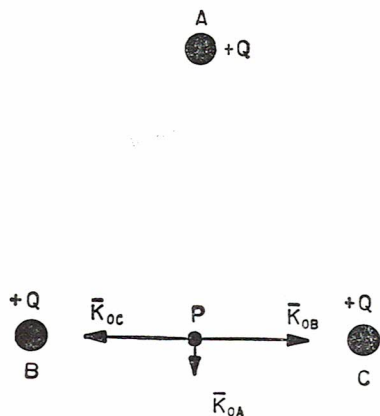



Fig. 3.41-1

Soluzione

Il campo elettrico nel punto P si troverà come risultante dei tre vettori rappresentanti ciascuno in P il campo elettrico dovuto ad una delle tre cariche elettriche.

Si incominci ad osservare che i campi elettrici $\bar{K}_{0B}$ e $\bar{K}_{0C}$, dovuti rispettivamente alle cariche Q_B e Q_C, si elidono poiché nel punto P essi risultano eguali in direzione e modulo, ma contrari in verso. Rimarrà perciò solamente il campo $\bar{K}_{0A}$ dovuto alla carica Q_A.

Ricordando allora la formula 3.111-10 riportata nel § 3.111, si ha:

$$K_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \overline{AP}^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{3}{4} a^2}.$$

L'andamento delle linee di forza del campo elettrico è stato riportato in fig. 3.41-2. Si osservi che nel baricentro del triangolo il campo è nullo, mentre praticamente, da una certa distanza in poi è come se nel baricentro fosse concentrata la carica $+ 3\ Q$.

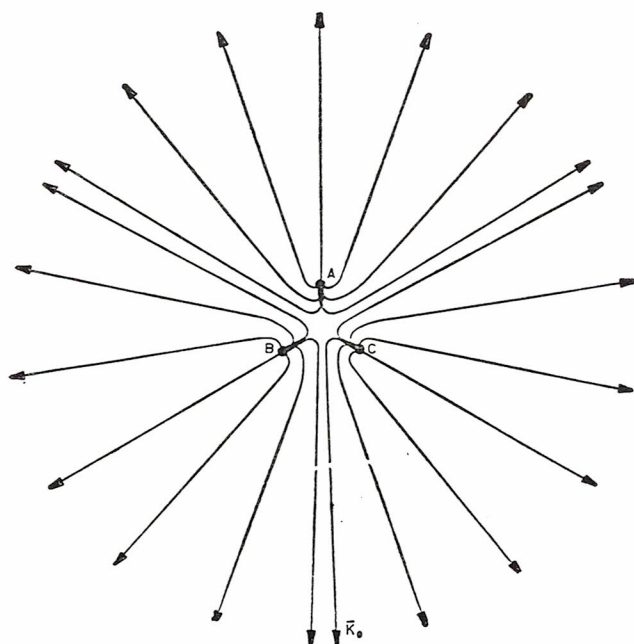



Fig. 3.41-2

Esercizio 3.42

Due piccole sfere di rame, perfettamente eguali, di cui una è carica negativamente ($Q = 10^{-8}$ coulomb), mentre l'altra è scarica, vengono a toccarsi, nell'aria, per un certo tempo, quindi sono allontanate. Si trovi l' intensità della forza che si manifesta quando la loro distanza raggiunge i due metri.

Soluzione

Le due sfere, dopo il contatto, portano ciascuna una carica elettrica negativa che vale la metà di quella Q posseduta inizialmente dalla sfera carica, poiché le due sfere sono eguali nella forma.

Pertanto la forza F, che risulta di repulsione, alla distanza di 2 metri ammonterà a :

$$F = \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{Q}{2}}{4\,\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-8}}{12{,}57 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 4} = 56{,}1 \cdot 10^{-9} \text{ newton} .$$

Esercizio 3.43

Si trovi la posizione di equilibrio assunta da due palline eguali, ciascuna del peso P, sospese ad un filo isolante lungo l, cariche della stessa quantità di elettricità Q e dello stesso segno, immerse nell'aria.

Soluzione

Le due palline, poiché sono cariche di elettricità dello stesso segno, si allontaneranno (vedi fig. 3.43-1a) finché l'azione della forza F di

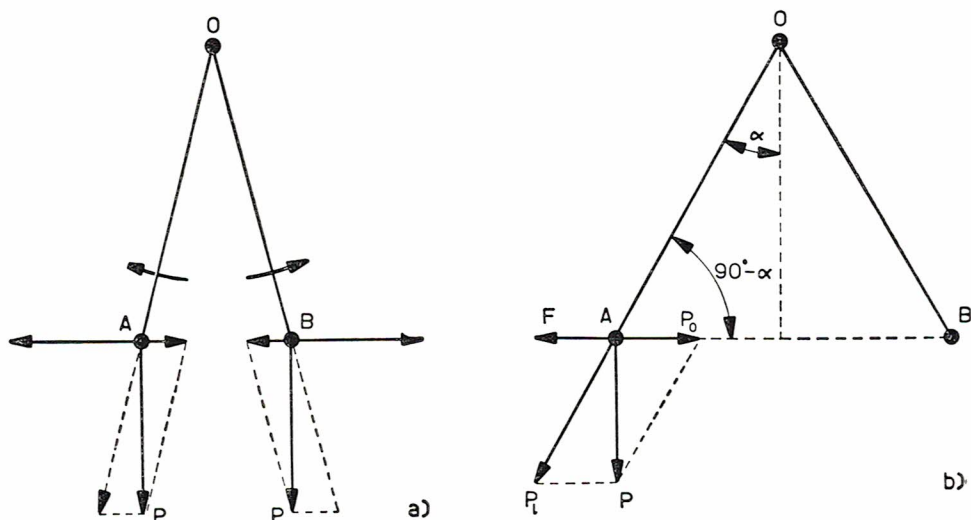



Fig. 3.43-1

repulsione prevarrà su quella P dovuta al peso, che tende invece a mantenere vicine le due palline.

La posizione di equilibrio si raggiungerà d'altronde quando la forza F di natura elettrostatica sarà equilibrata dalla componente orizzontale P_0 della forza peso, si veda la fig. 3.43-1b. L'altra componente della forza peso, la P_l, non preoccupa poiché è stata fatta agire in direzione del filo, per cui essa verrà sopportata interamente dal filo di sospensione.

Indicato allora con α l'angolo che il filo, nella posizione di equilibrio, forma con la verticale, si potrà scrivere subito, poiché all'equilibrio $P_0 = F$, che:

$$P \operatorname{cotg} (90^0 - \alpha) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2\, l \operatorname{sen} \alpha)^2}.$$

Questa è un'equazione trigonometrica nella sola incognita α, perciò perfettamente risolubile. Praticamente converrà ricorrere ad un metodo

di risoluzione grafica. Naturalmente ricavato il valore di α, sarà parimente nota la posizione assunta dalle due palline.

Esercizio 3.44

Si trovi il valore del campo elettrico nell' interno di due piani conduttori distanti 10 centimetri, si veda la fig. 3.44-1, i quali risultano carichi di elettricità di segno opposto e tale da determinare su ciascun piano una densità di carica del valore di $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ C/m².

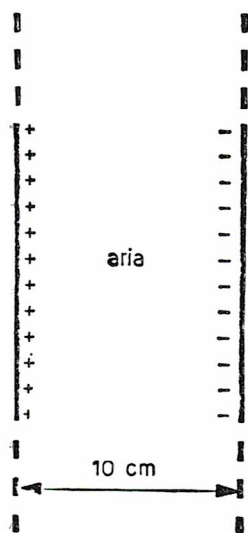



Fig. 3.44-1

Soluzione

È noto che in un punto qualsiasi di una linea di forza lo spostamento elettrico D_0 assume il valore che ha la densità di carica relativa al tubo di flusso infinitesimo che contiene quella linea di forza.

Nel nostro caso, poiché la carica elettrica è uniformemente distribuita e le linee di forza sono fra loro parallele, si ha subito in ciascun punto interno che:

$$D_0 = \frac{Q}{S} = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2 ,$$

per cui:

$$K_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}}{8{,}86 \cdot 10^{-12}} = 22{,}6 \cdot 10^3 \text{ V/m} .$$

Il risultato è indipendente dalla distanza dei due piani conduttori.

Esercizio 3.45

Si trovi il valore della capacità da assegnare al condensatore C_1, posto in serie ad un condensatore di capacità nota $C_2 = 10000$ pF (vedi fig. 3.45-1), affinché la tensione di quest'ultimo sia di 100 volt quando ai due condensatori risulta applicata una tensione continua del valore di 2 kV.

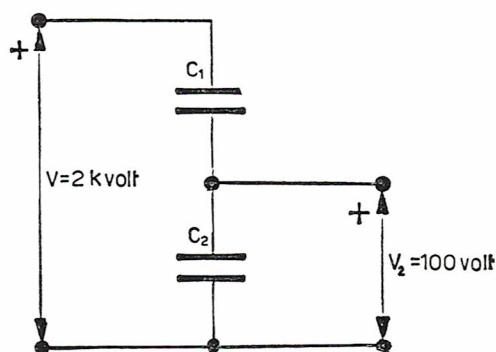



Fig. 3.45-1

Soluzione

La tensione V_2 ai capi del condensatore C_2 risulta espressa dalla formula 3.114-3 riportata nel § 3.114, la quale, risolta pertanto rispetto a C_1, dà:

$$C_1 = \frac{V_2}{V - V_2} C_2 ,$$

e quindi, con i dati del problema, si ha subito che:

$$C_1 = \frac{100}{2000 - 100} 10^{-8} = 527 \text{ pF} .$$

Esercizio 3.46

Due condensatori $C_1 = 2$ μF e $C_2 = 3$ μF sono sottoposti all'azione di due generatori eguali, agenti in serie concorde (vedi circuito di fig. 3.46-1, ove $V_0' = V_0'' = V_0 = 250$ volt e $R_0' = R_0'' = 2$ ohm).

Si trovi il valore della quantità di elettricità Q_x che fluirà attraverso il tasto T, quando questo verrà chiuso.

Soluzione

Prima della chiusura del tasto, ciascun condensatore possiede la carica :

$$Q = 2V_0 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2 \cdot 250 \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{(2 + 3)\, 10^{-6}} = 600 \cdot 10^{-6}\, \mathrm{C}\,,$$

poiché la tensione ai capi dei due condensatori è $2V_0$, non essendoci caduta di tensione nelle due resistenze interne R'_0 ed R''_0.

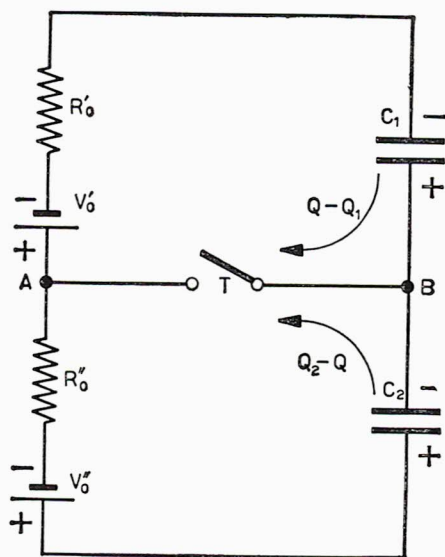



Fig. 3.46-1

Dopo la chiusura del tasto, lasciato passare il transitorio, ciascun condensatore sarà sottoposto alla tensione di un singolo generatore, precisamente C_1 risulterà carico alla tensione V'_0, cioè 250 volt, così come C_2 risulterà carico alla tensione V''_0, che vale ancora 250 volt.
Pertanto in queste nuove condizioni sarà :

$$Q_1 = C_1 V'_0 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 250 = 500 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

$$Q_2 = C_2 V''_0 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 250 = 750 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C},$$

e quindi C_1 dovrà perdere $Q - Q_1 = 100$ microcoulomb, mentre C_2 dovrà invece assorbire $Q_2 - Q = 150$ microcoulomb.

Nel conduttore AB, cioè attraverso il tasto T, passerà d'altronde la somma delle su citate quantità di elettricità, quindi 250 microcoulomb, poiché tanto le cariche elettriche di scarica di C_1 quanto quelle di carica di C_2 presentano il verso da B ad A.

Esercizio 3.47

Cinque condensatori eguali ($C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 1\ \mu F$) sono collegati fra di loro come appare in fig. 3.47-1. Si trovi il valore della tensione ai capi del condensatore C_1 sapendo che fra i punti A e B la tensione vale 200 volt.

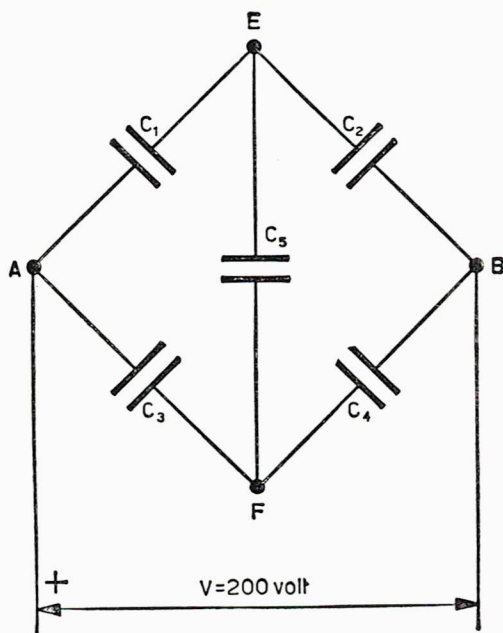



Fig. 3.47-1

Soluzione

Poiché i quattro condensatori C_1, C_2, C_3, C_4 sono di capacità eguale, certamente la *d.d.p.* fra i punti E ed F sarà nulla, per cui $V_{C1} = 100$ volt (partitore capacitivo $C_1 \div C_2$ a vuoto).

La dimostrazione è assai semplice. Si pensi di togliere il condensatore C_5: in tal caso $V_{AE} = V_{AF} = 100$ volt e quindi $V_{EF} = 0$. Si osservi che per la maglia $AEFA$ si può scrivere infatti: $V_{AE} + V_{EF} + V_{FA} = 0$. Ma la condizione $V_{EF} = 0$ porta ad affermare di conseguenza che il condensatore C_5, essendo scarico, può essere tolto dalla rete se questa rimane nelle condizioni previste dal problema, giustificando quindi l'ipotesi fatta.

Concludendo sarà dunque:

$$V_{C1} = V_{AE} = \frac{1}{2}\ V_{AB} = 100 \text{ volt}.$$

Esercizio 3.48

Tre condensatori ($C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$, $C_3 = 4\ \mu F$) sono caricati in serie alla tensione $V = 140$ volt (vedi fig. 3.48-1*a*); quindi, dopo esser stati staccati, vengono collegati in parallelo (vedi fig. 3.48-1*b*) in

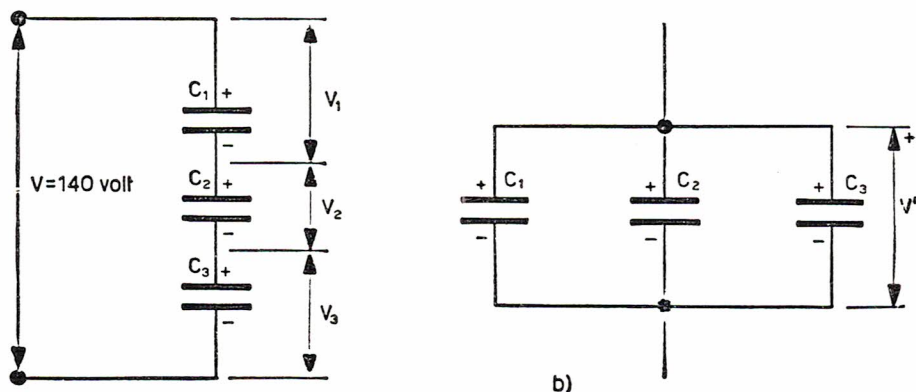



Fig. 3.48-1

modo che risultino riunite fra di loro le armature portanti cariche elettriche dello stesso segno.

Si trovi il valore della tensione V' che si stabilisce ai capi del parallelo.

Soluzione

La carica Q posseduta da ciascun condensatore, nel collegamento serie, vale:

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} V = \frac{10^{-6}}{1 + 0{,}5 + 0{,}25} 140 = 80 \cdot 10^{-6} \text{ coulomb} .$$

D'altronde nel collegamento in parallelo il sistema possiederà una carica $3\,Q$ ed una capacità $C_1 + C_2 + C_3$: pertanto la tensione V' cercata ammonterà a:

$$V' = \frac{3\,Q}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{(1 + 2 + 4)\,10^{-6}} = \frac{240}{7} = 34{,}3 \text{ volt} .$$

Si noti che, risultando nel collegamento serie: $V_1 = Q/C_1 = 80\text{ V}$, $V_2 = Q/C_2 = 40\text{ V}$, $V_3 = Q/C_3 = 20\text{ V}$, nel collegamento parallelo saranno

i condensatori C_1 e C_2 a fornire cariche elettriche al condensatore C_3, affinché la *d.d.p.* di quest'ultimo possa elevarsi da 20 a 34,3 volt.

Esercizio 3.49

Si calcoli il valore del potenziale e del campo elettrico in un punto qualsiasi posto sulla superficie di un corpo conduttore sferico di raggio $r = 4$ cm, portante la carica $Q = 0{,}02 \cdot 10^{-6}$ coulomb, immerso nell'aria e lontano da altri corpi.

Soluzione

Il potenziale V della sfera può essere calcolato semplicemente tramite la ben nota relazione $V = Q/C$, dove per la capacità C si farà ricorso alla formula 3.115-1 riportata nel testo. Si ha quindi:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{0{,}02 \cdot 10^{-6}}{12{,}57 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 4490 \text{ volt} .$$

Il campo elettrico K_0 sulla superficie (il vettore è naturalmente ortogonale alla superficie della sfera) si calcolerà invece con la formula 3.111-10, valevole anche per punti posti (al limite) sulla superficie di un corpo sferico, e non soltanto lontani da esso [1]. Sarà perciò:

$$K_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{0{,}02 \cdot 10^{-6}}{12{,}57 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 112{,}2 \text{ kV/m} .$$

Esercizio 3.410

Si trovi il valore della capacità della Terra (raggio terrestre 6370 km) e dell' intensità del campo elettrico sulla sua superficie, sapendo che la densità di carica superficiale, che è negativa, vale $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ coulomb/km².

Soluzione

La Terra può essere considerata, con buona approssimazione, come un corpo conduttore sferico. Per questo, facendo ricorso alla formula

---

[1] La formula 3.111-10 discende infatti dal teorema di Gauss. La superficie di raggio r attraverso la quale si considera il flusso del vettore $\overline{D}_0$ può essere, al limite, posta a coincidere con quella del corpo sferico carico. Non volendo ricorrere al teorema di Gauss, basterà semplicemente ricordare che il modulo del vettore induzione coincide sempre con il valore della densità di carica presente sulla superficie del corpo nel punto considerato. In questo caso particolare la densità di carica superficiale vale $Q/4\pi r^2$.

3.115-1 del testo, poiché il mezzo che circonda la Terra ha costante dielettrica relativa unitaria, si ha:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r = 12{,}57 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 = 708 \cdot 10^{-6} \text{ farad.}$$

Il campo elettrico K_0 si calcolerà assai semplicemente ricordando che $D_0 = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 K_0$; per cui:

$$K_0 = \frac{\text{densità di carica superficiale}}{\varepsilon_0}.$$

Con i dati del problema si ottiene quindi:

$$K_0 = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-9}}{8{,}86 \cdot 10^{-12}} = 302 \text{ volt/metro}.$$

Il vettore campo è diretto verso l' interno della Terra, poiché questa risulta carica negativamente.

Esercizio 3.411

Si calcoli la capacità di un condensatore cilindrico in aria, lungo 80 cm, la cui armatura interna presenta un raggio di 2 cm, mentre quella esterna ha un raggio di 3 cm, nonché la massima *d.d.p.* applicabile fra le due armature.

Soluzione

La capacità del condensatore costituito da due armature cilindriche coassiali, per la formula 3.115-3 data nel testo, vale:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{6{,}28 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}80}{2{,}30 \log \frac{3}{2}} = 110 \text{ pF}.$$

Per trovare il valore massimo della tensione applicabile al condensatore si incominci ad osservare come il campo elettrico fra le due armature diventa sempre più intenso a mano a mano che ci si avvicina alla armatura interna (vedi fig. 3.411-1). Sulla superficie di questa il campo raggiunge quindi il massimo valore. Questo si potrà calcolare d'altronde con lo stesso procedimento riportato nell'esercizio 3.294.

Indicata perciò con K_{01} l' intensità di tale campo elettrico si ha, ricordando ovviamente che $Q = CV$:

$$K_{01} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r_1 l} = \frac{CV}{2\pi\varepsilon_0 r_1 l}.$$

Da questa formula si potrà ricavare perciò, ponendo K_r al posto di

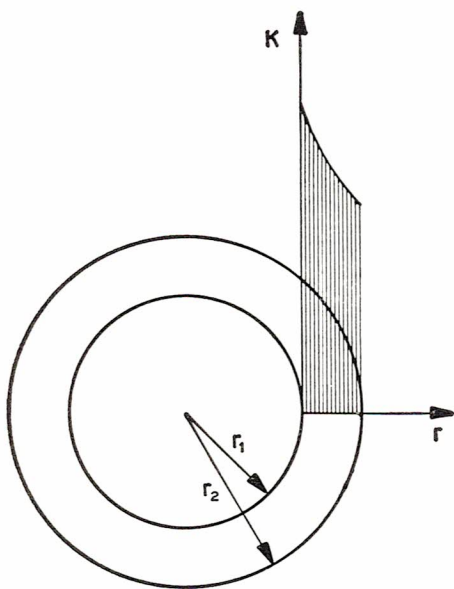



Fig. 3.411-1

K_{01}, l'espressione della tensione massima applicabile fra le armature del condensatore:

$$V_{max} = \frac{2\pi\varepsilon_0 r_1 l}{C} K_r.$$

Ricordando che per l'aria la rigidità dielettrica K_r ammonta a 3 kV/mm $= 3 \cdot 10^6$ V/m, si ottiene finalmente il valore cercato:

$$V_{max} = \frac{6{,}28 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}80}{110 \cdot 10^{-12}} 3 \cdot 10^6 = 24300 \text{ volt}.$$

Esercizio 3.412

Fra le armature piane e parallele ($S = 113$ cm², $d = 2{,}4$ mm) di un condensatore in aria ($K_{ra} = 3$ kV/mm), sottoposto alla tensione $V =$

$= 3600$ volt, viene posta una lastra di materiale isolante ($d_2 = 1$ mm, $\varepsilon_{r_2} = 7$) come risulta dalla fig. 3.412-1. La suddetta lastra è equidistante dalle armature ($d_1 = d_3$).

Si trovi la variazione che ha subìto l' intensità del campo elettrico in quella parte di dielettrico costituita dall'aria in seguito all' introduzione della lastra isolante.

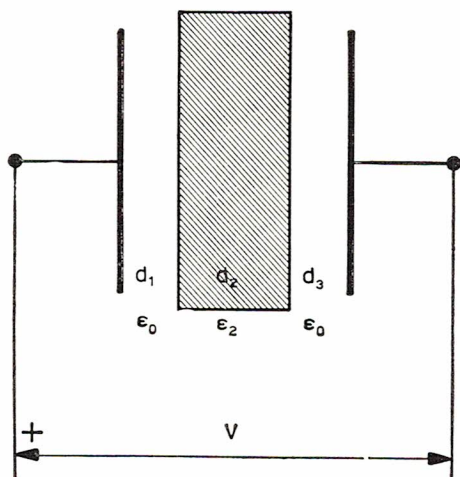



Fig. 3.412-1

Soluzione

1) Prima dell' introduzione della lastra isolante, il campo elettrico K_0' vale :

$$K_0' = \frac{V}{d} = \frac{3600}{2,4} = 1500 \text{ V/mm} ,$$

cioè metà del valore della rigidità dielettrica ($K_0' = 50\ \%\ K_{ra}$).

2) Ad avvenuta introduzione della lastra, il condensatore può essere studiato come costituito da tre condensatori in serie, aventi dielettrico omogeneo, di cui due, quelli in aria, presentano capacità eguale (infatti $d_1 = d_3 = 0,7$ mm). Indicata allora con C_1 questa capacità e con C_2 la capacità del condensatore che ha per dielettrico la lastra, il campo elettrico K_0'' nel dielettrico aria, in queste condizioni, sarà espresso dalla formula (vedi fig. 3.412-2*a* e *b*) :

$$K_0'' = \frac{V_1}{d_1} = \frac{1}{d_1} \frac{C_2}{C_2 + \frac{C_1}{2}} \frac{V}{2} .$$

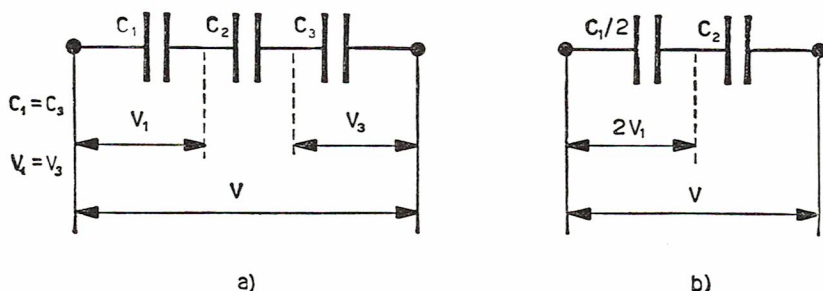



Fig. 3.412-2

Poiché d'altronde:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{113 \cdot 10^{-4}}{0{,}7 \cdot 10^{-3}} = 143 \text{ pF}$$

$$C_2 = \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_2} = 7 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \frac{113 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 700 \text{ pF},$$

si ha immediatamente che:

$$K_0'' = \frac{1}{0{,}7} \frac{700}{700 + 71{,}5} 1800 = 2330 \text{ V/mm},$$

cioè $K_0'' \cong 78\,\%\, K_{ra}$.

Il campo elettrico nell'aria ha avuto dunque un incremento di 830 V/mm, pari al 55 % del valore iniziale.

Esercizio 3.413

Fra le armature piane e parallele ($S = 2260$ cm², $d = 4{,}6$ mm) di un condensatore in aria, portanti ciascuna la carica $Q = 0{,}02 \cdot 10^{-6}$ C, viene posta nel mezzo una lastra metallica avente spessore $\delta = 0{,}6$ mm e dimensioni leggermente più grandi di quelle presentate da un'armatura (vedi fig. 3.413-1).

Con questi dati si trovi: *a*) la variazione di capacità subìta dal condensatore; *b*) la variazione dell'energia elettrostatica, sapendo che il condensatore è isolato.

Soluzione

a) La lastra metallica posta internamente alle armature trasforma il condensatore dato in due condensatori in serie. La capacità C_0' di

questo nuovo sistema vale, con riferimento alla fig. 3.413-1, tenendo conto che le due capacità in serie sono eguali, poiché $d_1 = d_2 = 2$ mm:

$$C'_0 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = \frac{1}{2}\;8{,}86\cdot 10^{-12}\,\frac{2260\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-3}} = 500 \text{ pF};$$

mentre in assenza della lastra la capacità C_0 del condensatore valeva:

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}86\cdot 10^{-12}\,\frac{2260\cdot 10^{-4}}{4{,}6\cdot 10^{-3}} = 435 \text{ pF}.$$

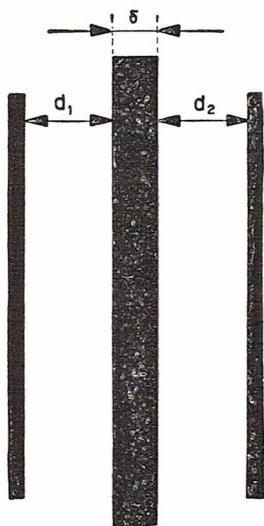



Fig. 3.413-1

La variazione di capacità è stata dunque positiva ed ammonta a 65 pF [aumento del 15 %, per cui la tensione fra le armature è diminuita del 13 % (1)].

b) Anche a lastra introdotta, la quantità di elettricità Q su ciascuna armatura rimane inalterata (il sistema è isolato), per questo motivo l'energia elettrostatica nella nuova condizione si calcolerà con la formula del tipo $\frac{1}{2C}\,Q^2$. Naturalmente l'energia W' posseduta dal sistema varrà la somma dell'energia W'' posseduta da ciascuno dei due

---

(1) Infatti si può scrivere:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{\dfrac{Q}{C'_0} - \dfrac{Q}{C_0}}{\dfrac{Q}{C_0}} = \frac{C_0 - C'_0}{C'_0} = \frac{435 - 500}{500} = -13\ \%.$$

condensatori in serie, le cui capacità valgono $C_0'' = 2C_0' = 1000$ pF, quindi:

$$W' = 2W'' = 2\,\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C_0''} = \frac{4\cdot 10^{-16}}{1000\cdot 10^{-12}} = 0{,}40\cdot 10^{-6}\ \text{joule}\,.$$

In assenza della lastra metallica l'energia W ammonta invece a:

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C_0} = \frac{4\cdot 10^{-16}}{2\cdot 435\cdot 10^{-12}} = 0{,}46\cdot 10^{-6}\ \text{joule}\,.$$

La differenza $W - W'$, cioè $(0{,}46 - 0{,}40)\,10^{-6} = 0{,}06\cdot 10^{-6}$ joule [2], costituisce il lavoro meccanico compiuto dalla lastra nell'entrare fra le armature. La lastra viene infatti spinta dentro (come si dice anche *succhiata*) dalle forze di natura elettrostatica e si fermerà quando il sistema si sarà portato nella condizione di minima energia potenziale.

Esercizio 3.414

Sei condensatori ($C_1 = C_2 = C_4 = 0{,}5$ μF, $C_3 = C_5 = 1$ μF, $C_6 = 2$ μF) vengono collegati fra di loro come in fig. 3.414-1. Si trovi il

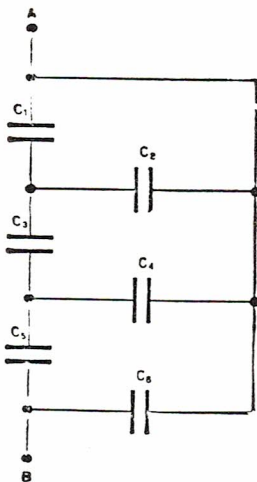



Fig. 3.414-1

---

(2) In questo caso, percentualmente il valore della diminuzione di energia coincide con quello della diminuzione di tensione, poiché:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W' - W}{W} = \frac{\frac{1}{2}QV' - \frac{1}{2}QV}{\frac{1}{2}QV} = \frac{V' - V}{V} = -13\,\%\,.$$

Infatti con i dati ora trovati si ha:

$$\frac{0{,}40 - 0{,}46}{0{,}46} = -0{,}13\,.$$

valore della tensione fra i punti A e B e ai capi del condensatore C_5 sapendo che l'energia totale posseduta dai sei condensatori è di 5 joule.

Soluzione

È necessario calcolare come prima cosa la capacità equivalente fra i punti A e B. A tale scopo si veda la fig. 3.414-2, ove sono state riportate le varie fasi per ridurre la capacità dei sei condensatori a quella equivalente C_{AB}. Si trova così che $C_{AB} = 2,5$ μF.

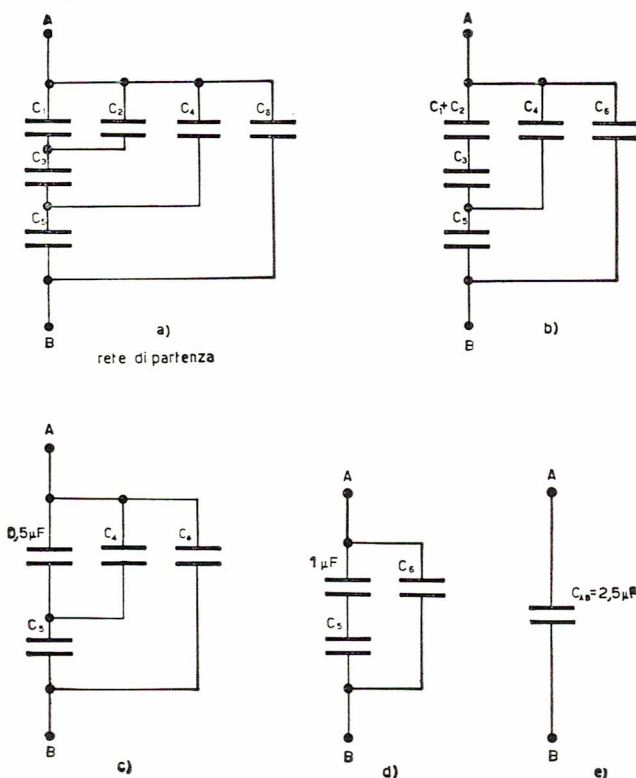



Fig. 3.414-2

La tensione fra i punti A e B si calcolerà allora tramite la formula del tipo $W_c = \frac{1}{2} CV^2$. Sarà perciò:

$$V_{AB} = \sqrt{\frac{2W_c}{C_{AB}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{2,5 \cdot 10^{-6}}} = 2000 \text{ volt}.$$

La tensione invece ai capi del condensatore C_5 si troverà osservando, si veda la rete di fig. 3.414-2*d*, che esso è in serie ad una capacità di

egual valore (1 μF) per cui la tensione V_{AB} si ripartirà in proporzioni eguali sulle due capacità.

Sarà quindi:

$$V_{C5} = \frac{1}{2} V_{AB} = 1000 \text{ volt} .$$

Esercizio 3.415

Un condensatore C_1 della capacità di 1 μF, carico alla tensione $V_1 = 100$ volt, viene staccato dal generatore che lo ha caricato e quindi posto in parallelo ad un condensatore scarico C_2 della capacità di 0,6 μF (vedi fig. 3.415-1).

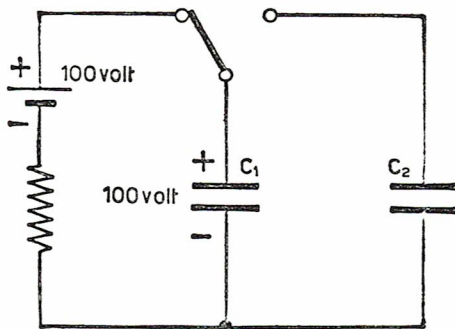



Fig. 3.415-1

Si trovi il valore della tensione V alla quale si è portato il sistema costituito dai due condensatori.

Soluzione

La quantità di elettricità Q dislocata ad esempio sull'armatura positiva del condensatore C_1, che vale $Q = C_1 V_1 = 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-4}$ C, si distribuirà sull' insieme delle due armature positive a parallelo avvenuto (conservazione della carica). Pertanto, detta C_{eq} la capacità del parallelo ($C_{eq} = C_1 + C_2 = 1{,}6$ μF), si avrà che:

$$V = \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-6}} = 62{,}5 \text{ volt} .$$

In queste condizioni l'energia elettrostatica del sistema ammonta a $W' = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} 10^{-4} \cdot 62{,}5 = 3{,}12 \cdot 10^{-3}$ joule; mentre il condensatore C_1 aveva immagazzinato da solo l'energia $W = \frac{1}{2} Q V_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 100 =$

$= 5{,}00 \cdot 10^{-3}$ joule. La differenza $W - W' = 1{,}88 \cdot 10^{-3}$ joule è andata perduta nell'operazione di scarica del condensatore C_1 su C_2, a causa dell'effetto Joule dovuta alla corrente transitoria nel circuito.

Esercizio 3.416

Si trovi il valore dell'energia elettrostatica immagazzinata da ogni chilometro di una linea elettrica aerea a 100 volt, costituita da due conduttori rettilinei, del diametro di 10 millimetri, distanti fra di loro 1 metro e lontani da altri corpi.

Soluzione

L'energia elettrostatica posseduta dal sistema di conduttori può esser calcolata tramite la formula $W_c = \frac{1}{2} C V^2$, ove il valore della capacità C si troverà per mezzo della formula 3.115-4 del testo, cioè:

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{2{,}30 \log \frac{d}{r}} = \frac{3{,}14 \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3}{2{,}30 \log \frac{1}{0{,}005}} = 5260 \text{ pF} .$$

Si ha pertanto subito che l'energia elettrostatica ammonta a:

$$W_c = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \cdot 5260 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 = 26{,}3 \text{ microjoule} .$$

MAGNETISMO ED ELETTROMAGNETISMO

4

4.1 Campo magnetico nel vuoto

4.11 Introduzione

Alcuni corpi dimostrano di possedere caratteristiche e proprietà totalmente differenti da quelle viste fino ad ora. È noto infatti dalla Fisica che un pezzo di minerale di ferro, come la magnetite (magnete naturale), e i corpi costituiti da acciaio temperato o da particolari leghe, dopo essere stati trattati convenientemente (magneti artificiali permanenti), presentano la proprietà di attrarre spontaneamente a sé altri corpi metallici, purché siano costituiti da ferro o da ferro leghe (ad esempio la limatura di ferro). È noto inoltre che queste proprietà magnetiche possono essere comunicate temporaneamente a corpi d'acciaio o di ferro dolce, inizialmente privi di tali qualità, e ciò per contatto o anche per semplice influenza da parte di un qualsiasi magnete. È risaputo d'altronde che le suddette proprietà attrattive si manifestano in maniera notevole solamente in corrispondenza di certe zone del corpo, dette *poli* del magnete, facilmente riconoscibili impiegando ad esempio la limatura di ferro : questa infatti rimane attaccata prevalentemente in corrispondenza dei poli (vedi fig. 4.11-1).

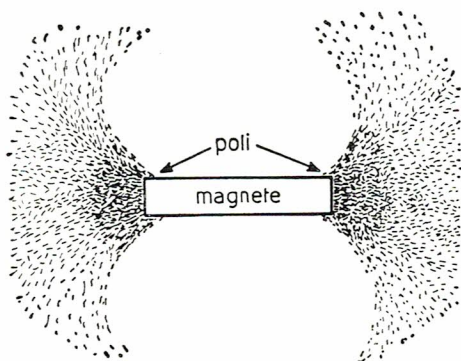



Fig. 4.11-1

Sperimentalmente si può notare ancora che, presi ad esempio due magneti rettilinei, questi si attirano o si respingono, a seconda dei casi; se invece uno dei due magneti è solamente libero di ruotare, allora esso ruoterà fino a disporsi col suo asse in una certa direzione rispetto all'altro magnete.

Tutti questi fatti dimostrano inequivocabilmente come lo spazio che circonda un magnete (naturale o artificiale, non importa) debba essere sede di un nuovo ente fisico, se appunto si vengono a manifestare azioni di forza su certi corpi ivi introdotti. Per questo motivo si dice che il magnete ha creato tutt'attorno a sé un campo di forza, o anche più precisamente un *campo magnetico.*

Compito del magnetismo è appunto quello di studiare le proprietà dei campi magnetici nel vuoto e nella materia. A questo proposito si tenga presente come le proprietà magnetiche dell'aria siano pochissimo differenti da quelle del vuoto assoluto, per cui praticamente non vi è alcuna differenza fra i fenomeni magnetici che si svolgono nei due mezzi ora citati.

4.12 Proprietà dei magneti

Caratteristica fondamentale dei magneti è quella di presentare sempre due poli magnetici. Si è potuto constatare a questo proposito come i poli di un magnete siano eguali dal punto di vista dell' intensità magnetica, ma si comportino in maniera contraria, cioè siano di *segno* contrario. Al fine perciò di distinguere un polo dall'altro, dal punto di vista del segno, si è dato loro rispettivamente il nome di nord e sud. La loro individuazione può essere fatta sperimentalmente approfittando del fatto che la Terra si comporta come un grande magnete, si veda la fig. 4.12-1:

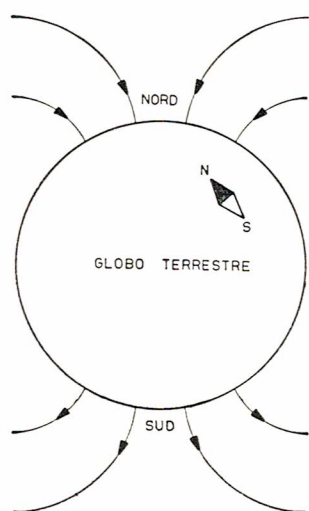



Fig. 4.12-1

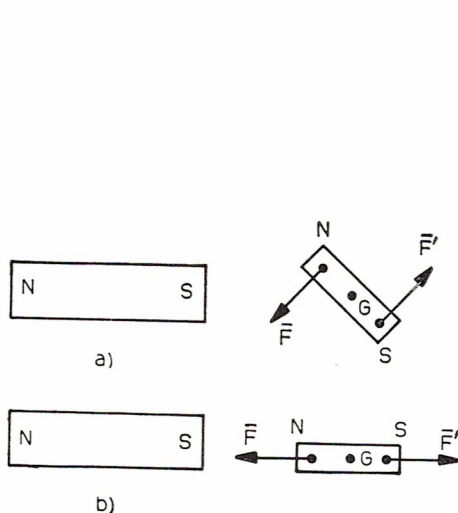



Fig. 4.12-2

è stato così definito che il polo nord di un magnete sia quella parte che tende a dirigersi verso il polo Nord terrestre.

D'altronde l'esperienza insegna che poli dello stesso nome si respingono, mentre poli di nome contrario si attraggono. Questa proprietà fa ricordare l'analoga vista nella Elettrostatica a proposito dei corpi carichi di elettricità.

Un'altra caratteristica fondamentale è quella di non poter separare fra di loro i poli di nome contrario posseduti da uno stesso magnete (ciò vale anche per un qualsiasi altro dispositivo magnetico). Pertanto, mentre è possibile separare cariche elettriche di segno opposto, non è possibile invece separare poli magnetici di segno opposto.

Si considerino ora due magneti rettilinei, di cui uno sia fisso e l'altro sia libero di girare attorno al suo baricentro G (vedi fig. 4.12-2*a*). Per quanto già è stato accennato, i poli dei due magneti saranno sottoposti a delle forze. Considerando ad esempio il magnete libero di girare, si avrà che sui suoi poli nord e sud verranno ad agire due forze tali da costituire una coppia ([1]). Tale coppia solleciterà il magnete il quale, poiché questo è stato supposto libero di ruotare, girerà fino a portarsi nella posizione di equilibrio (vedi fig. 4.12-2*b*), posizione nella quale la coppia (non le forze) è nulla. Naturalmente anche sul magnete fisso verrà ad agire una coppia di una ben determinata intensità dovuta all'azione del secondo magnete, solamente che il suo effetto risulta nullo, poiché si è detto che questo magnete non può ruotare.

La conclusione cui si arriva è dunque questa : due magneti agiscono fra di loro con forze che tendono reciprocamente a farli ruotare e a farli spostare. Ed è chiaro che queste forze, e di conseguenza le coppie, saranno tanto più forti quanto più vicini saranno fra di loro i due magneti e quanto più questi possederanno uno spiccato stato magnetico. Si può anzi affermare che anche per i magneti potrebbe essere data una formula del tutto analoga a quella di Coulomb per i corpi carichi di elettricità.

4.13 Vettore campo magnetico

Per mettere in evidenza la presenza e le proprietà peculiari di un campo magnetico è necessario munirsi di un dispositivo rivelatore di campo. Questo può essere nel nostro caso, per semplicità, un piccolo magnete ([1]) il quale, a nostra volontà, o possa ruotare liberamente attorno al suo baricentro, oppure risulti sospeso sempre baricentricamente tramite una molla ad una manopola girevole posta in sommità dell' intelaiatura portante il piccolo magnete. In questo secondo caso vi è inoltre

---

([1]) In fig. 4.12-1*a* le forze F ed F′ rappresentano quelle componenti che danno luogo al momento di rotazione.

([1]) Molto piccolo in modo da non alterare con la sua presenza il campo magnetico preesistente.

un dispositivo per bloccare il magnetino quando la molla non è in tensione (vedi fig. 4.13-1).

Si vedrà qui come ci si debba servire di questo dispositivo di rivelazione per risalire alle caratteristiche peculiari del campo magnetico in ciascun punto dello spazio. Si incominci a porre infatti nel punto voluto

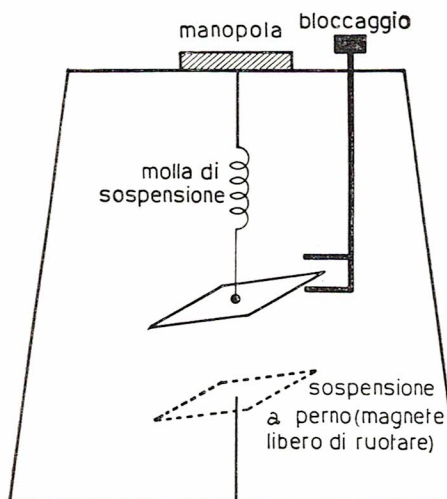



Fig. 4.13-1

il magnetino rivelatore in condizioni tali che esso possa risultare libero di ruotare. Questo allora raggiungerà una ben determinata posizione di equilibrio (dovendo annullare la coppia dovuta al campo magnetico), disponendo perciò il suo asse (2) secondo una certa direzione e con orientamento in un certo verso.

Si porti quindi, sempre nello stesso punto, il magnetino sospeso mediante la molla, in condizioni tali però da risultare bloccato ma con la molla scarica, ed inoltre tale che il suo asse risulti ortogonale alla direzione che esso aveva assunto precedentemente. Il magnetino venga successivamente sbloccato : esso allora ruoterà perché sottoposto alla coppia dovuta al campo ; ma poi si girerà la manopola di quel certo angolo che lo costringerà a ritornare nella sua posizione di partenza, cioè quella ortogonale. Si leggerà così il valore dell'angolo di cui si è dovuto ruotare la manopola, angolo che è indice della torsione subìta dalla molla.

Se si cambia ora punto di esplorazione, si troverà che il magnetino, quando esso è libero di ruotare, assumerà un'altra direzione ; mentre quando esso è sospeso alla molla ed inizialmente posto ortogonale alla nuova direzione trovata, differente sarà il valore dell'angolo di rotazione

(2) Per asse del magnete si intende la congiungente polo sud — polo nord.

di cui si dovrà far ruotare il piccolo magnete affinché esso ritorni nuovamente ortogonale alla nuova direzione.

Tutto questo dimostra che il campo magnetico deve essere una grandezza fisica avente carattere vettoriale. Precisamente il suo modulo, indicato con il simbolo H_0 (3), risulterà proporzionale all'angolo di rotazione (4), mentre la sua direzione coinciderà con quella dell'asse del magnetino in posizione di equilibrio, quando esso è libero di ruotare attorno al suo baricentro. Il verso sud-nord del piccolo magnete rivelatore in queste condizioni indicherà invece il verso del vettore (vedi fig. 4.13-2). È

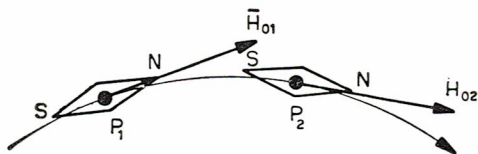



Fig. 4.13-2

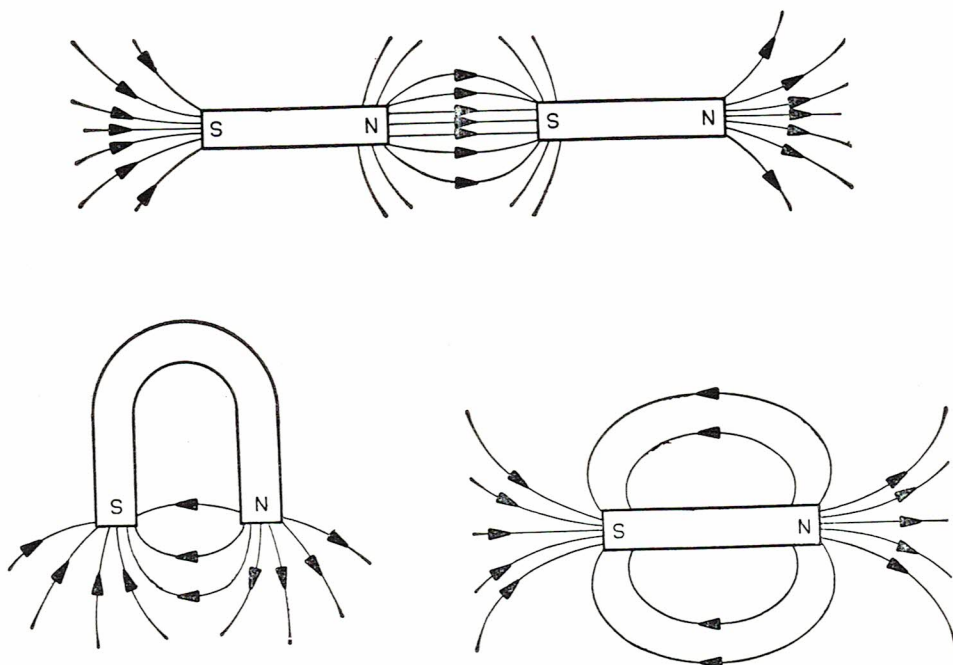



Fig. 4.13-3

chiaro che in ogni punto, con questo metodo, sarà possibile conoscere l'intensità, la direzione e il verso del vettore campo magnetico. Natu-

(3) L'indice 0 sta ad indicare la grandezza nel vuoto.

(4) Infatti la coppia che agisce sul magnetino, equilibrata dalla coppia sviluppata dalla molla in torsione, è proporzionale all'intensità del campo magnetico in quel punto.

ralmente il campo magnetico risulterà completamente noto in una certa porzione di spazio quando sarà individuato punto per punto il vettore $\overline{H}_0$.

Poiché dunque il campo magnetico è un campo vettoriale, si potranno tracciare le relative linee di forza. Per ogni punto dello spazio passerà quindi una ed una sola linea di forza di campo magnetico, la quale risulterà tangente in quel punto al vettore campo magnetico.

Come al solito, queste linee di forza hanno lo scopo di rendere *visibile* l'andamento del campo magnetico in una certa regione di spazio. Si osservi ad esempio quanto è stato riportato in fig. 4.13-3 relativamente a magneti di forma assai comune: si ricordi che le linee di forza magnetica escono sempre dal polo nord per entrare in quello sud.

4.14 Campi magnetici dovuti a correnti elettriche

I campi magnetici si possono creare non solo per mezzo di magneti naturali ed artificiali, ma anche per mezzo di circuiti percorsi da correnti elettriche. Questo secondo modo mostra come le correnti elettriche abbiano pure effetti magnetici (fenomeno dell'elettromagnetismo).

Proprietà fondamentale dei campi magnetici prodotti da correnti elettriche è che le relative linee di forza risultano concatenate con il circuito elettrico che le produce. Per comprendere meglio il significato di queste parole converrà fare ricorso ad un caso concreto. Si consideri dunque il più semplice circuito: un conduttore rettilineo percorso da corrente continua (vedi fig. 4.14-1).

Le linee di forza magnetica sono allora, per ragioni di simmetria cilindrica, di forma circolare, centrate rispetto al conduttore e giacenti in piani ortogonali al conduttore stesso, mentre il loro verso coincide ad esempio con il verso di rotazione di una vite destrogira che si avvita per avanzare nel senso in cui scorre la corrente (regola del *cavatappi*). Da ciò si può quindi dedurre che, in un punto qualsiasi dello spazio che circonda il conduttore, il vettore campo magnetico $\overline{H}_0$ risulta ortogonale al piano passante per il punto considerato e contenente il conduttore (vedi fig. 4.14-2) (1). Il vettore si troverà poi da quella parte del piano che corrisponde alla destra di un osservatore il quale risulti disteso parallelamente al conduttore in modo tale però che detto osservatore veda la corrente uscire sotto la sua testa.

Osservando la fig. 4.14-1 si comprende dunque come una qualsiasi linea di forza del campo magnetico sia *concatenata* col circuito elet-

---

(1) In particolare il piano considerato può essere quello del foglio. In tal caso per indicare la presenza del vettore campo, che è ortogonale al foglio, si usa il simbolo (+) (coda della freccia) là dove il vettore campo entra nel foglio, il simbolo (·) (punta della freccia) là dove il vettore campo esce. Per maggior chiarezza si veda ad esempio a fig. 4.14-3.

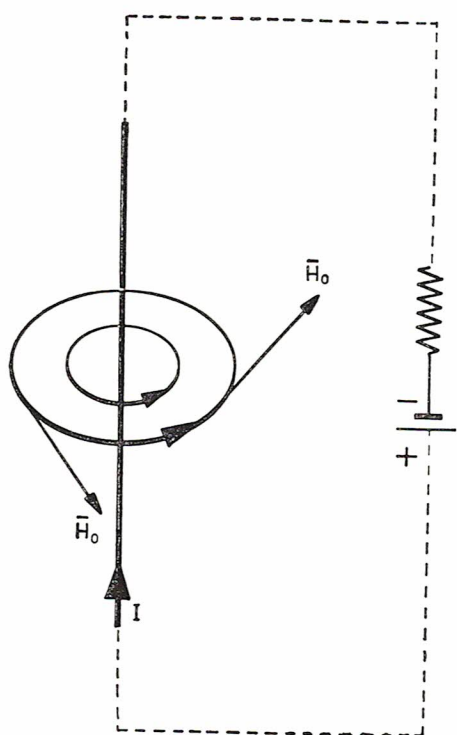



Fig. 4.14-1

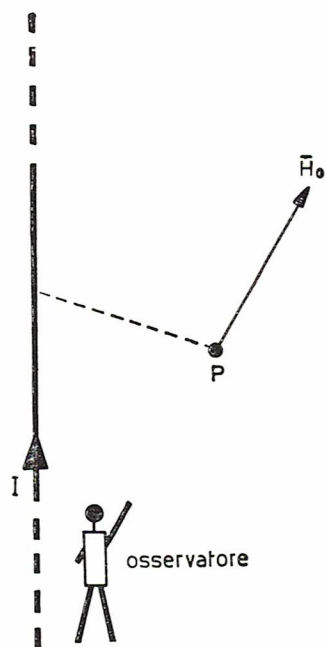



Fig. 4.14-2

trico che la produce: infatti fra ciascuna linea di forza e il circuito elettrico intercorre lo stesso rapporto che esiste fra due anelli consecutivi di una catena. In sostanza, come un anello non è sfilabile dall'altro, così la linea geometrica cui dà luogo una linea di forza non può essere tolta dal circuito elettrico che l'ha creata (²).

Questa proprietà è generale, cioè non soffre eccezioni. Gli esempi che si daranno nel prossimo paragrafo serviranno ancor meglio a convincere e a chiarire le idee.

Si vuole far da ultimo notare che il campo magnetico prodotto nel vuoto (o nell'aria) da una corrente elettrica varia nel tempo con la stessa legge con la quale varia la corrente che scorre nel circuito. Ciò verrà indicato anche nel prossimo paragrafo. In particolare dunque, se la corrente che scorre nel circuito è continua, il campo magnetico da essa generato sarà allora rigorosamente costante nel tempo.

(²) Nel caso del conduttore rettilineo (vedi fig. 4.14-1) una qualsiasi linea di forza infatti non potrà mai essere sfilata dal conduttore (né in alto né in basso) poiché questo è *chiuso* sul generatore, se si vuole che vi sia passaggio di corrente.

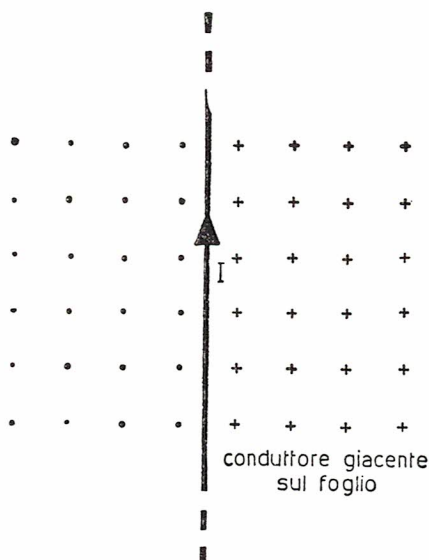



Fig. 4.14-3

4.15 Configurazioni di alcuni campi magnetici

Si è detto che una corrente, percorrendo un circuito, crea attorno a sé un campo magnetico. Questo teoricamente si estende fino all' infinito, cioè è presente in tutto lo spazio che circonda il circuito ; praticamente invece la sua intensità risulta apprezzabile solamente nell' intorno più immediato del circuito che lo ha creato. Infatti, da una certa distanza del circuito in poi, dipendente dalla sua forma e dall' intensità della corrente che lo percorre, il valore del campo magnetico si riduce a così poco da non poter essere più apprezzato. Si vedrà infatti fra breve che per alcuni circuiti l' intensità del campo magnetico risulta inversamente proporzionale alla distanza dal circuito.

Non resta dunque che prendere in osservazione i principali tipi di circuiti più impiegati nella tecnica : per questi si darà la formula necessaria per il calcolo dell' intensità del campo e l'andamento delle linee di forza magnetica. Si ricordi a tale proposito che in quelle regioni di spazio dove queste linee si presentano più rade vuol dire che il campo è meno intenso di là dove esse risultano più fitte.

Si incominci a considerare il caso del conduttore rettilineo di lunghezza infinita (vedi fig. 4.15-1). Per circuito rettilineo di lunghezza infinita si intende, in pratica, un circuito il quale è costituito da un conduttore di andata rettilineo [1] sufficientemente lungo rispetto alla

---

[1] O anche curvo, purché il raggio di curvatura sia molto grande rispetto alla distanza ove si considera il campo.

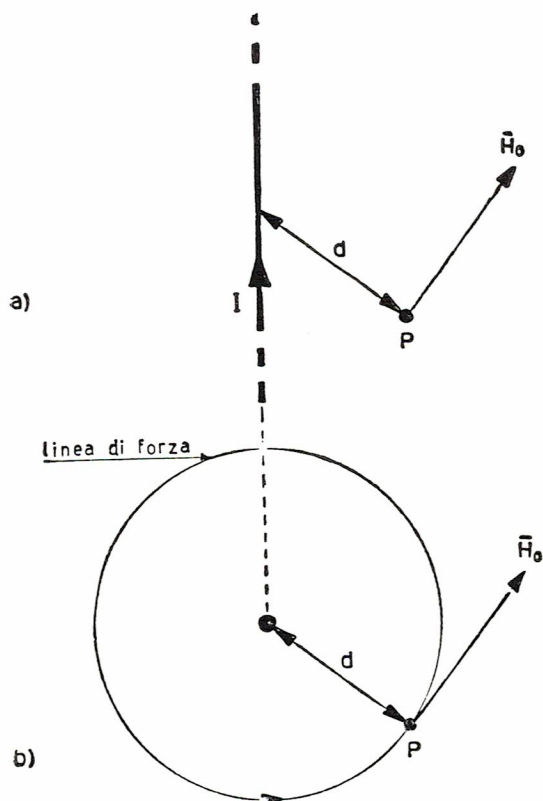



Fig. 4.15-1

distanza ove si considera il campo; mentre il conduttore di ritorno è sufficientemente lontano da quello di andata in modo che il suo campo magnetico non modifica quello dovuto al conduttore di andata.

In tal caso, come si è già visto, le linee di forza sono costituite da tanti cerchi concentrici al conduttore. Si dimostra (2) d'altronde che l'intensità del campo magnetico H_0 in un punto distante d dal conduttore è espressa mediante la formula:

4.15-1
$$H_0 = \frac{I}{2\pi d},$$

essendo I l'intensità della corrente che percorre il conduttore rettilineo. Questa formula mostra come l'intensità del campo magnetico sia inversamente proporzionale alla distanza del punto ove si considera il campo: pertanto quando d sarà, in rapporto al valore assunto dalla corrente I, molto grande il campo H_0 risulterà talmente piccolo da non essere più apprezzabile.

---

(2) La dimostrazione verrà data nel prossimo paragrafo.

Nel caso in cui il circuito elettrico abbia invece forma perfettamente circolare (spira circolare), le linee di forza del campo risultano ancora dei cerchi giacenti su piani perpendicolari al conduttore (cioè passanti per l'asse della spira), però i cerchi risultano eccentrici

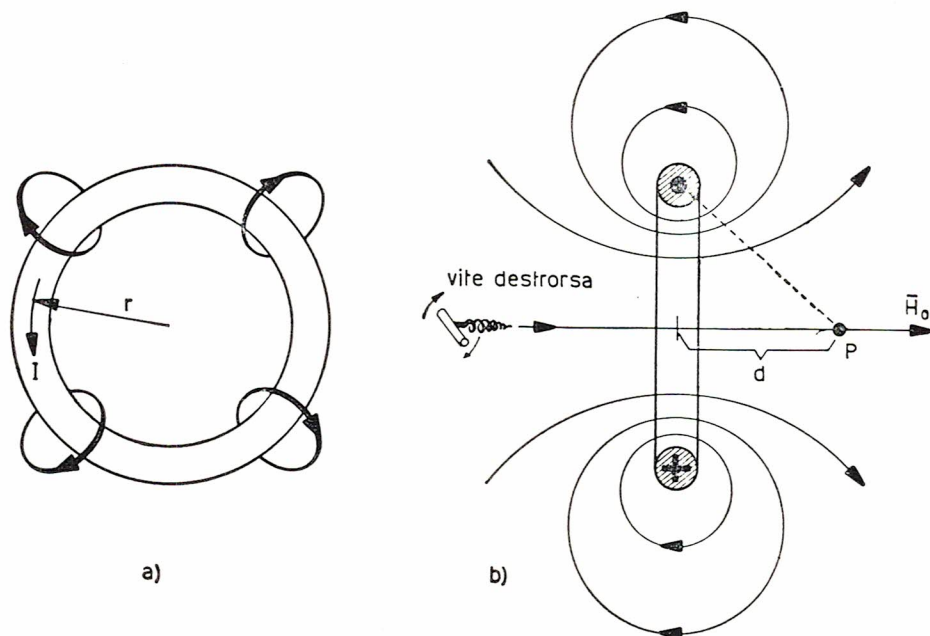



Fig. 4.15-2

rispetto a quest' ultimo [vedi fig. 4.15-2 (3)]. Il verso di tali linee potrà essere definito ancora considerando la spira come una successione di tanti elementi (molto piccoli) rettilinei oppure, più semplicemente, ricordando che il verso del campo magnetico lungo l'asse della spira coincide con il verso di avanzamento di una vite destrorsa che giri nello stesso senso con cui circola la corrente nella spira (regola di Maxwell) (vedi fig. 4.15-2*b*).

Ora, per ragioni di simmetria, il campo magnetico in un punto qualsiasi dell'asse della spira ha la direzione dell'asse stesso ; mentre la sua intensità è calcolabile con la seguente formula :

4.15-2 $$H_0 = \frac{r^2}{2\,(r^2 + d^2)^{3/2}}\, I \,,$$

---

(3) Si noti che in fig. 4.15-2*b* è stata riportata la spira sezionata con un piano passante per il suo asse : si possono vedere infatti le due sezioni del conduttore. D'altronde nella sezione del conduttore, in alto, è stato disegnato un punto (·), mentre in quella in basso una croce (+). Secondo una convenzione universalmente accettata, il punto nella sezione sta ad indicare che la corrente esce dal foglio che contiene detta sezione, la croce invece che la corrente entra nel foglio.

essendo r il raggio della spira circolare e d la distanza del punto dal piano contenente la spira.

Se il circuito percorso dalla corrente è invece costituito da più spire contigue, in tal caso la struttura prende il nome di *solenoide*: l'andamento del campo esternamente al circuito è allora circa simile a quello di un magnete di eguale forma e dimensioni; mentre internamente alle spire le linee di campo risultano tanto più uniformi e rettilinee quanto più serrate, più numerose e più uniformemente distribuite sono le spire del solenoide. Per la conoscenza del verso da attribuire alle linee di forza ci si può avvalere comodamente della regola di Maxwell.

In fig. 4.15-3*a* appare l'andamento delle linee di forza di un sole-

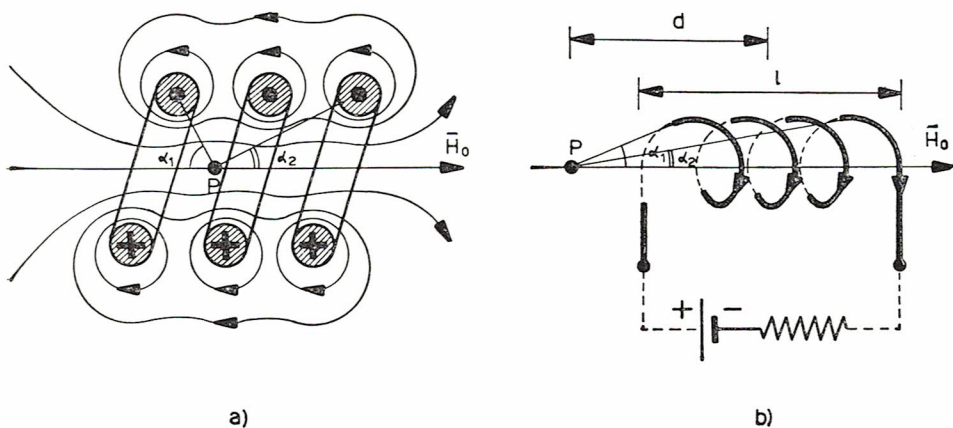



Fig. 4.15-3

noide rettilineo corto (corto perché formato da poche spire); mentre in fig. 4.15-4 si è riportato l'andamento delle linee di forza di un solenoide rettilineo lungo e a spire molto serrate. La differenza fra i due solenoidi consiste essenzialmente nel fatto che il campo magnetico nel secondo caso può raggiungere intensità maggiori e presenta un andamento più rettilineo e costante entro il solenoide rispetto al primo caso. Si ricordi che solamente per il solenoide lungo [4] il campo magnetico allo

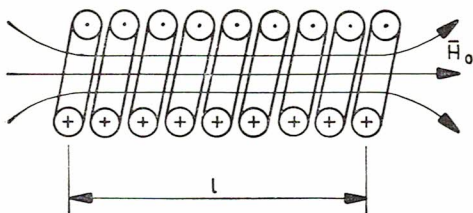



Fig. 4.15-4

[4] In pratica un solenoide si dice *lungo* quando la sua lunghezza assiale risulta superiore a sette volte il diametro delle sue spire (vedi esercizio 4.53).

interno (cioè per punti non troppo vicini alle estremità) è esprimibile con buona approssimazione mediante la semplice formula:

4.15-3
$$H_0 = \frac{NI}{l},$$

essendo N il numero totale delle spire, percorse dalla corrente di intensità I, ed l la lunghezza assiale del solenoide; mentre nei punti esterni al solenoide il campo è quasi nullo ([5]). Per il solenoide corto invece l'intensità del campo magnetico in un punto qualsiasi posto internamente sull'asse dovrà essere calcolato con la seguente formula (vedi fig. 4.15-3*a*):

4.15-4
$$H_0 = \frac{NI}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2);$$

per i punti esterni posti sull'asse (vedi fig. 4-15-3*b*) si userà la formula analoga:

4.15-5
$$H_0 = \frac{NI}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Si noti che il solenoide può non essere ad asse rettilineo, ma curvilineo, come è stato riportato in fig. 4.15-5, oppure, anche, esso può risultare tutto chiuso. In questo caso, quando l'asse è circolare, si parla di solenoide *toroidale* (vedi fig. 4.15-6). Proprietà fondamentale di quest' ultimo tipo di solenoide è quella di creare delle linee di campo di forma circolare praticamente tutte confinate all' interno dello spazio racchiuso dalle spire. Infatti solo pochissime linee concatenantesi con qualche spira escono all'esterno: ma ciò avviene in maniera tanto meno notevole quanto più fitte sono le spire del solenoide. Si noti inoltre che il campo magnetico entro lo spazio torico è tanto più uniforme e costante quanto più piccola risulta la differenza fra raggio esterno ed interno del toro rispetto al raggio medio del toro stesso ([6]).

([5]) Infatti sull'asse del solenoide, ove il campo esterno è più intenso, questo risulta dell'ordine di qualche percento di quello massimo che si ha all' interno, già per distanze dal centro del solenoide non molto superiori alla semilunghezza dell'asse del solenoide (ad esempio per $d = 1{,}20 \frac{l}{2}$ il campo vale circa il 5 % di quello interno, per $d = 1{,}50 \frac{l}{2}$ il campo risulta circa il 7 ‰ di quello interno).

([6]) Il raggio medio r_m del toro è la semisomma del raggio interno r_1 con quello esterno r_2, cioè $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

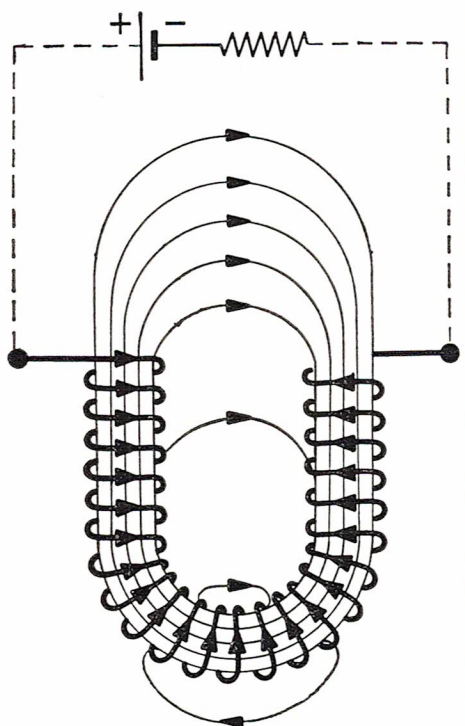



Fig. 4.15-5

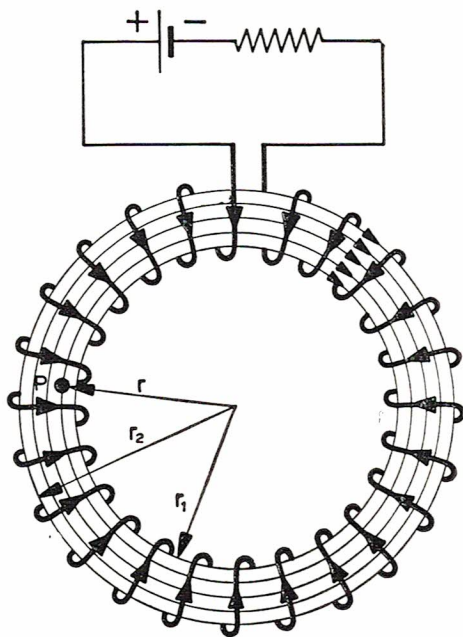



Fig. 4.15-6

Per il calcolo del campo magnetico entro lo spazio torico vale la seguente formula:

4.15-6
$$H_0 = \frac{NI}{2\pi r},$$

ove r è il raggio della linea di forza passante per il punto considerato ed N esprime il numero delle spire che compongono l'avvolgimento toroidale.

4.16 Analogie fra magneti e circuiti elettrici

Quanto è stato esposto nei precedenti paragrafi porta a concludere dunque che un campo magnetico può essere creato sia mediante un magnete, o più generalmente da un corpo magnetizzato, sia mediante un circuito percorso da corrente elettrica. D'altronde, in un punto qualsiasi dello spazio ove sia presente un campo magnetico non è possibile distinguere la sua provenienza (magnetica od elettromagnetica). Ciò significa ancora che tanto i campi magnetici che prendono origine da corpi magnetizzati quanto quelli che prendono origine da una corrente danno luogo agli stessi fenomeni fisici.

A tale proposito la Fisica dimostra in modo rigoroso che il campo magnetico creato da una spira, in cui scorre una corrente continua, è del tutto eguale (1) al campo magnetico creato da una lamina magnetica il cui contorno sia identico a quello della spira (principio di equivalenza di Ampère).

Il fatto quindi che vi sia un'equivalenza fra un magnete ed un solenoide porta a dedurre immediatamente tra l'altro che, come un magnete posto in un campo magnetico è soggetto a delle forze le cui risultanti agi-

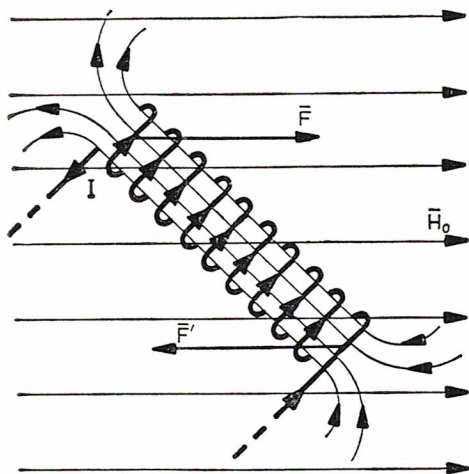



Fig. 4.16-1

scono in modo tale da dar luogo ad una coppia, così pure un solenoide immerso in un campo magnetico (vedi fig. 4.16-1) viene ad essere sottoposto a delle forze le cui risultanti (F ed F') sono tali da dar luogo ancora ad una coppia. Se il solenoide è libero di ruotare, esso si disporrà perciò col suo asse parallelamente alle linee del campo, se queste sono parallele, comunque sempre in posizione tale che la coppia risulti ovviamente nulla.

Come si può comprendere, l'esplorazione del campo magnetico può esser compiuta pertanto con un minuscolo solenoide, anziché con un magnetino.

4.17 Tensione magnetica

Si consideri una linea di forza di un campo magnetico generato da un circuito elettrico qualsiasi, ad esempio come quello di fig. 4.17-1. Si scelga quindi lungo la linea di forza un tratto infinitesimo dl: in un

---

(1) Invero per punti un po' lontani dalla spira.

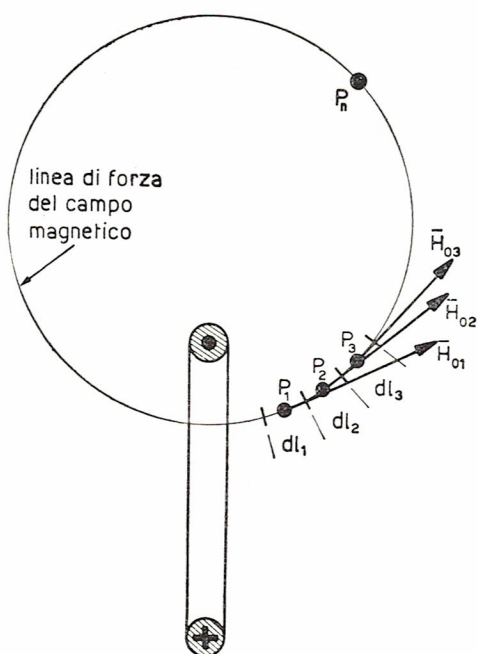
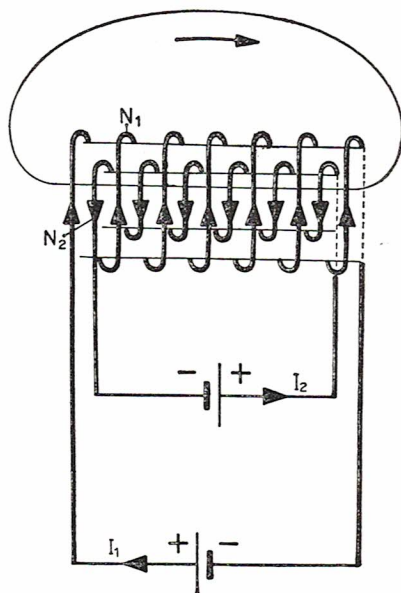



Fig. 4.17-1 *Fig. 4.17-1'*

punto di questo tratto il campo magnetico abbia l' intensità H_0 (1). Ci si chiede che cosa può rappresentare il prodotto del tipo $H_0 dl$.

Ora, in analogia con quanto è stato visto nell' Elettrostatica, ove il prodotto $K_0 dl$ (vedi § 3.18) rappresenta la *d.d.p.* (cioè anche la tensione elettrica) ai capi del tronco *dl*, al prodotto del tipo $H_0 dl$ si dà il nome di *tensione magnetica* relativa all'elemento *dl* considerato.

L' utilità di questa nuova grandezza apparirà tra breve. Si consideri infatti, a partire da un punto P_1 (vedi fig. 4.17-1), una successione di tratti infinitesimi *dl*, tutti presi lungo una stessa linea di forza di campo magnetico, fino ad arrivare ad esempio al punto P_n. Allora la somma di tutti i prodotti del tipo $H_0 dl$ eseguita per ciascun tratto rappresenterà la tensione magnetica esistente fra i due punti estremi considerati. Indicata con $\mathfrak{F}$ tale tensione si potrà scrivere dunque che:

$$\text{4.17-1} \qquad \mathfrak{F} = H_{01} dl_1 + H_{02} dl_2 + H_{03} dl_3 + \dots + H_{0n} dl_n = \int_{P_1}^{P_n} H_0 dl.$$

Ci si può domandare ora che cosa si troverebbe se, ai termini sopra scritti, si aggiungessero tutti gli altri relativi ai tratti infinitesimi man-

(1) Essendo il tratto infinitesimo basta che il punto sia contenuto entro di esso.

canti per ritornare nel punto di partenza P_1, lungo sempre la stessa linea di forza. È chiaro che la *somma* (integrale) estesa ad una linea *chiusa* rappresenterà la tensione magnetica che agisce su quella linea chiusa, tensione magnetica che in questo caso non può essere nulla.

Si dimostra infatti come, tutte le volte che una linea chiusa è concatenata N volte con un circuito elettrico percorso da corrente di intensità I, la relativa tensione magnetica ammonti al prodotto NI(2)(3). Si potrà scrivere quindi, per una qualsiasi linea di forza di campo, poiché questa è sempre una linea chiusa, che:

4.17-2
$$\int H_0 dl = NI .$$

A questo proposito si vuole far notare che il termine NI, causa

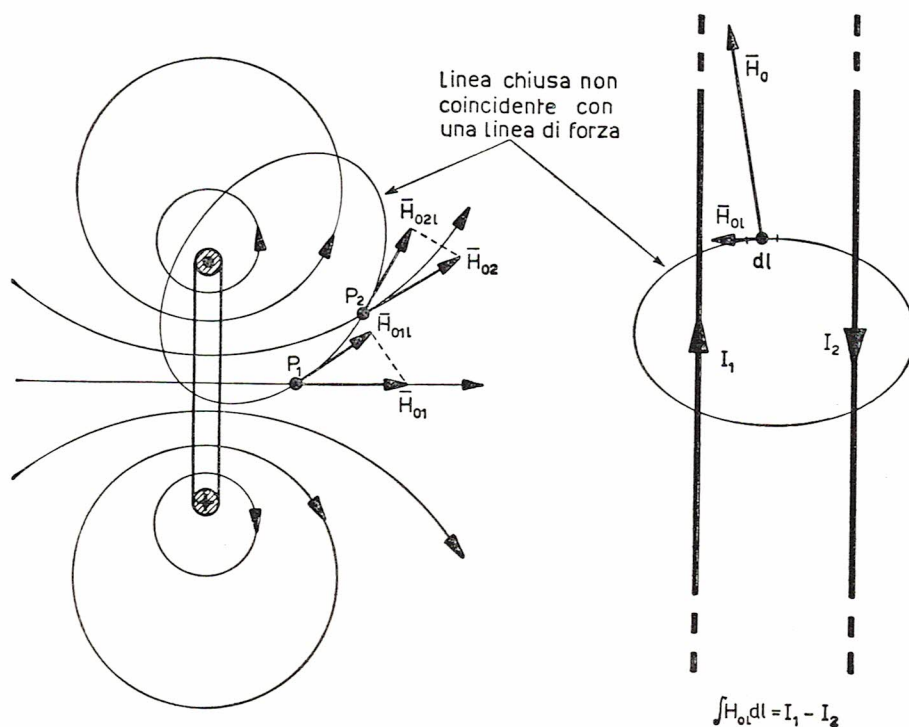



Fig. 4.17-2

(2) La tensione magnetica deve essere considerata positiva quando la successione dei tratti infinitesimi dl avviene secondo il verso della linea di forza; caso contrario la tensione magnetica è negativa.

(3) Va precisato che, se la linea chiusa fosse concatenata con più circuiti, la tensione magnetica varrebbe allora $\Sigma \pm NI$, considerando positive le correnti che determinerebbero da sole una tensione magnetica positiva, negative le altre. Per la linea di forza della fig. 4.17-1′ si deve scrivere perciò: $\int H_0 dl = N_1 I_1 - N_2 I_2$.

della generazione e del mantenimento del campo magnetico, viene denominato sovente forza magnetomotrice (abbreviato *f.m.m.*).

È importante sottolineare come l'equazione scritta in 4.17-2 sia valida solamente se la somma dei prodotti $H_0 dl$ è relativa ad una linea di forza. Qualora tale somma fosse riferita ad una linea qualsiasi, non coincidente quindi con una linea di forza, come avviene nei due esempi riportati in fig. 4.17-2, ciò che esprime la 4.17-2 resta ancora valido purché al posto delle singole intensità di campo H_0 si pongano le componenti H_{0l} del vettore $\overline{H}_0$ in direzione dl, cioè le componenti di H_0 lungo le tangenti ai tratti infinitesimi dl. In tal caso sarà dunque:

4.17-3 $$\int H_{0l}\, dl = NI\,.$$

Quanto ora trovato costituisce il fondamento del cosiddetto *teorema della circuitazione* e rappresenta una delle proprietà fondamentali del vettore campo magnetico. Questo teorema è importante perché esso permette di risolvere facilmente numerosi problemi.

Si voglia cercare ad esempio il valore dell' intensità H_0 del campo magnetico in un punto distante d da un conduttore rettilineo di lunghezza infinita. Si supponga di non ricordare la relativa formula data in 4.15-1. Come fare allora? Si incomincerà coll'osservare che, per ragioni di simmetria, il campo magnetico deve avere intensità costante H_0 in ogni punto che equidista dal conduttore, per cui in tutti i punti appartenenti ad un cerchio centrato sull'asse del conduttore e giacente su di un piano ad esso ortogonale, il campo magnetico presenterà modulo di valore costante (vedi fig. 4.15-1*b*). Ma il suddetto cerchio è una linea di forza che si concatena una volta sola con la corrente I del conduttore; si potrà perciò scrivere:

4.17-4 $$H_0 dl_1 + H_0 dl_2 \ldots = I\,,$$

e quindi raccogliendo H_0, che è costante:

4.17-5 $$H_0(dl_1 + dl_2 + \ldots) = I\,.$$

D'altronde la *somma* di tutti gli infiniti tratti infinitesimi dl vale naturalmente la lunghezza della linea stessa, cioè $2\pi d$. Sarà perciò:

4.17-6 $$H_0 . 2\pi d = I\,,$$

da cui si ottiene la seguente espressione:

4.17-7 $$H_0 = \frac{I}{2\pi d}$$

che costituisce la formula di Biot e Savart, già riportata in 4.15-1.

Si desideri ora calcolare il valore del campo magnetico all'interno di un solenoide. Nel caso che questo sia costituito da N spire serrate, di lunghezza assiale l molto più grande delle dimensioni trasversali, si sa che il campo magnetico è pressoché nullo nello spazio al di fuori del solenoide; esso presenta invece intensità costante (H_0) nel suo interno. Converrà perciò dividere una linea di forza magnetica (vedi fig. 4.17-3)

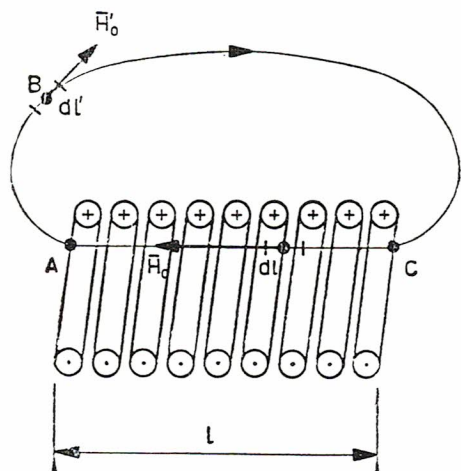



Fig. 4.17-3

in due parti: quella interna al solenoide, che risulta rettilinea e lunga ovviamente l, e quella esterna (in figura è il tratto ABC).

Per il teorema della circuitazione si potrà scrivere allora, indicando genericamente con H'_0 il campo magnetico in un punto fuori del solenoide e con dl' il relativo tratto infinitesimo:

4.17-8 $$H_0 \int_C^A dl + \int_A^C H'_0 dl' = NI .$$

D'altra parte, poiché $H'_0 \cong 0$ e $\int_C^A dl = l$ per quanto precisato in precedenza, dalla 4.17-8 si ricava immediatamente che:

4.17-9 $$H_0 l = NI ,$$

cioè anche che:

$$H_0 = \frac{NI}{l} .$$

Rimane così dimostrata la formula data in 4.15-3.

4.18 Unità di misura del campo magnetico e della *f. m. m.*

Il campo magnetico è stato la prima grandezza fisica magnetica che si è incontrata in questo capitolo: prima di proseguire nello studio del magnetismo e dell'elettromagnetismo è necessario vedere quali siano le sue dimensioni fisiche. Per far ciò basterà osservare le formule date nei paragrafi precedenti ed esprimenti l' intensità del campo H_0 in funzione delle caratteristiche geometriche del circuito elettrico e della corrente che lo percorre. Prendendo ad esempio la formula di Biot e Savart, dove $H_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{d}$, oppure la formula del solenoide lungo, per il quale $H_0 = N \frac{I}{l}$, ci si accorge che le dimensioni fisiche del campo magnetico sono quelle di una corrente divisa per una lunghezza. Infatti nelle due formule citate, tanto $\frac{1}{2\pi}$ che N sono numeri puri.

Pertanto l' unità di misura del campo magnetico nel sistema Giorgi risulta l'ampere/metro, o meglio, poiché di solito in pratica i campi magnetici sono dovuti a circuiti formati da più spire percorse dalla stessa corrente, anche in amperspire/metro (abbr. Asp/m).

Per la forza magnetomotrice basterà considerare invece che la sua espressione analitica è del tipo NI: essa cioè è data dal prodotto di una corrente per un certo numero di spire. Risulta quindi che nel sistema Giorgi la forza magnetomotrice è misurata in amperspire (abbr. Asp).

4.19 Vettore induzione magnetica. Permeabilità magnetica del vuoto

Per lo studio di certi importanti fenomeni, che si vedranno fra non molto, è necessario introdurre nella trattazione del magnetismo e dell'elettromagnetismo un altro vettore, precisamente il vettore induzione magnetica $\overline{B}_0$. Questo risulta parallelo al vettore $\overline{H}_0$ e ad esso legato dalla seguente relazione:

4.19-1 $$B_0 = \mu_0 H_0 .$$

Si noti che il fattore di proporzionalità μ_0 viene denominato *permeabilità magnetica* del vuoto. Le sue dimensioni fisiche risultano da quelle del rapporto B_0/H_0, in forza della 4.19-1; della sua unità di misura però si parlerà più avanti, precisamente nel § 4.48. Per ora si tenga presente che il suo valore ammonta a:

4.19-2 $$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \quad \text{henry/metro.}$$

Pertanto il vettore $\overline{B}_0$, pur essendo parallelo al vettore $\overline{H}_0$, assume

valori e dimensioni fisiche differenti da quest' ultimo. Naturalmente le linee di induzione magnetica coincidono invece con quelle del campo magnetico (il mezzo qui è il vuoto assoluto).

4.110 Flusso magnetico

Le definizioni di flusso di un vettore attraverso una superficie S (oppure dS se il campo vettoriale non è uniforme) e di tubo di flusso date nel § 3.111 rimangono perfettamente valide anche quando il vettore è quello di induzione magnetica $\overline{B}_0$. Si ricordi d'altronde che flusso di induzione [simbolo $\Phi_s(\overline{B}_0)$] e flusso magnetico stanno ad indicare la stessa cosa. Perciò, con riferimento ad esempio alla fig. 4.110-1, che riporta

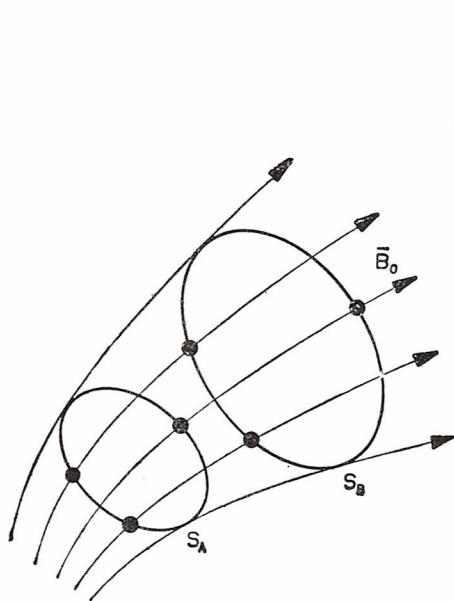



Fig. 4. 110-1

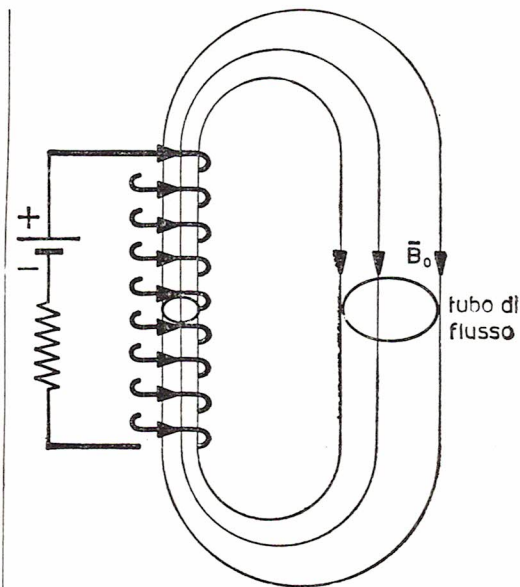



Fig. 4.110-2

un tubo di flusso, il flusso attraverso la sezione A varrà:

4.110-1
$$\Phi_{S_A}(\overline{B}_0) = B_{0A} S_A ,$$

così analogamente, attraverso la sezione B varrà:

4.110-2
$$\Phi_{S_B}(\overline{B}_0) = B_{0B} S_B .$$

Di conseguenza si potrà scrivere anche che:

4.110-3
$$B_{0A} S_A = B_{0B} S_B ,$$

poiché la superficie laterale del tubo di flusso non è attraversata da alcuna linea di induzione, e ciò per definizione stessa di tubo di flusso.

D'altra parte, poiché nell' Elettromagnetismo le linee di induzione sono sempre chiuse e concatenate con uno o più circuiti elettrici, risulterà anche che un qualsiasi tubo di flusso magnetico sarà chiuso e quindi concatenato nello stesso modo. Si osservi ad esempio la fig. 4.110-2, dove appare un flusso magnetico che risulta concatenato N volte col proprio circuito elettrico. Che tale flusso risulti concatenato N volte è logico se si pensa che le sue linee di flusso sono appunto concatenate N volte col circuito.

Se invece i circuiti interessanti il tubo di flusso sono due, si veda la fig. 4.110-3, allora il relativo flusso di induzione si dirà che è conca-

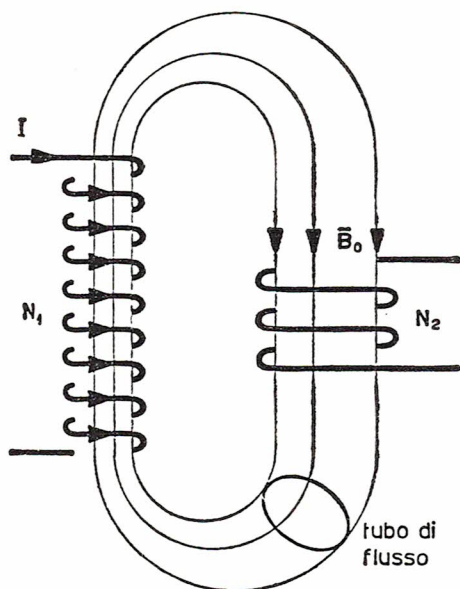



Fig. 4.110-3

tenato con entrambi i circuiti, precisamente N_1 volte col primo circuito ed N_2 volte col secondo circuito.

È necessario precisare da ultimo che l' unità di misura del flusso magnetico nel sistema Giorgi è il weber (abbr. Wb). A dire il vero questa unità risulta legata ad altre già note, precisamente, come si vedrà nel § 4.42, al volt·secondo. (1 weber = 1 volt·secondo).

Naturalmente, fissata in questo modo l' unità di misura per il flusso magnetico, resta definita anche l' unità di misura dell'induzione magnetica, poiché essa risulta come rapporto fra un flusso magnetico ed una superficie. Pertanto l' unità di misura dell' induzione magnetica è il weber/metro quadrato (abbr. Wb/m²).

4.111 Problemi di applicazione al § 4.1

Esercizio 4.1111

Si trovi l'andamento delle linee di forza del campo magnetico prodotto da due conduttori rettilinei paralleli, immersi nell'aria e percorsi da corrente nel caso in cui queste sono : *a*) di eguale intensità ed eguale verso ; *b*) di eguale intensità ma di verso opposto.

Soluzione

In ogni punto dello spazio che circonda i due conduttori il campo magnetico può essere trovato semplicemente componendo vettorialmente i due vettori rappresentanti ognuno in quel punto il campo magnetico generato separatamente da ciascun conduttore. D'altronde, poiché tale vettore risultante giace su di un piano ortogonale all'asse dei due conduttori, anche le linee di forza risultanti staranno su tale piano.

Pertanto nel caso *a*) l'andamento delle linee di campo si presenta come quello riportato in fig. 4.1111-1 ; mentre nel caso *b*) l'andamento delle linee di campo è quello riportato in fig. 4.1111-2. Si noti che nel primo caso, da una certa distanza (molto grande rispetto a quella d dei due conduttori) le linee del campo risulteranno praticamente circolari, cioè come se i due conduttori fossero coincidenti.

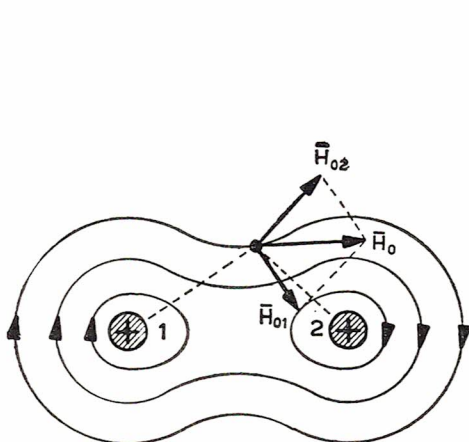
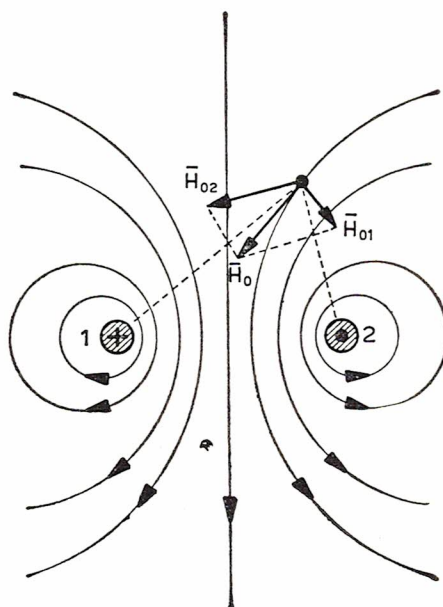



Fig. 4.1111-1 *Fig. 4.1111-2*

Esercizio 4.1112

Un solenoide a spire circolari, avente lunghezza assiale ($l = 40$ cm) molto grande rispetto al diametro di queste, è costituito con quattro strati, ciascuno di 200 spire (vedi fig. 4.1112-1). Si trovi il valore del campo e dell' induzione magnetica all' interno del solenoide quando la corrente che lo percorre ha l' intensità di 50 mA.

Soluzione

Il campo all' interno del solenoide assume l' intensità espressa dalla ben nota formula $H_0 = \frac{N I}{l}$, ove N rappresenta il numero di spire che si concatenano con una linea di forza. Nel nostro caso, si veda la fig. 4.1112-1, $N = 4 \cdot 200 = 800$ spire. Sarà perciò nel punto P:

$$H_0 = \frac{800 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{0{,}40} = 100 \text{ Asp/m} ,$$

di conseguenza l' induzione magnetica nello stesso punto varrà:

$$B_0 = \mu_0 H_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0{,}1256 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/m}^2 .$$

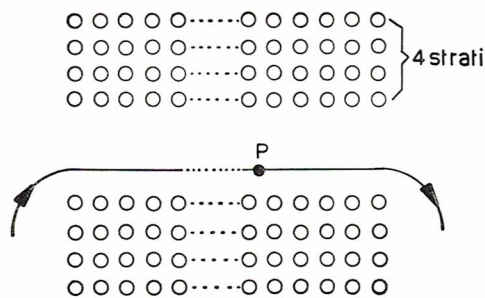
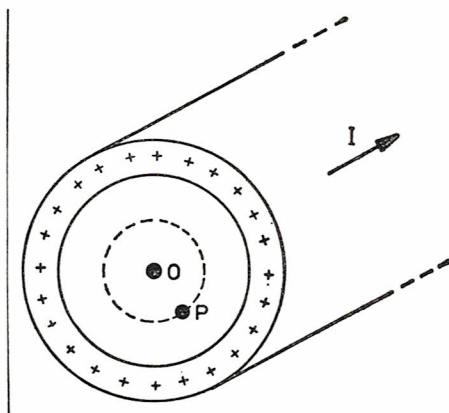



Fig. 4.1112-1 *Fig. 4.1113-1*

Esercizio 4.1113

Un tubo di rame rettilineo (raggio interno 1 cm, spessore 4 mm) è percorso da una corrente di 10 ampere. Si trovi il valore assunto dal campo magnetico in un punto P distante 5 mm dall'asse del tubo (vedi fig. 4.1113-1).

Soluzione

Per calcolare il valore del campo magnetico nel punto dato si faccia uso della legge della circuitazione. Allo scopo di scegliere allora quale linea chiusa sia la più conveniente, si incominci ad osservare che eventuali linee di forza all' interno del tubo dovrebbero avere forma circolare centrata e ciò per evidenti ragioni di simmetria, così l'eventuale vettore campo $\bar{H}_0$ presenterebbe in ogni punto di tale linea modulo costante e lo stesso verso.

Assunto perciò il cerchio, avente centro sull'asse e passante per il punto dato P, come linea lungo la quale applicare la legge della circuitazione, si veda la fig. 4.1113-1, si potrà scrivere che:

$$\int H_0 dl = 0 ,$$

poiché la tensione magnetica risultante è nulla, dato che la linea non si concatena con alcuna corrente. D'altronde, come si è osservato sopra, lungo il cerchio il vettore $\bar{H}_0$ è, se esiste, di modulo costante e sempre dello stesso verso (cioè da considerarsi dello stesso segno), per cui nella equazione sopra scritta sarà possibile raccogliere H_0 a fattore comune:

$$H_0 \int dl = 0 .$$

Si deduce facilmente così che $H_0 = 0$, poichè $\int dl \neq 0$.

In un qualsiasi punto interno al tubo il campo magnetico è dunque sempre nullo.

Esercizio 4.1114

Si trovi il valore del campo in un punto P distante $d = 1$ cm dall'asse di un conduttore cilindrico massiccio di raggio $r = 2$ cm, quando esso è percorso da una corrente continua $I = 1000$ A. Il materiale costituente il conduttore è omogeneo e ha permeabilità magnetica di valore circa eguale a quella del vuoto; ciò vuol dire che magneticamente il materiale conduttore si comporta come il vuoto assoluto.

Soluzione

Le eventuali linee di forza all' interno del conduttore debbono essere costituite da tanti cerchi concentrici e ciò per ragioni di simmetria. Pure per lo stesso motivo il vettore campo magnetico in ogni punto di ciascuna di tali linee di forza avrà modulo costante e lo stesso verso.

Si consideri ora la linea di forza passante per P, e quindi la superficie cilindrica che la contiene. Tale superficie dividerà il conduttore massiccio in due parti : quella costituita da un tubo cilindrico avente per raggio interno d (segmento OP) (area a semplice tratteggio di fig. 4.1114-1*b*)

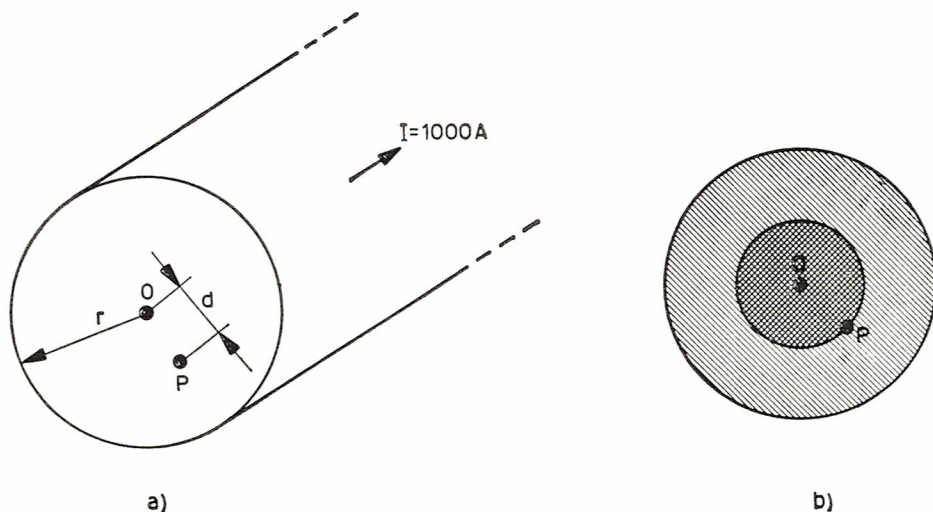



Fig. 4.1114-1

e quella rimanente cilindrica, piena, di raggio d (area a doppio tratteggio di fig. 4.1114-1*b*).

È facile affermare così, dopo quanto è stato riportato nel precedente esercizio 4.1113, che nullo è il contributo al campo magnetico nel punto P da parte della corrente che circola nel materiale costituente il tubo cilindrico ; mentre per conoscere il valore del campo nello stesso punto P, dovuto a quella parte di corrente I' che circola entro la rimanente parte interna del conduttore, basterà applicare la legge della circuitazione alla linea di forza passante per P stesso. Sarà perciò :

$$\int H_0 dl = I' ,$$

poiché la linea è concatenata solamente con la corrente I'. D'altronde H_0 risulta di modulo costante, per cui si può scrivere anche che :

$$H_0 \int dl = I' ,$$

e quindi, dato che la linea di forza è lunga $\int dl = 2\pi d$, si ricaverà finalmente che nel punto P il campo magnetico vale :

$$H_0 = \frac{I'}{2\pi d} .$$

Con i dati del problema risulta:

$$I' = \frac{I}{\pi r^2} \pi d^2 = \frac{1}{4} I = 250 \text{ ampere},$$

cosicché:

$$H_0 = \frac{I'}{2\pi d} = \frac{250}{6{,}28 \cdot 10^{-2}} = 3980 \text{ Asp/m}.$$

All' interno di un conduttore massiccio esiste dunque il campo magnetico le cui linee di forza sono costituite da tanti cerchi concentrici.

Esercizio 4.1115

Nel centro di una spira circolare, di raggio $r = 20$ cm, percorsa dalla corrente $I_1 = 2$ A, passa un conduttore rettilineo molto lungo percorso da una corrente $I_2 = 10$ A. Si trovi il valore del campo magnetico nel centro della spira (vedi fig. 4.1115-1).

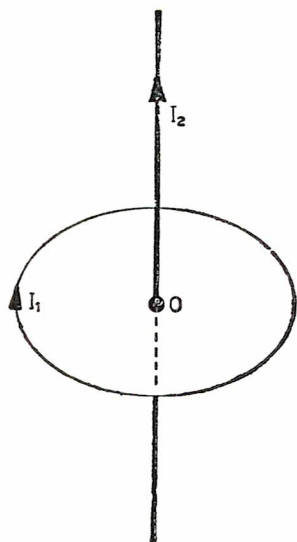



Fig. 4-1115-1

Soluzione

Nel centro della spira, anzi su ciascun punto dell'asse del conduttore, il contributo al campo magnetico risultante da parte di quest' ultimo è nullo. Ciò dipende dal fatto che nei punti posti sull'asse di un conduttore il campo magnetico dovuto alla corrente che vi scorre è nullo, come facilmente si comprende dopo quanto è stato esposto nei due precedenti esercizi 4.1113 e 4.1114.

Pertanto il campo H_0 nel centro O sarà dovuto solamente alla spira circolare. Quindi, per la formula 4.15-2 riportata nel § 4.15, esso varrà:

$$H_0 = \frac{I_1}{2r} = \frac{2}{2 \cdot 0{,}20} = 5 \text{ Asp/m} .$$

4.2 Campo magnetico nella materia

4.21 Permeabilità magnetica di un materiale

Un qualsiasi corpo, sia allo stato solido, liquido o gassoso, si *magnetizza* quando esso viene a trovarsi in un campo magnetico. La parola *magnetizzazione* sta qui ad indicare quel particolare stato fisico della materia che si ha quando essa è soggetta all'azione di un campo magnetico esterno.

Va detto subito che la grandezza fisica che tien conto dello stato magnetico di una sostanza è il vettore induzione magnetica $\overline{B}$, il quale è legato al rispettivo vettore campo magnetico $\overline{H}$ dalla seguente relazione:

4.21-1 $$\overline{B} = \mu \overline{H} \text{ (}^1\text{)} ,$$

ove μ rappresenta la permeabilità magnetica del materiale.

La relazione sopra scritta ci assicura anzitutto che, anche nella materia, il vettore $\overline{B}$ è parallelo al vettore $\overline{H}$. D'altronde, a parità di campo, il valore assunto dall'induzione dipenderà dalle caratteristiche del materiale, cioè precisamente dal valore della sua permeabilità magnetica.

Analogamente a quanto è stato fatto nell'Elettrostatica per la costante dielettrica, anche qui è utile porre la permeabilità magnetica μ di un materiale in funzione della permeabilità del vuoto μ_0. Risulta così che fra i valori di μ e di μ_0 intercorre allora la seguente semplice relazione:

4.21-2 $$\mu = \mu_r \mu_0 ,$$

---

(1) Il campo magnetico rappresenta quindi la causa della magnetizzazione, la induzione magnetica l'effetto. Per questo motivo il campo magnetico talvolta viene denominato *magnetizzante*.

ove μ_r riceve il nome di permeabilità relativa. In questo modo si viene dunque a riferire il valore della permeabilità (assoluta) di un materiale a quella del vuoto e ciò tramite un numero caratteristico (μ_r). Questo pertanto servirà a contraddistinguere efficacemente e comodamente le varie sostanze dal punto di vista del loro comportamento magnetico.

Ci si può chiedere ora se le varie sostanze oggi conosciute presentino proprietà magnetiche molto diverse fra di loro. A questo proposito si precisa subito che la maggioranza delle sostanze, a parità di campo magnetico agente, presenta una magnetizzazione estremamente poco dissimile e, ciò che è ancor più importante, tanto fievole da non differire da quella del vuoto. Per tali materiali risulta perciò $\mu \cong \mu_0$. Solo relativamente poche sostanze presentano invece una magnetizzazione intensa. Per queste si ha quindi $\mu >> \mu_0$.

D'altronde, le sostanze il cui comportamento magnetico differisce assai poco da quello del vuoto, e che sono, come si è detto, le più numerose, vengono raggruppate nella categoria delle sostanze cosiddette *diamagnetiche*, se la permeabilità relativa risulta leggermente inferiore ad uno, oppure nella categoria delle sostanze cosiddette *paramagnetiche*, se la permeabilità relativa è leggermente superiore ad uno. Le sostanze invece che mostrano uno spiccato stato magnetico, cioè quelle che presentano una permeabilità relativa di gran lunga maggiore di uno, sono raggruppate nella categoria delle cosiddette sostanze *ferromagnetiche*. Queste vengono indicate molte volte semplicemente come *magnetiche* in contrapposto a quelle dia e paramagnetiche dette correntemente invece sostanze *non magnetiche*.

Al prossimo paragrafo il compito di dare un cenno di spiegazione circa la ragione fisica del comportamento magnetico della materia.

4.22 Origine elettronica delle proprietà magnetiche della materia

Le proprietà magnetiche della materia dipendono naturalmente dalle proprietà magnetiche delle sue molecole e quindi anche da quelle dei suoi atomi. A loro volta queste ultime sono dovute al movimento orbitale degli elettroni periferici e al momento magnetico presentato dagli elettroni stessi (spin) (1). Che gli elettroni satelliti diano luogo col loro movimento orbitale ad effetti magnetici è comprensibile se si pensa infatti come un elettrone satellite rotante attorno al proprio nucleo (vedi fig. 4.22-1) equivalga ad un minuscolo circuito elettrico. Esso quindi in sostanza darà effetti magnetici equivalenti a quelli di una minuscola spira percorsa da corrente.

Si deve però osservare subito che la molecola contiene più elettroni

---

(1) L'elettrone possiede un momento magnetico poiché esso può essere considerato una piccolissima sfera carica ruotante con velocità elevatissima attorno al suo asse.

periferici, per cui si potranno presentare in realtà questi due casi: o la molecola risulta all'esterno priva di manifestazioni magnetiche, cioè è magneticamente neutra, e ciò perché ad una certa distanza dal nucleo le orbite dei singoli elettroni danno luogo a campi magnetici che si compensano (ossia si elidono) fra di loro, oppure la molecola presenta una risultante magnetica non nulla, cioè, come si dice, possiede un *momento magnetico* non nullo. In quest'ultimo caso le molecole dal punto di vista magnetico sono perciò analoghe a tanti magnetini elementari e potranno essere rappresentate schematicamente come in fig. 4.22-2.

Rimane però da chiarire come mai un corpo, costituito da molecole aventi un momento magnetico proprio, si presenti a noi sempre in condizioni neutre, cioè tali da non generare all'esterno un campo magnetico. Per spiegare questo fatto basta ricordare come l'agitazione termica, mettendo in movimento le molecole del materiale in tutti i sensi, faccia sì che l'azione risultante di tutti i magnetini elementari sia nulla ad una certa distanza da essi. La fig. 4.22-2, che rappresenta la situazione di un

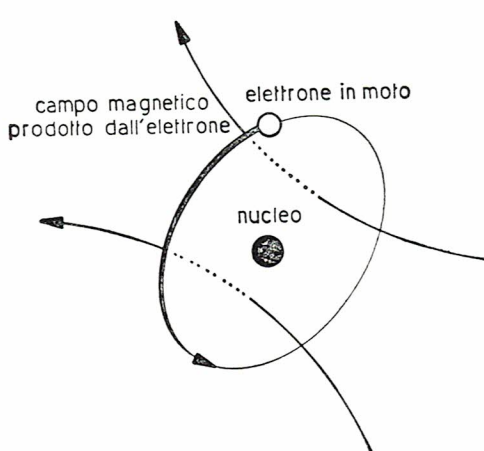



Fig. 4.22-1

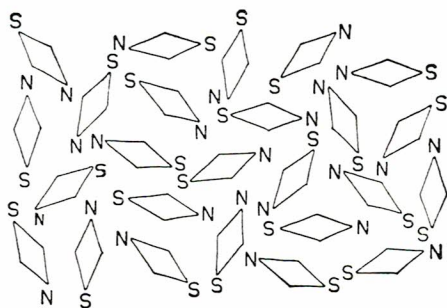



Fig. 4.22-2

certo numero di molecole in un determinato istante, renderà un' idea abbastanza chiara del fenomeno.

È ora interessante cercare di comprendere che cosa succeda quando un corpo venga posto in un campo magnetico esterno.

A questo proposito si dimostra che quelle molecole, le quali hanno le orbite elettroniche magneticamente compensate nel loro insieme, non rimangono più neutre, ma esse stesse vengono a generare un campo magnetico, poiché le orbite elettroniche si sono scompensate sotto l'azione del campo esterno (precessione di Larmor) (2). D'altronde questo campo

(2) Ciò perché gli elettroni periferici hanno dovuto variare la loro velocità di rotazione in seguito all'azione del campo magnetico agente sull'atomo. Questo è appunto i fenomeno della precessione di Larmor. Si sa infatti che un elettrone periferico

magnetico molecolare risultante è di verso opposto a quello magnetizzante; la sua intensità è però molto debole.

Nel caso invece in cui le molecole sono dotate di un momento magnetico proprio, cioè si possono considerare come tanti magnetini elementari, allora queste subiscono sia il fenomeno della precessione di Larmor sia il fenomeno della polarizzazione per orientamento. Quest' ultimo fenomeno, che è del tutto analogo al fenomeno della polarizzazione dielettrica per orientamento descritto nel § 3.21, si manifesta dato che ogni molecola (magnetino) tende a disporsi parallelamente al campo magnetico agente, determinando quindi un aumento dell' intensità di quest' ultimo. Tale movimento di orientamento è disturbato ovviamente dall'agitazione termica. Ma l'effetto di orientamento sarà tanto più notevole quanto più forte risulterà l' intensità del campo magnetico esterno che agisce sul materiale, poiché così minore sarà l'azione di disorientamento prodotta sulle molecole dall'agitazione termica.

Quanto è stato qui sommariamente esposto è sufficiente per comprendere il perché del differente comportamento fisico dei materiali appartenenti alle tre categorie citate nel precedente paragrafo, quando questi sono sottoposti all'azione di un campo magnetico. Precisamente:

a) *sostanze diamagnetiche* : sono quelle sostanze per le quali si ha la sola polarizzazione per precessione di Larmor. Pertanto la loro magnetizzazione avverrà in direzione opposta al campo magnetico agente. Quindi $\mu_r < 1$. Poiché d'altronde questo tipo di polarizzazione determina effetti estremamente deboli, le sostanze diamagnetiche si comportano praticamente come il vuoto ($\mu_r \cong 1$) (vedi tabella 4.22). Appartengono alle sostanze diamagnetiche il bismuto, il rame, l'oro, l'argento, il piombo, l'acqua, l' idrogeno, e qualche altra;

b) *sostanze paramagnetiche* : sono quelle sostanze le cui molecole hanno un proprio momento magnetico. Siccome la polarizzazione dovuta all'orientamento è superiore a quella dovuta alla precessione di Larmor, il materiale si magnetizza pertanto nella direzione del campo magnetico agente. Quindi $\mu_r > 1$. Tuttavia si deve precisare che questo risulta solo debolissimamente rinforzato, poiché la molecola possiede sì un momento magnetico proprio non nullo però molto piccolo ($\mu_r \cong 1$). Appartengono a questa categoria la maggioranza delle sostanze, come l'ossigeno, l'aria, l'alluminio, il platino, il manganese, lo stagno, ecc. Per i valori della permeabilità magnetica relativa si veda la tabella 4.22 : essi differiscono assai poco dall'unità (vuoto assoluto);

c) *sostanze ferromagnetiche* : sono sostanze le cui molecole possie-

---

in assenza di campi magnetici si porta a quella velocità di rotazione alla quale la forza centrifuga sviluppantesi è tale da compensare la forza centripeta dovuta all'attrazione elettrostatica del nucleo ; mentre in presenza di un campo magnetico, il quale agisce sull'elettrone mediante una forza (forza di Lorentz di tipo centrifugo o centripeto a seconda dei casi), l'elettrone dovrà variare la sua velocità per ristabilire l'equilibrio dinamico, affinché cioè la variazione della forza centrifuga compensi la forza dovuta al campo magnetico.

dono un momento magnetico proprio molto elevato, anzi a volte elevatissimo. Per questa ragione il materiale, posto in un campo magnetico esterno, si presenterà notevolmente *magnetizzato* nello stesso verso del campo ($\mu_r >> 1$), per cui l'intensità di questo risulterà notevolmente aumentata. In sostanza, il campo magnetico prodotto dalle molecole orientatesi in direzione del campo si sovrappone a quello preesistente rinforzandolo notevolmente.

Appartengono a questa categoria il ferro, il nichel, il cobalto e le loro leghe [3]. Si noti che queste ultime sono assai numerose e tecnicamente molto più importanti del ferro, del nichel e del cobalto allo stato puro.

TABELLA 4.22

Sostanze diamagnetiche	Permeabilità magnetica relativa
Idrogeno	0,999 994
Acqua	0,999 991
Rame	0,999 990
Argento	0,999 981
Oro	0,999 962
Bismuto	0,999 830
Sostanze paramagnetiche	
Aria	1,000 000 4
Ossigeno	1,000 001 7
Alluminio	1,000 022
Platino	1,000 360
Manganese	1,003 800

4.23 Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici presentano rispetto alle sostanze dia e paramagnetiche notevoli anomalie. Per questo motivo, e poiché d'altronde grandissima è la loro importanza nella tecnica, ci si soffermerà ora con particolare attenzione.

---

[3] Il motivo per cui i materiali appartenenti a questo gruppo di sostanze prendono il nome di ferromagnetici è dovuto al fatto che essi mostrano caratteristiche magnetiche simili a quelle del ferro comune.

È stato detto nel § 4.21 che la permeabilità magnetica di un materiale riassume in sé le caratteristiche magnetiche di questo. Infatti da essa dipende, a parità di campo magnetizzante, il valore assunto dall'induzione. D'altronde la relazione fra B ed H, cioè $B = \mu H$, sarà rappresentabile nel piano cartesiano da una retta finché μ si mantiene di valore costante. A questo proposito è bene precisare subito che, mentre per i materiali dia e paramagnetici effettivamente la permeabilità magnetica risulta di valore costante, cioè indipendente dal valore del campo magnetico, per i materiali ferromagnetici invece essa non lo è neanche in prima grossolana approssimazione.

In questo secondo caso la relazione che lega B ad H non può essere rappresentata allora che da una curva. Questa prende il nome di *curva di magnetizzazione*, e il suo andamento è stato riportato in fig. 4.23-1. Di questa curva si noti: il primo tratto (OA), detto ginocchio

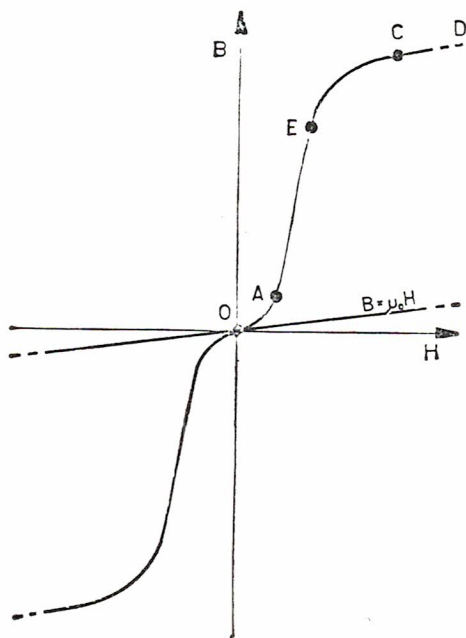



Fig. 4.23-1

inferiore, ove il materiale mostra un relativamente piccolo valore della permeabilità magnetica (per il ferro dolce μ_r è dell'ordine delle centinaia); il secondo tratto (AE) ad andamento abbastanza rettilineo, caratterizzato da elevati valori della permeabilità magnetica (per il ferro dolce $\mu_r > 1000$); il terzo tratto (EC), detto ginocchio superiore, che si raccorda coll' ultimo tratto (CD) detto di saturazione, in cui cioè il materiale è in stato di *saturazione*, caratterizzato da una permeabilità magnetica di basso valore e decrescente al crescere di H (per il ferro dolce μ_r va praticamente da qualche centinaio a qualche decina di unità).

Si osservi ancora come il fenomeno della saturazione sia tipico dei materiali ferromagnetici. Esso infatti non è presente nei materiali dia e paramagnetici, dato che la loro curva di magnetizzazione è una retta. D'altronde nei materiali magnetici ([1]) si raggiungerà veramente lo stato di saturazione solamente quando il campo presenterà un'intensità tale da costringere tutte le molecole ad orientarsi nella direzione del campo stesso ([2]). Oltre questo valore, al crescere del campo magnetico, l'induzione nel materiale incrementerà con la legge del vuoto $B = \mu_0 H$ (vedi figura 4.23-1).

Va precisato subito che un materiale ferromagnetico segue la curva di magnetizzazione ora vista solamente quando esso inizialmente è allo stato di completa smagnetizzazione e il campo magnetizzante viene fatto incrementare, partendo dal valore zero, sempre nello stesso verso (cioè il campo non deve mai decrementare). Quando invece un materiale ferromagnetico è soggetto a variazioni qualsiasi di campo magnetico (ad esempio dopo un incremento segue un decremento, anziché ancora un incremento), il corrispettivo valore d'induzione non può più essere calcolato tramite la curva di magnetizzazione, poiché il materiale non segue più questa curva. Ciò indubbiamente costituisce una delle più grandi anomalie presentate da questi materiali.

Precisamente, se si suppone ad esempio che il campo magnetico abbia a variare ciclicamente (cioè periodicamente) fra due valori eguali, ma di segno opposto, cioè in sostanza se il campo inverte continuamente direzione nel materiale, raggiungendo però sempre la stessa intensità, allora la curva che esprime la relazione fra B ed H si presenterà come in fig. 4.23-2. È questa una curva chiusa che prende il nome di *ciclo di isteresi* ([3]) e che il materiale percorre in un solo e ben determinato verso. Infatti, se dopo aver portato lo stato magnetico del materiale (inizialmente smagnetizzato) da O in P (vedi fig. 4.23-2) mediante un campo magnetico che dal valore zero è passato a $+ H_M$, si fa ritornare il campo al valore di partenza, cioè zero, si trova appunto che lo stato magnetico del materiale non è più rappresentabile da punti che stanno sul tratto PO, ma da punti che stanno invece su di un arco di curva PM più alto (fenomeno dell'isteresi magnetica).

Se poi il campo viene invertito fino a raggiungere il valore $- H_M$, allora il materiale percorrerà un altro tratto di curva, sempre però differente da quella di magnetizzazione, precisamente l'arco MAP' di fig. 4.23-2. Annullando quindi il campo, e facendolo ritornare al valore $+ H_M$, il materiale verrà invece a descr vere il tratto $P' M' A' P$ (figura 4.23-2), differente sempre dalla curva di magnetizzazione.

([1]) Nel linguaggio corrente *magnetico* è sinonimo di ferromagnetico.

([2]) L'intensità di questo campo magnetico assume valori elevatissimi, non raggiungibili correntemente in pratica.

([3]) Quando il campo magnetico varia fra valori eguali, ma di segno opposto, il ciclo di isteresi viene detto *simmetrico,* in tutti gli altri casi *asimmetrico* (vedi ad esempio la fig. 4.23-3).

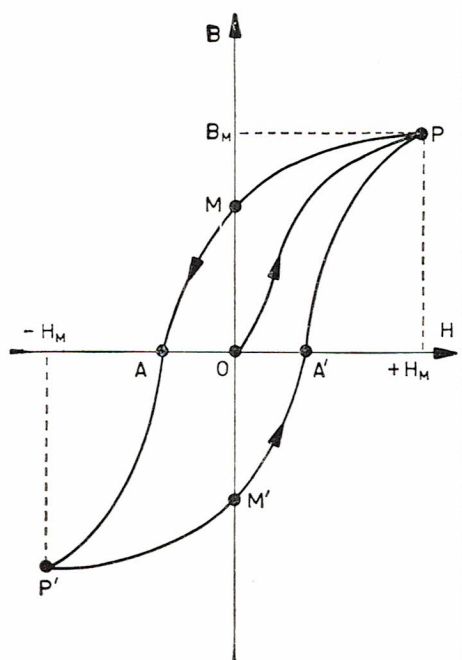



Fig. 4.23-2

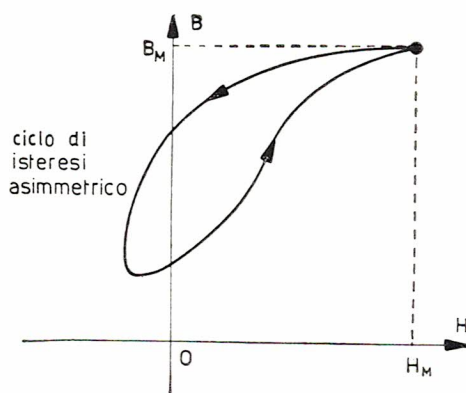



Fig. 4.23-3

In conclusione, il materiale sotto l'azione del campo magnetico variabile, prima fra $+ H_M$ e $- H_M$, poi fra $- H_M$ e $+ H_M$ (ciclo completo), è venuto a descrivere una curva chiusa, il ciclo di isteresi per l'appunto.

Del ciclo di isteresi simmetrico interessano di solito i seguenti punti:

— quello corrispondente ad un vertice (punto P o P' della fig. 4.23-2), poiché rappresenta il valore massimo raggiunto dal campo e corrispondentemente dall' induzione;

— quello corrispondente al valore nullo del campo magnetico (punto M di fig. 4.23-2) che determina il valore di induzione cosiddetta *residua* (indicata con B_r), poiché tale punto esprime lo stato magnetico entro il materiale, quando questo viene lasciato a sé, dopo esser stato magnetizzato. La ragione fisica di questo stato di cose è dovuta all' isteresi, cioè al fatto che le molecole rimangono parzialmente orientate anche dopo la soppressione del campo magnetizzante;

— quello corrispondente al valore del campo che annulla l' induzione nel materiale (ad esempio punto A di fig. 4.23-2). Tale valore è detto *coercitivo* ed é indicato con H_c.

Va ancora precisato che la forma assunta dalla curva di magnetizzazione e da quella del ciclo di isteresi è fortemente dipendente dalle caratteristiche fisico-chimiche del materiale. È noto da tempo infatti che l'aggiunta di certi elementi chimici, così come appropriate lavorazioni tecnologiche, conferiscono ai materiali ferromagnetici particolari pro-

prietà, come permeabilità elevata nel tratto rettilineo, saturazione marcata, ciclo di isteresi ad area molto piccola o di forma particolare, ecc. ....

D'altronde anche la temperatura influisce sulle caratteristiche magnetiche di questi materiali, tanto è vero che al di sopra di un certo ben determinato valore, cosiddetto *punto di Curie*, il materiale perde tutte le sue proprietà magnetiche per comportarsi come paramagnetico [1]. Esso ritorna però magnetico non appena la temperatura scende sotto il punto di Curie, riacquistando le stesse proprietà che esso aveva in partenza, eccezion fatta per eventuali magnetizzazioni (temporanee o permanenti) che esso possedeva e che vengono invece in tal modo irrimediabilmente perdute.

Si riportano da ultimo alcune curve ed alcuni dati pratici relativi ai materiali ferromagnetici più comuni.

Nella fig. 4.23-4 sono state riportate infatti le curve di magnetizza-

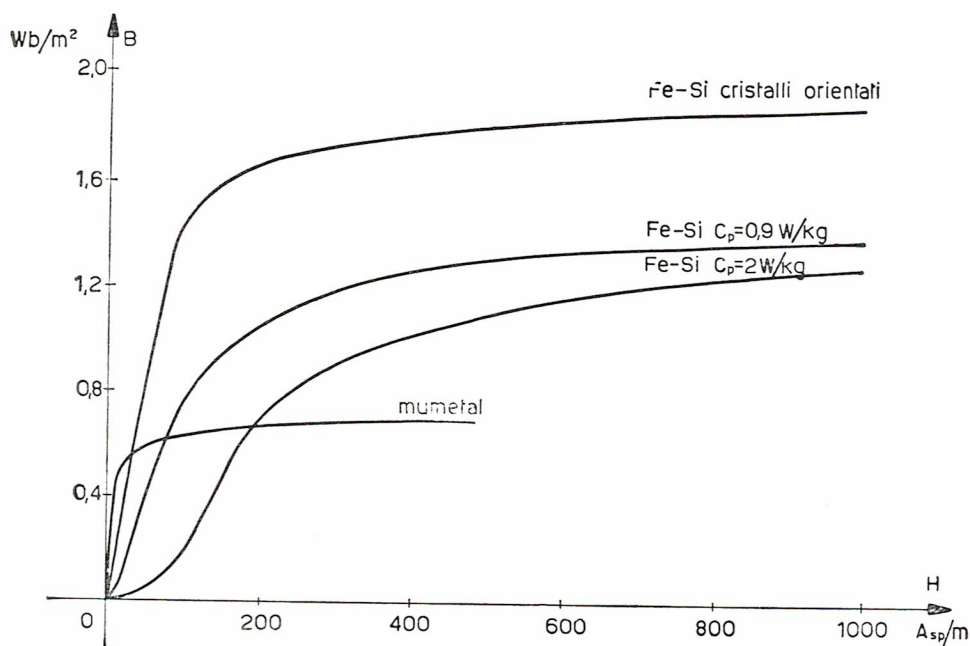



Fig. 4.23-4

zione relative al mumetal (lega ferro-nichel) ed al ferro-silicio, mentre nella fig. 4.23-5 appaiono alcuni cicli di isteresi.

Nella tabella 4.23 invece sono stati raccolti i dati relativi alla per-

---

[1] Per il ferro questa temperatura è di circa 770 °C.

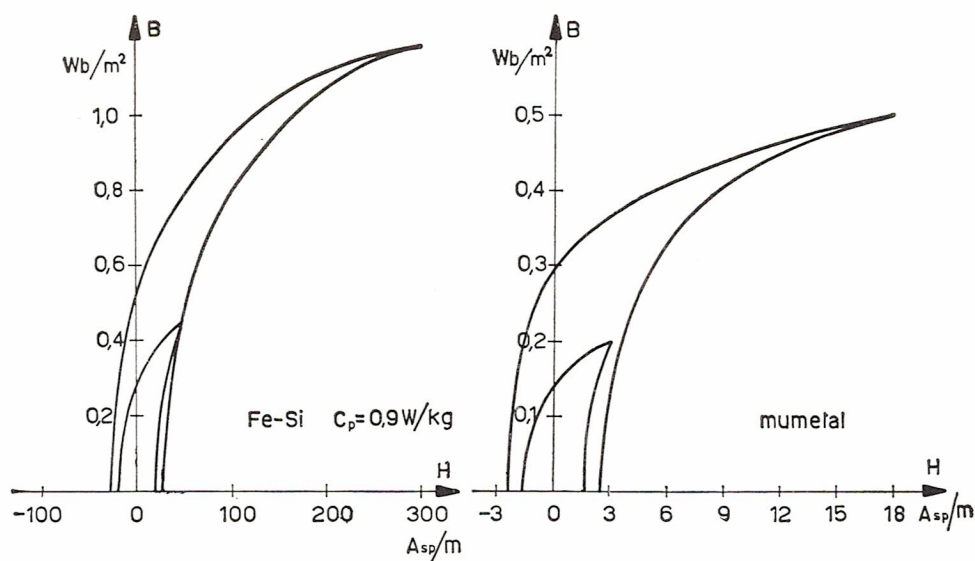



Fig. 4.23-5

meabilità iniziale μ_i e massima μ_M (5), all' induzione di saturazione (B_s) e relativo valore di campo (H_s), e al campo coercitivo H_c del ciclo di isteresi di saturazione, per i materiali magnetici di più comune impiego nell' Elettrotecnica, Elettronica e Telecomunicazioni.

---

(5) La permeabilità iniziale è quella che il materiale presenta all' inizio della curva di magnetizzazione (punto O), mentre la permeabilità massima viene presentata dal materiale nel tratto più verticale della curva di magnetizzazione, più precisamente nel tratto nell' intorno del punto K definito come punto di contatto con una semiretta uscente dall'origine (vedi fig. 4.23-6).

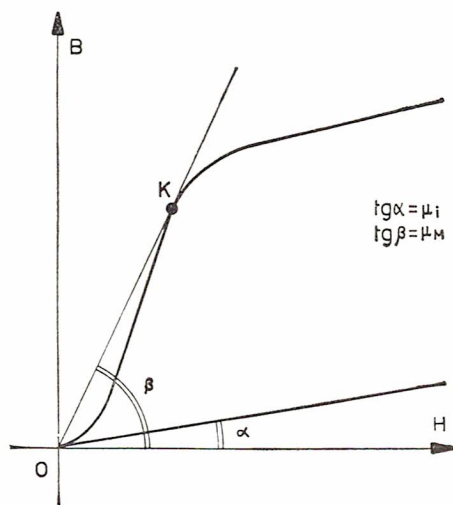



Fig. 4.23-6

TABELLA 4.23

Materiale	μ_i relativa	μ_M relativa	B_s Wb/m^2	H_s Asp/m	H_c Asp/m	Punto Curie °C	Nome commerciale
Ferro	10000	200000	2,15	—	4	774	
Nichel	300	2500	0,61	—	80	370	
Cobalto	70	250	1,78	—	800	1130	
Fe–C (0,2 % *C*)	150	5000	2,12	—	140	770	
Fe–Si (3 % *Si*) laminato a caldo	500	7000	1,97	120000	50	690	
Fe–Si (3 % *Si*) cristalli orientati	1500	30000	2,00	65000	8	740	
Fe–Ni (50 % *Ni*) cristalli orientati	800	50000	1,55	2000	20	450	Permenorm 5000Z
Fe–Ni (45 % *Ni*)	2500	25000	1,60	—	24	—	Permalloy 45
Fe–Ni (68 % *Ni*) raffredd. magnetico	1200	250000	1,30	10000	2,5	600	Permalloy 68
Fe–Ni (78,5 % *Ni*)	8000	100000	1,08	—	4	600	Permalloy 78
Fe–Ni (50 % *Ni*)	90	100	1,60	—	480	500	Isoperm 50
Fe–Ni–Mo (79 % *Ni*, 5% *Mo*)	100000	1000000	0,79	800	0,3	400	Supermalloy
Fe–Ni–Cu–Cr (77% *Ni*, 5 % *Cu*, 2 % *Cr*)	20000	100000	0,65	4000	1,2	—	Mumetal
Fe–Co (50 % *Co*)	800	5000	2,45	—	160	980	Permendur
Fe–Ni–Co (45 % *Ni*, 25 % *Co*)	400	2000	1,55	—	100	715	Perminvar 45-25
Ferrite *Mn–Zn*	1000	1500	0,35	—	8	—	Ferroxcube
Polvere di permalloy (81 % *Ni*, 2 % *Mo*)	125	130	0,70	—	—	480	
Polvere di ferro carbonile (60 %)	20	—	1,50	—	120	770	

4.24 Energia di magnetizzazione

Analogamente a quanto si è visto nell' Elettrostatica, ove la generazione di un campo elettrico implica un processo energetico, anche nell' Elettromagnetismo la generazione di un campo magnetico esige dal circuito elettrico che lo ha creato una certa quantità di energia, energia che al circuito sarà fornita a sua volta dal generatore elettrico collegato al circuito stesso. Più generalmente si potrà affermare che ad un campo magnetico è sempre intimamente connessa dell'energia (magnetica), ossia che là dove esiste campo magnetico vi è energia.

Precisamente si dimostra come, preso in una certa regione di spazio (vuoto o riempito di materia) un volume infinitesimo *dvol* ed un suo punto interno, dove il campo presenta il valore H e corrispondentemente l' induzione vale B ($B = \mu H$, essendo μ la permeabilità magnetica del mezzo costituente il volumetto considerato, si veda la fig. 4.24-1), in

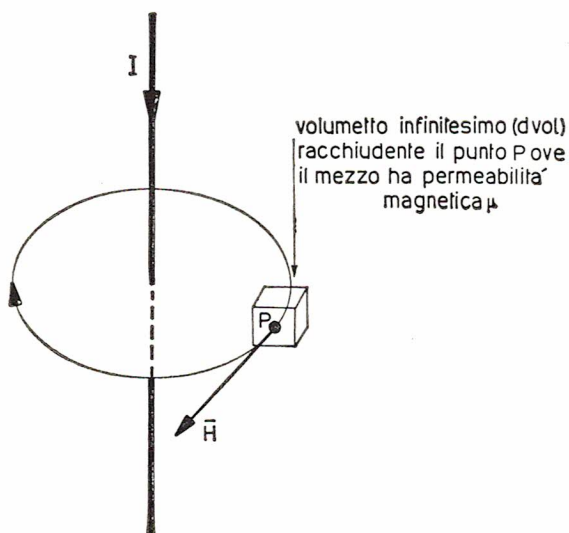



Fig. 4.24-1

quel volume sia racchiusa una energia dW esprimibile con una delle seguenti relazioni :

4.24-1 $$dW = \frac{1}{2} HB\, dvol = \frac{1}{2} \mu H^2 dvol = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dvol \text{ (}^1\text{)} .$$

Naturalmente per ottenere tutta l'energia distribuita nel mezzo circostante il circuito elettrico, occorrerà *sommare* (integrare) tutti i valori

---

(1) Queste formule sono valide anche quando il campo magnetico è dovuto ad un magnete.

delle energie relative agli infiniti volumi infinitesimi in cui si è considerato suddiviso l' intero spazio circostante ([2]). In pratica molte volte si fa ricorso invece ad una suddivisione in piccoli volumi (non infinitesimi) e questa operazione viene limitata allo spazio ove il campo ha un valore apprezzabile.

Si deduce quindi dalla 4.24-1 che l'energia accumulata per unità di volume è esprimibile con una delle tre seguenti formule:

$$w = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (joule/m^3) \quad \text{4.24-2}$$

Va da sé che questa energia, dislocata sotto forma di energia magnetica attorno al circuito, una volta che quest' ultimo non venga più percorso dalla corrente, ad esempio perché staccato dal suo generatore elettrico, verrà restituita integralmente al circuito stesso. Ciò però è esattamente vero finché il mezzo è dia o paramagnetico, cioè a permeabilità costante; viceversa, quando il campo magnetico generato da un circuito elettrico viene ad interessare invece un mezzo costituito da un materiale ferromagnetico, la restituzione dell'energia, all'annullamento del campo, non avverrà più integralmente.

Ci si riferisca ad esempio ad un solenoide toroidale percorso da corrente, con nucleo in materiale ferromagnetico, inizialmente smagnetizzato (vedi fig. 4.24-2). Preso allora il solito volumetto infinitesimo entro

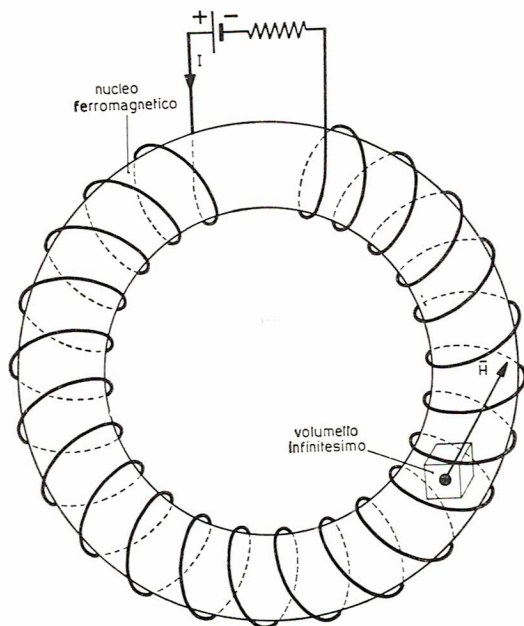



Fig. 4.24-2

([2]) Ovviamente la suddivisione dello spazio, circostante un circuito elettrico o un magnete, in tante piccole porzioni è necessaria quando il campo magnetico non è costante.

la massa del materiale, all'atto della chiusura del circuito si creerà al suo interno un certo campo d'intensità H_1, quindi un'induzione B_1, per cui il materiale magnetico, la cui caratteristica è stata riportata in fig. 4.24-3*a*, verrà a portarsi nel punto P_1 di coordinate H_1 e B_1 seguendo la curva di magnetizzazione. Nel volume considerato si sarà immagazzinata perciò una certa energia magnetica la quale, si dimostra, è proporzionale all'area delimitata dalla curva di magnetizzazione e dall'asse verticale (area OP_1B_1O di fig. 4.24-3*a*). Ora, quando la corrente nel circuito viene portata a zero, il campo magnetizzante esterno anch'esso si annulla, solamente che il materiale non restituisce integralmente l'energia ricevuta e ciò perché esso non ritorna allo stato iniziale (rappresentato in fig. 4.24-3*a* dal punto O), ma rimane parzialmente magnetizzato (rap-

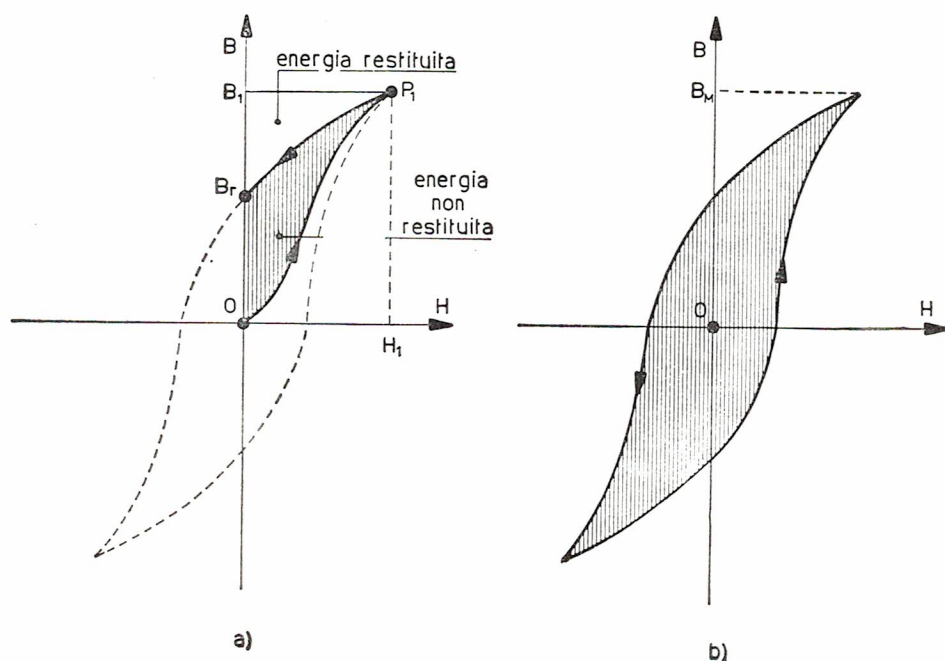



Fig. 4.24-3

presentato dal punto di ordinata B_r posto sull'asse verticale). L'energia non restituita si è dissipata in calore, per effetto appunto dell' isteresi magnetica.

Si dimostra a questo proposito che, se il materiale percorre interamente un ciclo di isteresi, si veda ad esempio la fig. 4.24-3*b*, la differenza fra l'energia ricevuta e quella restituita risulta proporzionale all'area del ciclo di isteresi del materiale ([3]). Questa energia perduta, se il ciclo è sim-

---

([3]) Purché la variazione ciclica sia lenta, inferiore al ciclo per secondo.

metrico, può essere calcolata tramite la seguente formula empirica, nell' ipotesi che l' induzione sia uniforme e raggiunga il valore massimo B_M nell' intero volume considerato:

4.24-3 $$W_i = aB_M^n \cdot \text{volume} \qquad \text{(joule)},$$

dove a è un coefficiente fortemente dipendente dal tipo di materiale (ad esempio per il ferro dolce $a = 1000$, per il ferro-silicio $a = 200$), mentre l'esponente n è pressoché costante e di valore non molto inferiore a 2. Tale energia si trasforma, come si è detto, in calore: essa risulta dunque perduta per effetto della isteresi magnetica (4).

4.25 Corpi ferromagnetici in campi magnetici - Schermi

È stato detto che i materiali dia e paramagnetici sottoposti all'azione di campi magnetici rispondono praticamente nello stesso modo del vuoto assoluto. Ciò significa che i corpi costituiti con i suddetti materiali, comunque sia la loro forma ed estensione, non modificano sensibilmente con la loro presenza l'andamento delle linee di forza e l' intensità dei campi magnetici preesistenti. Pertanto tutti i fenomeni e le leggi studiati nel caso del vuoto assoluto sono estendibili anche quando questo è riempito parzialmente o totalmente di uno o più materiali dia e paramagnetici. In particolare, le linee di forza del campo e di induzione non subiscono modificazioni e rifrazioni apprezzabili nel passaggio dall'aria ad un mezzo dia o paramagnetico, e viceversa.

Quanto sopra non è più vero quando i corpi sono ferromagnetici. Infatti questi, magnetizzandosi intensamente sotto l'azione di un campo magnetico, determinano generalmente un'alterazione dell'andamento delle linee di forza ed una variazione dell' intensità del campo magnetico preesistente.

È da tenere presente anzitutto, a tale proposito, che le linee di forza, nel passaggio da un mezzo omogeneo di permeabilità relativa μ_{r_1} ad un altro, pure omogeneo, ma di permeabilità relativa μ_{r_2} (con $\mu_{r_1} \neq \mu_{r_2}$), subiscono una rifrazione più o meno marcata a seconda dei valori delle due permeabilità. Si veda la fig. 4.25-1, che mostra schematicamente tale fenomeno. È bene precisare d'altronde che esiste una relazione la quale lega i valori delle due permeabilità agli angoli individuati dalle linee di forza con le rispettive normali alla superficie di separazione. Con riferimento alla situazione riportata in fig. 4.25-1, tale relazione è espressa come segue:

4.25-1 $$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}}.$$

---

(4) Questo calore che si sviluppa nei materiali è in sostanza dovuto al lavoro molecolare interno.

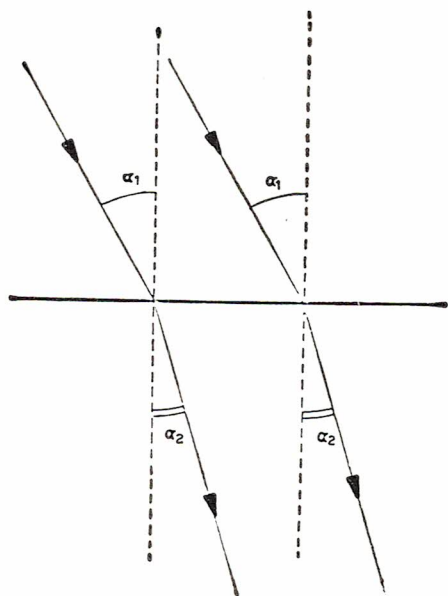



Fig. 4.25-1

La legge della rifrazione delle linee di forza magnetica sopra trovata è generale; vale cioè qualunque siano i due mezzi che danno luogo alla superficie di separazione [1]. Essa è utile in particolare quando si hanno due corpi ferromagnetici aventi differente valore di permeabilità (ad esempio ferro dolce con ghisa, ferro-nichel con ferro dolce, ecc.), oppure anche quando uno dei due corpi, ad esempio il primo, è ferromagnetico e il secondo è l'aria [2]. In tal caso $\mu_{r_2} = 1$; dalla 4.25-1 si ricava allora che:

4.25-2
$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \mu_{r_1}.$$

D'altronde μ_{r_1} è sempre molto elevato, poiché rappresenta la permeabilità di un materiale ferromagnetico. Supponendo ad esempio $\mu_{r_1} = 2000$ (valore questo per niente eccessivo), si ha dunque che $tg\alpha_2 = tg\alpha_1/2000$, da cui si ricava come, tanto nel caso in cui l'angolo α_1 sia di piccolo o di grande valore, la tangente dell'angolo α_2 risulti sempre molto piccola e quindi di conseguenza risulti piccolo l'angolo α_2 [3]. Ciò significa

---

[1] Vale cioè anche per i corpi dia e paramagnetici, solamente che per essere $\mu_{r1} \lesseqgtr \mu_{r2}$ sarà anche $\alpha_1 \lesseqgtr \alpha_2$.

[2] Oppure più genericamente dia o paramagnetico.

[3] Infatti per $\mu_{r1} = 2000$ (ferro scadente), se $\alpha_1 = 89°$, $\alpha_2 = 1° 38'$; per $\mu_{r1} = 10000$ (ferro molto buono), se $\alpha_1 = 89°$, $\alpha_2 = 20'$.

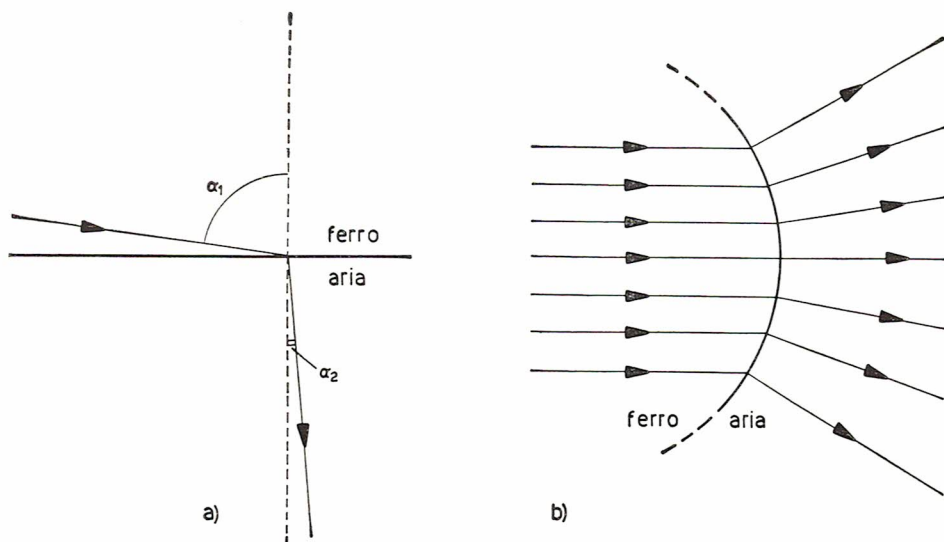



Fig. 4.25-2

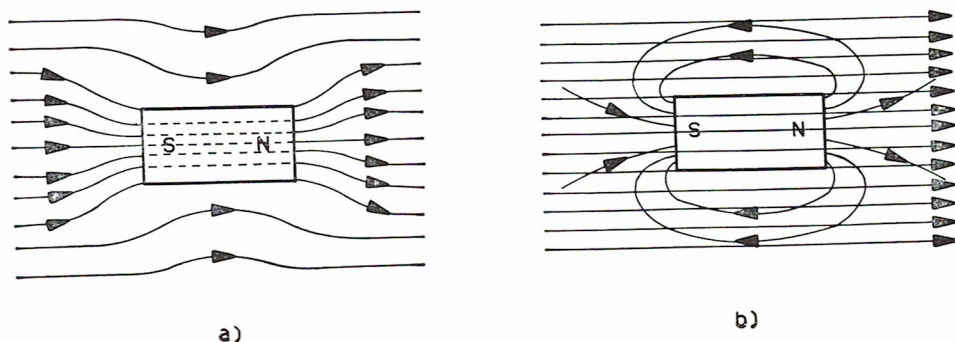



Fig. 4.25-3

che dai corpi ferromagnetici immersi nell'aria, le linee di forza escono sempre ortogonalmente dalla loro superficie esterna (vedi ad esempio le figg. 4.25-2*a* e *b*).

È interessante osservare però che cosa succede lateralmente ad un corpo ferromagnetico, di dimensioni finite, immerso ad esempio nell'aria, quando esso venga investito da un campo magnetico. In questo caso, in cui il corpo ferromagnetico è completamente immerso nel campo magnetico, si veda ad esempio la fig. 4.25-3*a*, avviene che le linee di forza si concentrano nel corpo ferromagnetico per disertare lo spazio immediatamente circostante. Questa disuniformità nelle linee di forza è dovuta al fatto che il corpo ferromagnetico considerato, per effetto del campo agente, si è notevolmente magnetizzato, diventando simile ad un magnete

(vedi fig. 4.25-3*b*), per cui il campo da questo prodotto, a causa appunto della polarizzazione magnetica, rinforzerà il campo preesistente, là dove è stato posto il corpo, mentre lo indebolirà lateralmente, come risulta componendo vettorialmente i due campi magnetici.

Cosa analoga si può dire nel caso di un cilindro cavo (principio dello schermo magnetico) posto in un campo magnetico inizialmente uniforme. Ricordando quanto è stato accennato a proposito della rifrazione ferro-aria e quindi aria-ferro, sarà facile giustificare l'andamento delle linee d'induzione riportato in fig. 4.25-4. Anche in questo caso, in

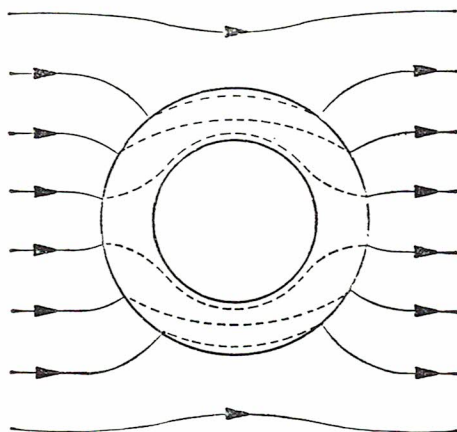



Fig. 4.25-4

sostanza, le linee di forza preferiscono concentrarsi nel corpo, rimanendo però sempre confinate entro quella parte costituita dal materiale ferromagnetico. Lo spazio d'aria o di vuoto costituente la parte cava del corpo non viene attraversata perciò praticamente da linee di forza del campo o di induzione. In ciò consiste l'effetto schermante dei corpi cavi, i quali naturalmente possono essere di forma qualsiasi, purché chiusa, e purché lo spessore del materiale non sia troppo piccolo e la permeabilità di questo non risulti troppo bassa ([4]).

4.26 Circuiti magnetici

Si definisce circuito magnetico un certo sviluppo di linee di induzione tale da svolgersi prevalentemente entro materiali ferromagnetici, cioè entro materiali ad elevata permeabilità. Le linee di induzione, che saranno dovute ad esempio ad un circuito elettrico opportunamente disposto, risulteranno allora in buona parte confinate entro il circuito magnetico stesso.

([4]) Il valore della permeabilità che qui interessa è quella iniziale μ_i.

Sono esempi di circuiti magnetici quelli riportati in fig. 4.26-1 poiché, come appare in modo assai evidente dall'andamento delle linee principali di flusso tracciate, queste sono obbligate a seguire un percorso determinato dalla forma del nucleo magnetico ([1]), così come una corrente elettrica (flusso di elettroni) deve seguire l'andamento del circuito elettrico. Da questa analogia è scaturito appunto il nome di circuito magnetico.

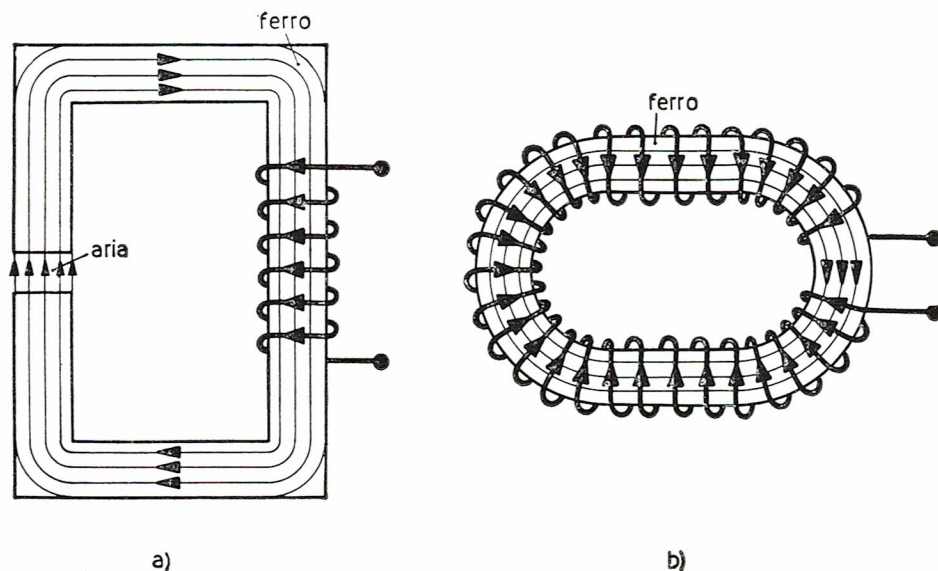



Fig. 4.26-1

A dire il vero, a tale proposito, è necessario fare subito una considerazione. Osservando infatti le linee di flusso dei due circuiti magnetici riportati in fig. 4.26-2, che sono quelli di fig. 4.26-1, solamente che ora l'andamento delle linee di flusso è completo, ci si accorge come il nucleo di materiale ferromagnetico, impiegato appositamente per realizzare un buon circuito magnetico, non sia rigorosamente un tubo di flusso, come invece lo è un buon circuito elettrico, e ciò perché alcune linee di induzione, poche in verità ([2]), fuoriescono dal nucleo per chiudersi nel mezzo circostante. All' insieme di queste linee si è dato il nome di *flusso disperso*.

([1]) Dicesi nucleo magnetico il corpo ferromagnetico che realizza praticamente un circuito magnetico. Si sarà notato come questo possa anche non essere costituito interamente con materiali ferromagnetici, ma possa presentare dei tratti in aria o, più generalmente, costituiti con materiali aventi una $\mu_r \cong 1$. Queste parti vengono comunemente denominate *interferri* o *traferri*.

([2]) La loro entità dipende dalle caratteristiche del nucleo e soprattutto dalla posizione e dallo sviluppo degli avvolgimenti.

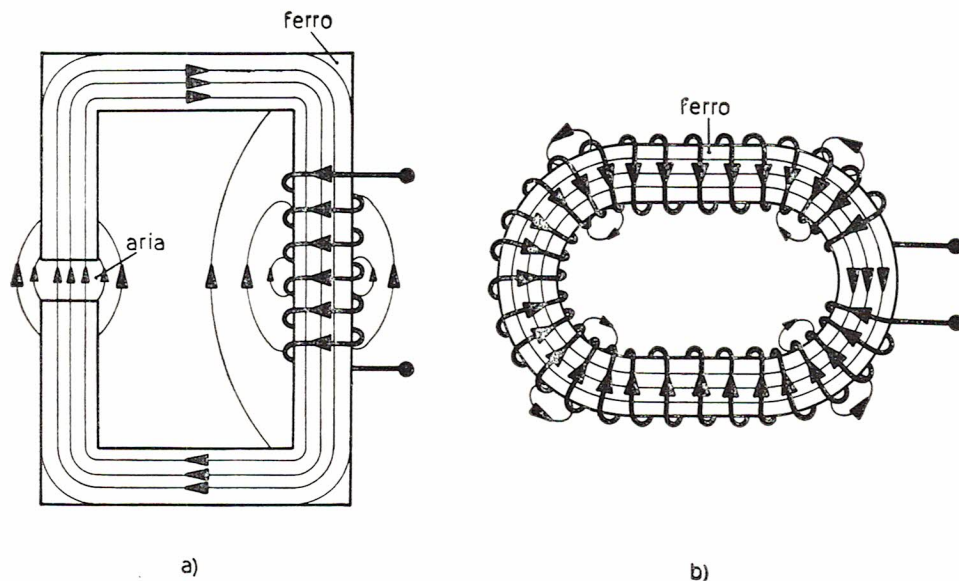



Fig. 4.26-2

D'altronde la ragione per cui in un circuito elettrico tutto il flusso delle cariche elettriche libere (corrente) è contenuto entro il circuito stesso scende dal fatto che il suo grado di isolamento rispetto al mezzo circostante risulta elevatissimo, cosa che non si ha in un circuito magnetico ove il flusso di induzione è solo parzialmente contenuto entro il circuito magnetico a causa della non elevata differenza fra i valori delle permeabilità del circuito e del mezzo che lo circonda. Naturalmente le *dispersioni* o *fughe* magnetiche avverranno in maniera tanto meno sensibile quanto migliore sarà il circuito magnetico dal punto di vista della forma e dei materiali impiegati (questi dovranno avere un'alta permeabilità magnetica rispetto al mezzo circostante che di solito è una sostanza dia o paramagnetica, ad esempio aria od olio) e quanto più uniforme sarà la distribuzione degli avvolgimenti che determinano il campo magnetico. Ciò che ora è stato accennato apparirà assai più chiaramente dopo la lettura del paragrafo seguente.

4.27 Leggi dei circuiti magnetici

Si è detto che un circuito magnetico serve per creare un percorso chiuso di forma geometrica voluta, ma, nello stesso tempo, di facile attraversamento per le linee di induzione. Queste sono dovute d'altronde ad un circuito elettrico, di solito costituito da un certo numero di spire che si concatenano con le linee di induzione stesse.

È ora interessante cercare come siano legati fra di loro i parametri geometrici e quelli del materiale caratterizzanti il circuito magnetico al relativo flusso e ai parametri del circuito elettrico. Si ricordi d'altra parte come, allo scopo di poter procedere speditamente, sia necessario porre l'ipotesi che il circuito magnetico dato, pur potendo essere costituito da materiali aventi permeabilità differente (e di valore anche non elevatissimo), costituisca un unico tubo di flusso (1).

Si incominci dunque coll'osservare ad esempio il circuito magnetico riportato in fig. 4.27-1 il quale risulta costituito in sostanza, come del

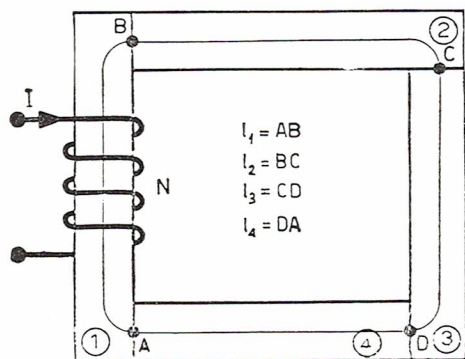



Fig. 4.27-1

resto avviene per molti circuiti magnetici, da tanti tronchi rettilinei, ciascuno di sezione e di permeabilità magnetica costanti.

Indicata perciò con l_1, S_1, μ_1 rispettivamente la lunghezza, la sezione retta, la permeabilità magnetica *assoluta* del primo tronco, con l_2, S_2, μ_2 gli analoghi parametri del secondo tronco e così via, ed indicato con Φ il flusso di induzione interessante il circuito magnetico, si potrà scrivere, per la nota proprietà dei tubi di flusso,

$$4.27\text{-}1 \qquad B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}, \quad B_3 = \frac{\Phi}{S_3}, \dots,$$

dove B_1, B_2, B_3, ecc. sono rispettivamente le induzioni assunte dal materiale nel primo tronco, nel secondo, nel terzo ecc. .... Osservando d'altronde che:

$$4.27\text{-}2 \qquad B_1 = \mu_1 H_1, \quad B_2 = \mu_2 H_2, \quad B_3 = \mu_3 H_3, \dots,$$

si perviene alle seguenti espressioni:

$$4.27\text{-}3 \qquad H_1 = \frac{\Phi}{\mu_1 S_1}, \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2 S_2}, \quad H_3 = \frac{\Phi}{\mu_3 S_3}; \dots .$$

(1) Cioè non vi siano flussi dispersi.

Moltiplicando ora ambo i membri di ciascun termine che appare nella 4.27-3 per la lunghezza del tronco corrispondente si ottiene:

4.27-4 $$H_1 l_1 = \frac{\Phi\, l_1}{\mu_1 S_1}, \quad H_2 l_2 = \frac{\Phi\, l_2}{\mu_2 S_2}, \quad H_3 l_3 = \frac{\Phi\, l_3}{\mu_3 S_3}, \ldots.$$

e quindi sommando successivamente membro a membro tutte queste espressioni si arriva alla seguente relazione:

4.27-5 $$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots. = \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \ldots.\right)\Phi\,.$$

A tale proposito si incominci coll'osservare che il concetto di tensione magnetica vale perfettamente anche quando la linea di forza magnetica si sviluppa sia in un mezzo omogeneo avente permeabilità magnetica differente da quella del vuoto sia anche in un mezzo eterogeneo, come è nel nostro caso (2). Si comprende pertanto come la somma dei termini tipo Hl estesa ad una linea chiusa rappresenti sempre la tensione magnetica totale agente su quella linea, e quindi come tale somma in definitiva corrisponda alle amperspire del circuito elettrico concatenato con quella linea. Nel caso che si sta trattando sarà perciò:

4.27-6 $$NI = \left(\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \ldots.\right)\Phi,$$

essendo N il numero di spire dell'avvolgimento posto sul nucleo magnetico e I l'intensità della corrente che vi circola.

Si noti che i termini del tipo $\frac{l}{\mu S}$, che compaiono a secondo membro di questa formula, fanno ricordare quelli del tipo $\frac{l}{\gamma S}$ relativi ai circuiti elettrici. Ora è proprio a causa di questa analogia che il termine $\frac{l}{\mu S}$, relativo ad un certo tronco di lunghezza l, di sezione S e di permeabilità μ, viene denominato *resistenza magnetica* o anche *riluttanza* del tronco di circuito considerato (simbolo $\mathcal{R}$, unità di misura l'henry^{-1}) (3).

Indicando perciò con:

4.27-7 $$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1}, \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2}, \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_3 S_3}, \ldots.$$

---

(2) La legge della circuitazione vale quindi per una qualsiasi linea sviluppantesi in un qualunque mezzo.

(3) All'inverso della riluttanza, cioè al rapporto $\frac{\mu S}{l}$, si dà il nome di permeanza (simbolo $\mathcal{P}$).

le riluttanze dei singoli tronchi, la 4.27-6 potrà essere scritta anche nella seguente forma:

4.27-8 $$NI = (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + ...)\,\Phi\,.$$

Denominando ora con $\mathcal{R}_t$ la riluttanza totale del circuito:

4.27-9 $$\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + ...\,,$$

in definitiva si potrà scrivere per il circuito magnetico dato la seguente espressione:

4.27-10 $$NI = \mathcal{R}_t\Phi = \Phi\Sigma\mathcal{R}\,,$$

la quale rappresenta la cosiddetta legge di Hopkinson, analoga *nella forma* alla legge di Ohm per i circuiti elettrici.

La 4.27-10 esprime dunque la relazione cercata fra i vari parametri geometrici, elettrici e magnetici del dispositivo dato. Essa è la base per il calcolo di quei circuiti magnetici i quali risultano costituiti da più tronchi in serie tali da realizzare poi un unico circuito chiuso (questo potrà chiudersi naturalmente anche attraverso uno o più spazi d'aria, cioè uno o più interferri).

Quando invece i tronchi sono in parallelo, o in serie-parallelo, allora per il loro studio si dovrà ricorrere a dei metodi di risoluzione che risultano del tutto analoghi a quelli visti a suo tempo per le reti elettriche e ciò per la formale analogia esistente fra circuiti elettrici e circuiti magnetici. Poiché appunto si può affermare, in base alla legge di Hopkinson, come per i circuiti magnetici la forza magnetomotrice rappresenti ciò che la forza elettromotrice è per i circuiti elettrici e quindi come il flusso magnetico e la riluttanza di un circuito magnetico corrispondano rispettivamente alla corrente e alla resistenza elettrica di un circuito elettrico.

La conclusione cui si arriva è che anche per i circuiti magnetici complessi debbono valere dei principi del tutto analoghi a quelli di Kirchhoff. In base a ciò si potrà affermare precisamente che:

1) per ciascuna porzione di spazio, ove convergono e divergono più flussi magnetici, vale la condizione per cui la somma dei flussi entranti è eguagliata dalla somma dei flussi uscenti, cioè anche, considerando positivi i flussi entranti e negativi quelli uscenti, che (1^0 principio):

4.27-11 $$\Sigma\Phi = 0\,.$$

Ad esempio per il caso riportato in fig. 4.27-2 si scriverà:

4.27-12 $$-\,\Phi_A + \Phi_B - \Phi_C = 0\,;$$

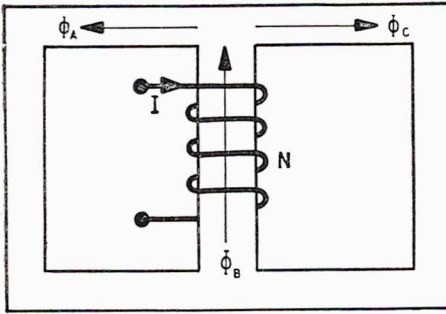



Fig. 4.27-2

2) per ciascun circuito chiuso soggetto a più forze magnetomotrici, la somma algebrica di queste (ΣNI) equilibrerà tutte le cadute di tensione magnetiche ($\mathfrak{R}\Phi$) dei vari tronchi costituenti il circuito chiuso (eventualmente con interferri). In formula si potrà scrivere che (2° principio):

4.27-13
$$\Sigma NI = \Sigma \mathfrak{R} \Phi \, .$$

Applicando quanto ora detto ad esempio al percorso chiuso *ABCDA* del circuito magnetico riportato in fig. 4.27-3, risulterà dunque (4):

4.27-14
$$N_1 I_1 - N_7 I_7 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} \Phi_1 + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} \Phi_2 - \frac{l_7}{\mu_7 S_7} \Phi_7 + \frac{l_6}{\mu_6 S_6} \Phi_6 \, .$$

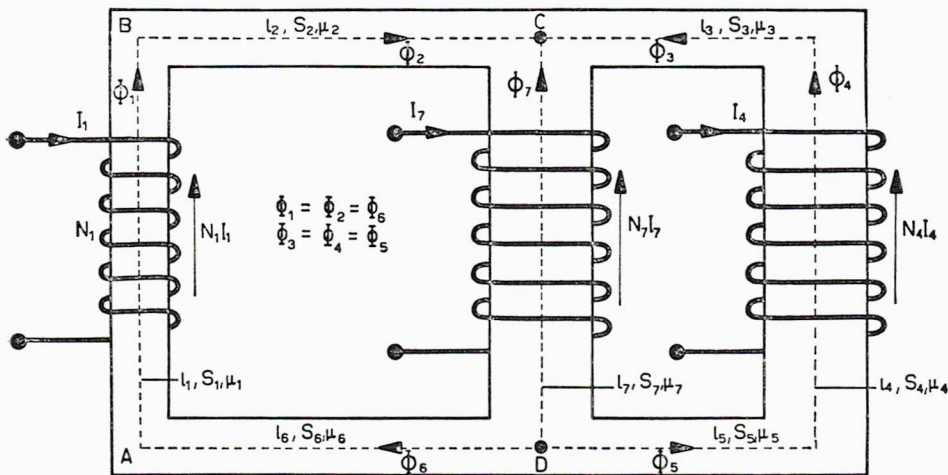



Fig. 4.27-3

(4) Si ricordi che, per poter scrivere una relazione del tipo 4.27-13, occorre stabilire un verso di percorrenza nel circuito e conoscere i versi dei flussi magnetici e i segni da assegnare alle *f.m.m.* Qualora i versi dei vari flussi non siano noti, questi verranno posti arbitrariamente; mentre risulteranno positive quelle *f.m.m.* le cui azioni sono concordi con il verso di percorrenza stabilito, negative le altre.

Si noti che la 4.27-13 può essere applicata anche quando un circuito magnetico semplice presenta delle fughe magnetiche non trascurabili (cioè non è un tubo di flusso). In tal caso si dividerà il circuito in tanti tronchi, in modo che per questi il flusso magnetico si possa ritenere costante, quindi si applicherà la formula ora richiamata. Così ad esempio per il circuito di fig. 4.27-4 si potrà scrivere che:

4.27-15 $$NI = \frac{l_1}{\mu_1 S_1}\,\Phi_1 + \frac{l_2}{\mu_2 S_2}\,\Phi_2 + \dots.$$

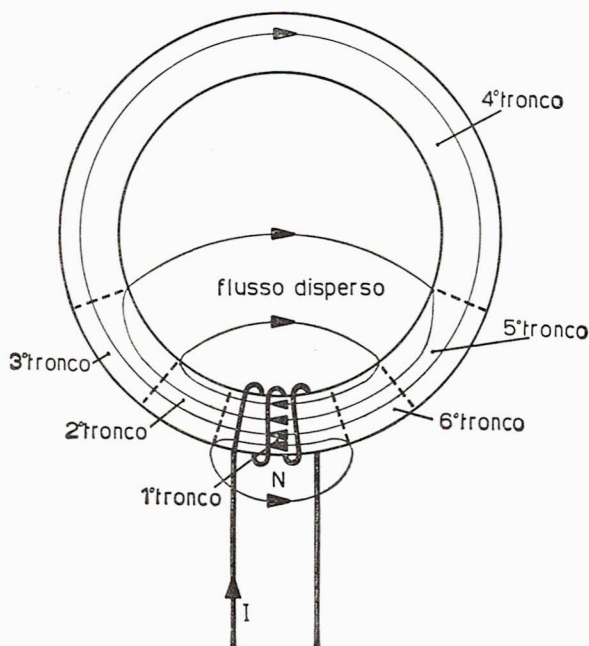



Fig. 4.27-4

Si vuole richiamare ancora da ultimo l'attenzione sul fatto che la legge di Hopkinson e i principi di Kirchhoff dei circuiti magnetici sono sufficienti per risolvere i problemi inerenti ai casi più complessi. È bene però precisare a questo proposito che in pratica relativamente facile è il procedimento di calcolo solamente quando si cerchi il valore della forza magnetomotrice necessaria per produrre un ben determinato flusso Φ in un certo circuito, di caratteristiche geometriche e magnetiche note. Il problema inverso invece, quello cioè di calcolare il valore del flusso di induzione che vi sarà nel circuito magnetico per una data forza magnetomotrice agente, è assai più complicato perché non è possibile risolvere la 4.27-10 rispetto a Φ dato che la riluttanza stessa è funzione del flusso magnetico. E ciò perché la permeabilità μ dipende, nei materiali ferromagnetici, dal valore di B, cioè appunto dal flusso. La risoluzione deve essere impostata pertanto in quest' ultimo caso per tentativi (si veda a tale proposito l'esercizio 4.58).

4.28 Magneti permanenti

Un flusso può essere mantenuto in un circuito magnetico senza l'aiuto diretto di un circuito elettrico (avvolgimento di eccitazione), bensì per mezzo di uno o più magneti permanenti (vedi fig. 4.28-1).

È stato detto infatti all' inizio di questo capitolo che un magnete permanente è un particolare corpo il quale, da solo, è in grado di generare un campo magnetico. Per quanto accennato al § 4.22 si comprende che ciò è dovuto alle correnti molecolari presenti nel magnete. Ora, per-

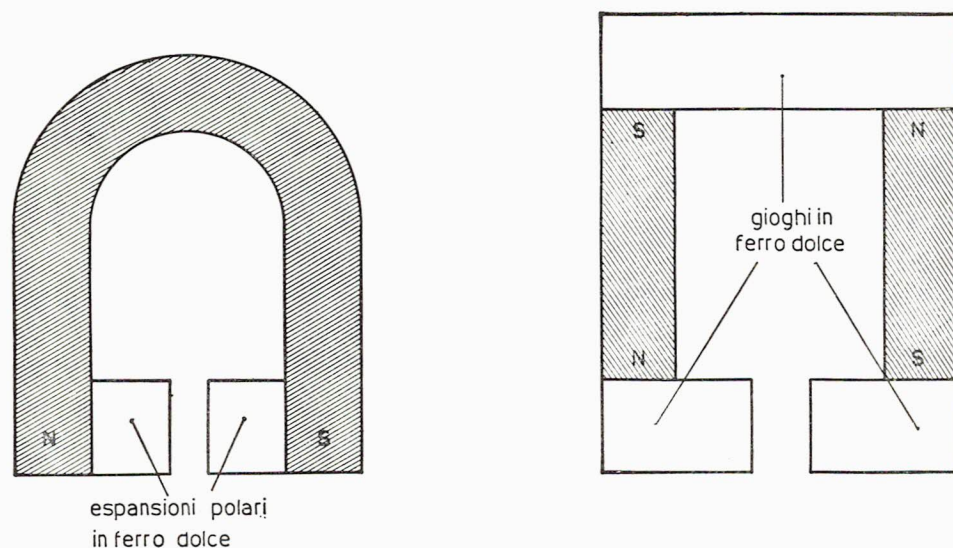



Fig. 4.28-1

ché un corpo manifesti tale proprietà in maniera soddisfacente, occorre che esso sia costituito con certi materiali ferromagnetici, cosiddetti *duri* (ad esempio leghe di ferro-cobalto, di ferro-nichel-alluminio, ecc., si veda anche la tabella 4.28), ed abbia subìto dei processi tecnologici e dei trattamenti particolari. Questi, in sostanza, tendono a conferire al materiale un ciclo di isteresi avente un'area molto grande affinché, fermo restando per l' induzione residua B_r un valore aggirantesi attorno ad 1 Wb/m^2, risulti molto elevato il valore del campo coercitivo H_c (1). Il ciclo d' isteresi prende allora la forma come quella ripor-

---

(1) A parità di altri fattori, più alto è il valore di H_c migliore risulta il magnete permanente. Oggi i materiali speciali presentano campi coercitivi dell'ordine delle decine di migliaia di Asp/m. Solo così si farà sentire in maniera pressoché nulla l'effetto della *smagnetizzazione*.

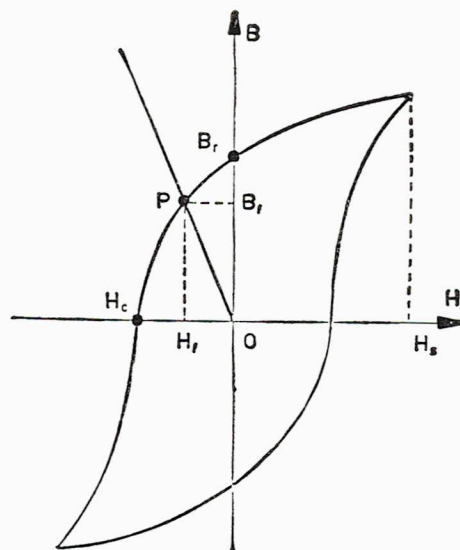



Fig. 4.28-2

tata in fig. 4.28-2. Si vedano anche i dati riportati nella tabella 4.28, relativi ai più comuni materiali per magneti permanenti, e se ne faccia il confronto con quelli della tabella 4.23 relativi ai materiali cosiddetti

TABELLA 4.28

Materiale	H_c Asp/m	B_r Wb/m²	H_s Asp/m	Nome commerciale
Fe–W (6 % *W*)	5200	1,05	26000	Acciaio al tungsteno
Fe–Cr (3,5 % *Cr*)	5500	0,98	27000	» cromo
Fe–Co–Cr (2 % *Co*, 4 % *Cr*)	6400	0,98	32000	» »
Fe–Co (3 % *Co*)	10000	0,72	50000	» cobalto
Fe–Co (15 % *Co*)	14000	0,82	70000	» »
Fe–Co (35 % *Co*)	20000	0,90	100000	» »
Fe–Ni–Al (24 % *Ni*, 12 % *Al*)	38000	0,62	190000	Alni
Fe–Ni–Al (32 % *Ni*, 12 % *Al*)	54000	0,50	270000	»
Fe–Ni–Al–Co–Cu (17 % *Ni*, 8 % *Al*, 12 % *Co*, 6 % *Cu*)	40000	0,80	200000	Alnico
Fe–Ni–Al–Co–Cu (14 % *Ni*, 8 % *Al*, 24 % *Co*, 3 % *Cu*)	51000	1,27	255000	Ticonal
Fe–Ni–Co–Cu (20 % *Ni*, 2,5 % *Co*, 50 % *Cu*)	20000	0,73	100000	Cunife
Fe–Co–V (52 % *Co*, 10 % *V*)	24000	0,90	120000	Vicalloy
Ferrite *Fe–Co*	72000	0,16	360000	Vectolite

dolci, che non hanno assolutamente proprietà tali da permettere la costruzione di magneti permanenti.

Come si è detto lo scopo dei magneti permanenti è quello di creare un certo flusso entro un dato circuito magnetico, di solito provvisto di traferro. D'altronde lo studio di questi particolari circuiti verrà condotto impiegando quanto già è noto sulle proprietà dei campi e dei circuiti magnetici.

Si debba cercare ad esempio il valore dell' induzione magnetica nel traferro del magnete permanente riportato in fig. 4.28-3. Il magnete sia

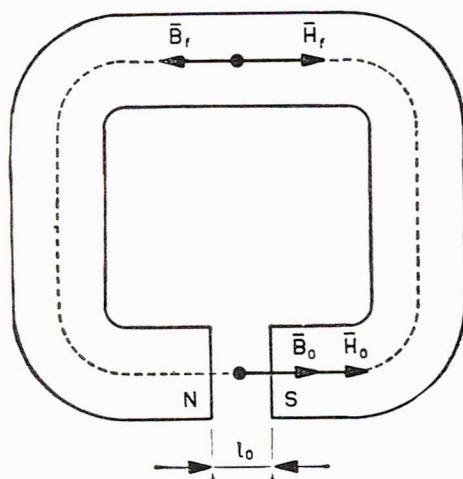



Fig. 4.28-3

costituito da un nucleo di lunghezza l_f, di sezione costante e con materiale il cui ciclo di isteresi sia noto (fig. 4.28-2); il traferro sia lungo l_0. Si considerino nulle le dispersioni magnetiche. Indicati allora con H_f, B_f, rispettivamente con H_0, B_0 il campo e l' induzione magnetica entro il nucleo e nel traferro, si incominci a scrivere la legge della circuitazione per una qualsiasi linea di forza contenuta entro il nucleo:

4.28-1
$$H_f l_f + H_0 l_0 = 0\,.$$

Ovviamente il termine ΣNI che compare nell'equazione della circuitazione è nullo, poiché nulle sono le amperspire agenti dall'esterno sul nucleo di fig. 4.28-3. Il campo magnetico H_0 nel traferro vale perciò:

4.28-2
$$H_0 = -\frac{l_f}{l_0} H_f,$$

per cui l' induzione nello stesso traferro, e nel materiale, risulta come segue:

4.28-3
$$B_0 = B_f = -\frac{\mu_0 l_f}{l_0} H_f\,.$$

Si noti d'altronde che l'equazione 4.28-3 può essere rappresentata sullo stesso diagramma cartesiano al quale è riferito il ciclo di isteresi del materiale costituente il magnete permanente, poiché le grandezze B_f ed H_f, che compaiono nella 4.28-3, sono appunto i valori dell' induzione e del campo in quest' ultimo. Nel diagramma di fig. 4.28-2 la 4.28-3 risulterà dunque rappresentata da una retta, di coefficiente angolare $-\mu_0 l_f / l_0$, la quale incontrerà il ciclo di isteresi nel punto P (2).

Lo stato magnetico del magnete dovrà soddisfare d'altra parte sia la condizione espressa dalla 4.28-3 sia anche la relazione $B = f(H)$ data dal suo ciclo di isteresi. Il punto P d'incontro fra la suddetta retta e il ciclo di isteresi rappresenta dunque lo stato magnetico del magnete nelle condizioni assegnate. In particolare l'ordinata del punto P rappresenta il valore dell' induzione nel materiale ferromagnetico, quindi, nell' ipotesi fatta di magnete a sezione costante e con dispersione magnetica nulla, anche quella nel traferro (B_0).

4.29 Problemi di applicazione al § 4.2

Esercizio 4.291

Si trovi il valore dell' induzione magnetica nei quattro tronchi costituenti il nucleo ferromagnetico di spessore costante ($s = 2$ cm) riportato in fig. 4.291-1, quando le 3000 spire sono percorse da una corrente di

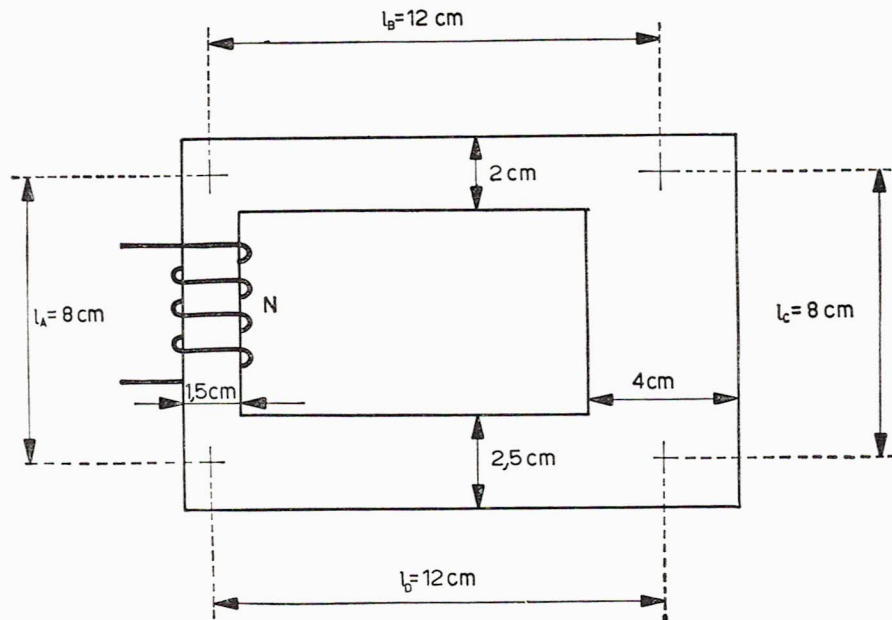



Fig. 4.291-1

(2) Nel secondo quadrante, perché H_c è negativo.

50 mA, nell' ipotesi che la permeabilità magnetica del nucleo sia costante ($\mu_r = 1000$) e che le fughe magnetiche siano nulle.

Soluzione

Con le ipotesi poste dal problema, il nucleo è un tubo di flusso, per cui esso sarà sede di un flusso costante Φ. Per trovare il suo valore, tramite la formula di Hopkinson, bisognerà incominciare a calcolare le riluttanze dei singoli tronchi. Quindi :

$$\text{tronco } A \qquad \mathcal{R}_A = \frac{l_A}{\mu_r \mu_0 S_A} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{1{,}256 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 212 \cdot 10^3 \ \mathrm{H}^{-1},$$

$$\text{tronco } B \qquad \mathcal{R}_B = \frac{l_B}{\mu_r \mu_0 S_B} = \frac{12 \cdot 10^{-2}}{1{,}256 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 239 \cdot 10^3 \ \mathrm{H}^{-1},$$

$$\text{tronco } C \qquad \mathcal{R}_C = \frac{l_C}{\mu_r \mu_0 S_C} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{1{,}256 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 79{,}6 \cdot 10^3 \ \mathrm{H}^{-1},$$

$$\text{tronco } D \qquad \mathcal{R}_D = \frac{l_D}{\mu_r \mu_0 S_D} = \frac{12 \cdot 10^{-2}}{1{,}256 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 191 \cdot 10^3 \ \mathrm{H}^{-1}.$$

Per il calcolo del flusso Φ è conveniente d'altronde tracciare il circuito equivalente di fig. 4.291-2, il quale interpreta la legge di Hopkin-

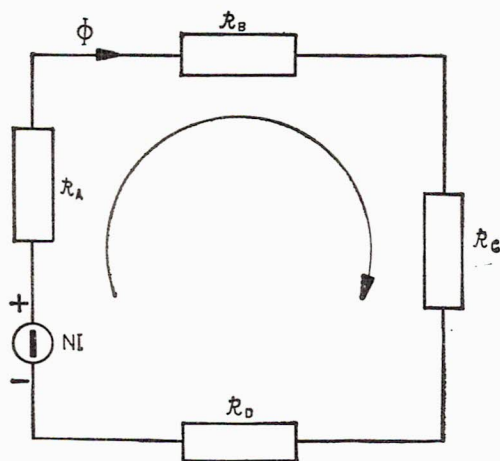



Fig. 4.291-2

son simile, nella forma, a quella di Ohm. È facile allora scrivere :

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_A + \mathcal{R}_B + \mathcal{R}_C + \mathcal{R}_D} = \frac{3000 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{(212 + 239 + 79{,}6 + 191)\, 10^3} = $$
$$= 0{,}207 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{Wb}\,.$$

Noto il valore del flusso magnetico, il valore dell' induzione nei vari tronchi si calcolerà perciò come segue:

$$\text{tronco } A \qquad B_A = \frac{\Phi}{S_A} = \frac{0{,}207 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = 0{,}690 \quad \text{Wb/m}^2\,,$$

$$\text{tronco } B \qquad B_B = \frac{\Phi}{S_B} = \frac{0{,}207 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0{,}518 \quad \text{Wb/m}^2\,,$$

$$\text{tronco } C \qquad B_C = \frac{\Phi}{S_C} = \frac{0{,}207 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}259 \quad \text{Wb/m}^2\,,$$

$$\text{tronco } D \qquad B_D = \frac{\Phi}{S_D} = \frac{0{,}207 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}414 \quad \text{Wb/m}^2\,.$$

Esercizio 4.292

Un circuito magnetico, interamente in ferro, si veda la fig. 4.292-1,

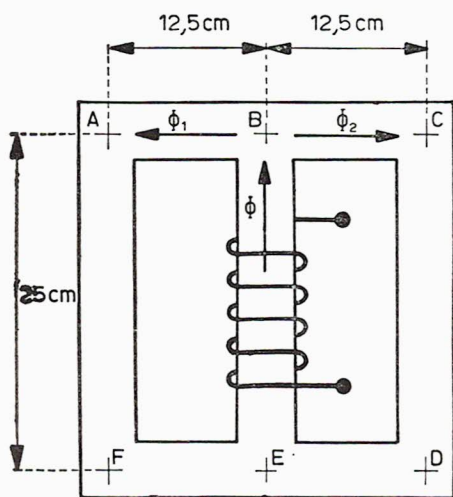
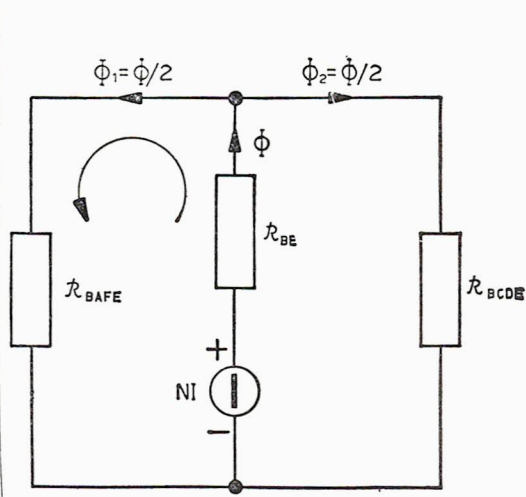



Fig. 4.292-1 *Fig. 4.292-2*

è costituito da tronchi rettilinei di sezione costante ($S = 5$ cm^2). Nell' ipotesi che siano nulli i flussi dispersi e che la permeabilità magnetica del ferro sia costante ($\mu_f = 1000\ \mu_0$), si calcoli il valore dell' induzione nella colonna centrale sulla quale agiscono 100 Asp.

Soluzione

Si incominci ad osservare che i flussi nelle due colonne laterali Φ_1 e Φ_2 sono eguali fra di loro e che essi valgono la metà del valore del flusso

Φ presente nella colonna centrale. Ciò perché la riluttanza del tronco $BAFE$ è eguale alla riluttanza del tronco $BCDE$ (i due tronchi sono infatti eguali).

Si applichi ora il secondo principio di Kirchhoff alla maglia $BAFE$ di fig. 4.292-1. Assunto un verso di percorrenza, ad esempio quello concorde con la *f.m.m.* (vedi anche circuito equivalente di fig. 4.292-2), si scriverà che:

$$NI = \Phi \mathcal{R}_{BE} + \frac{1}{2} \Phi \mathcal{R}_{BAFE} .$$

Da questa equazione è possibile così ricavare l'espressione del flusso Φ nella colonna centrale:

$$\Phi = \frac{2\, NI}{2\, \mathcal{R}_{BE} + \mathcal{R}_{BAFE}},$$

e quindi di conseguenza quello dell' induzione B cercata:

$$B = \frac{2\, NI}{2\, S\, \mathcal{R}_{BE} + S\, \mathcal{R}_{BAFE}} = \frac{2\, \mu_f NI}{2\, l_{BE} + l_{BAFE}} .$$

Con i dati del problema si ha finalmente:

$$B = \frac{2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{2}}{0{,}50 + 0{,}50} = 0{,}251 \text{ Wb/m}^2 .$$

Esercizio 4. 293

Si risolva l'esercizio precedente applicando direttamente la legge della circuitazione.

Soluzione

Si consideri nel circuito magnetico dato una linea di forza, ad esempio quella segnata in fig. 4.293-1, e per essa si scriva direttamente la legge della circuitazione, dopo aver osservato che lungo il tratto $BAFE$ il campo magnetico H_1 è costante (poiché risulta costante la sezione e il circuito magnetico è per ipotesi un tubo di flusso) e vale la metà di quello H che si ha lungo il tratto EB, ove il campo magnetico è pure costante per gli stessi motivi.

Si ha dunque (vedi fig. 4.293-1):

$$H l_{EB} + H_1 l_{BAFE} = NI .$$

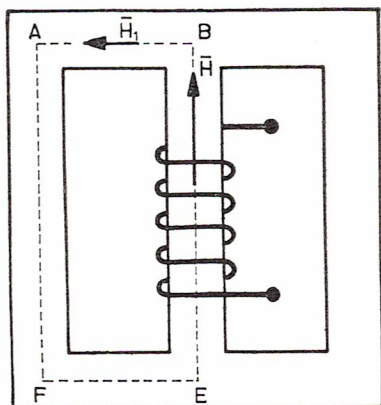



Fig. 4.293-1

Moltiplicando ora questa equazione per μ_f, e ricordando che $H_1 = \frac{1}{2} H$, si ottiene:

$$Bl_{EB} + \frac{1}{2} Bl_{BAFE} = \mu_f NI,$$

da cui finalmente si ricava che l'induzione nella colonna centrale ha la seguente espressione:

$$B = \frac{2 \mu_f NI}{2 l_{EB} + l_{BAFE}},$$

espressione del tutto eguale a quella trovata nel paragrafo precedente.

Esercizio 4.294

Un nucleo toroidale di ferro ($\mu_r = 1000$, raggio medio $r_m = 5$ cm) porta uniformemente distribuite 1000 spire percorse da una corrente continua del valore di 100 mA. Si trovi la variazione relativa che subisce l'induzione nel nucleo quando in questo venga praticato un traferro $\delta = 0{,}2$ mm.

Soluzione

Un nucleo toroidale in ferro, magnetizzato da spire aventi una distribuzione uniforme, può essere sempre considerato un tubo di flusso, per cui, in assenza del traferro, l'induzione B nel nucleo risulta espressa dalla seguente formula:

$$B = \frac{NI}{S\mathcal{R}_f} = NI \frac{\mu_f}{l_f};$$

mentre quando vi è traferro il nuovo valore B' dell' induzione vale:

$$B' = \frac{NI}{S(\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_\delta)} = \frac{NI}{\dfrac{l_f}{\mu_f} + \dfrac{\delta}{\mu_0}}.$$

La variazione relativa subìta dall' induzione $\Delta B/B$ ammonta perciò a:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B' - B}{B} = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{l_f}{\mu_f} + \dfrac{\delta}{\mu_0}} - \dfrac{\mu_f}{l_f}}{\dfrac{\mu_f}{l_f}} =$$

$$= \frac{\mu_0 l_f}{\mu_0 l_f + \mu_f \delta} - 1 = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_f}{\mu_0}\dfrac{\delta}{l_f}} - 1\,.$$

Con i dati del problema, poiché $\mu_f/\mu_0 = 1000$ ed $l_f = 2\pi r_m =$ $= 0{,}314$ metri (1), si ha finalmente che:

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{1 + 1000\,\dfrac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{0{,}314}} - 1 = -0{,}389\,,$$

cioè la variazione (diminuzione) subìta dall' induzione magnetica è stata del 38,9 %.

Come si vede il risultato è indipendente dal valore della *f.m.m.* che agisce sul nucleo. Ciò è naturalmente conseguenza dell' ipotesi che la permeabilità magnetica del materiale costituente il nucleo è costante.

Esercizio 4.295

Si trovi il valore dell'energia magnetica localizzata nel ferro e nel traferro del circuito magnetico di sezione costante ($S = 1$ cm^2) riportato in fig. 4.295-1, nell' ipotesi che la permeabilità magnetica del ferro sia costante ($\mu_f = 5000\ \mu_0$) e che siano nulli i flussi dispersi.

---

(1) A prescindere dal traferro, il quale è appunto trascurabilissimo (0,2 mm rispetto a 314 mm, cioè meno dell'1 ‰).

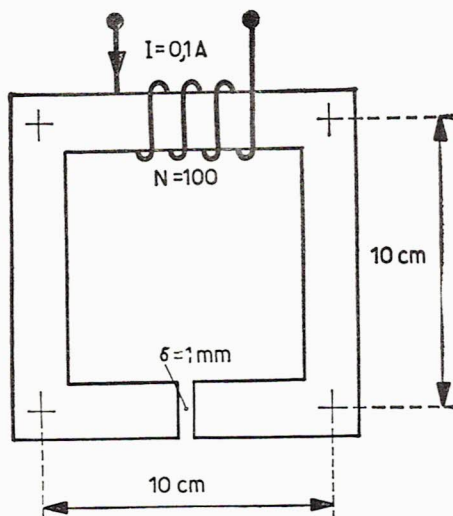



Fig. 4.295-1

Soluzione

Occorre trovare il valore assunto dall' induzione nel ferro e nel traferro, dopodiché, calcolati i relativi volumi, si potrà applicare la formula 4.24-1. D'altronde il valore dell' induzione nel ferro coincide con quello nel traferro. Questo valore si troverà ad esempio con la legge di Hopkinson, quindi :

$$B = \frac{NI}{S(\mathcal{R}_f + \mathcal{R}_\delta)} = \frac{NI}{S\left(\dfrac{l_f}{\mu_f S} + \dfrac{\delta}{\mu_0 S}\right)} = \frac{NI}{\dfrac{l_f}{\mu_f} + \dfrac{\delta}{\mu_0}} .$$

Con i dati del problema si ha :

$$B = \frac{100 \cdot 0{,}1}{\dfrac{0{,}40}{5000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}} + \dfrac{10^{-3}}{1{,}256 \cdot 10^{-6}}} = 0{,}0116 \text{ Wb/m}^2 .$$

L'energia magnetica accumulata nel ferro si calcolerà dunque tramite la formula 4.24-1 del testo, osservando però che, essendo l' induzione B e la permeabilità μ_f costanti in tutto il nucleo di ferro, si potrà scrivere :

$$W_f = \int_v dW_f = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_f} \text{ volume ferro} ,$$

e quindi analogamente per l'energia magnetica accumulata nello spazio d'aria delimitato dal traferro :

$$W_0 = \int_v dW_0 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \text{ volume traferro} .$$

Con i dati del problema si ha perciò in definitiva:

$$W_f = \frac{1}{2} \frac{134{,}5 \cdot 10^{-6}}{5000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}} 0{,}40 \cdot 10^{-4} = 0{,}43 \cdot 10^{-6} \text{ joule} ,$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{134{,}5 \cdot 10^{-6}}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 5{,}37 \cdot 10^{-6} \text{ joule} .$$

4.3 Azioni meccaniche fra campi magnetici e correnti

4.31 Forze di natura elettromagnetica

Si è già visto nel § 4.16 come fra un circuito elettrico (ad esempio un solenoide rettilineo ed un campo magnetico (dovuto per esempio ad un magnete permanente) vengano a svilupparsi delle azioni di forza. Queste si dicono *elettromagnetiche*: con tale nome verranno chiamate tutte le forze che si manifestano fra conduttori percorsi da corrente e campi magnetici, e viceversa.

Un caso assai comune è rappresentato da un conduttore rettilineo percorso da corrente d'intensità I ed immerso in un campo di induzione uniforme B. Per il calcolo della forza F che agisce su di un suo tratto lungo l (anche piccolo) si userà allora la seguente formula:

4.31-1 $$F = lBI \operatorname{sen} \alpha \text{ } (^1) ,$$

dove α è l'angolo che l'asse del conduttore forma con la direzione del vettore B (vedi fig. 4.31-1).

---

(1) La forza risulta espressa in newton se le grandezze che compaiono nella formula data sono espresse in unità del sistema Giorgi.

Si ricordi che la forza F, che sollecita il conduttore, risulta sempre *ortogonale* al piano contenente il conduttore e le linee di induzione interessanti il condutture stesso. Il verso potrà essere individuato ad esempio mediante la seguente regola, detta della mano destra: posto l'indice della mano destra nel verso della corrente che scorre nel conduttore e posto il medio secondo il verso delle linee di induzione, il pollice indicherà il verso della forza (vedi fig. 4.31-2).

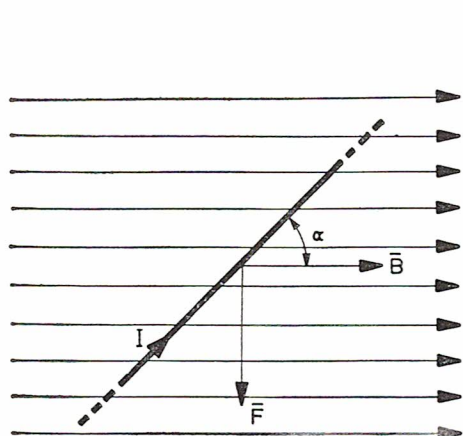



Fig. 4.31-1

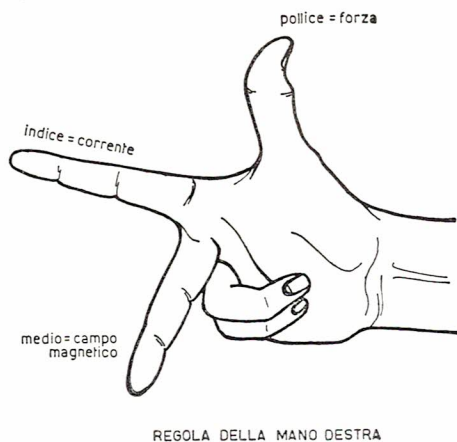



Fig. 4.31-2

Si osservi d'altronde che, se la corrente avesse intensità variabile (e magari anche il campo di induzione presentasse intensità, direzione, verso variabili), in questo caso la formula data in 4.31-1 esprimerebbe il valore istantaneo della forza che agisce sul conduttore, forza che naturalmente sarebbe anch'essa variabile.

Come applicazione della formula 4.31-1 si calcolerà ora l'espressione della coppia che sollecita una spira, avente forma rettangolare, percorsa dalla corrente I, posta in un campo magnetico H uniforme, e il cui asse di rotazione è ortogonale alle linee di forza (vedi fig. 4.31-3).

Si può incominciare coll'osservare subito che le forze F_v ($F_v = a\,BI$ sen β), che sollecitano i tronchi AB, DC (di lunghezza a) quando questi non sono paralleli alle linee di forza, non danno mai origine a coppia; questa invece è sviluppata dai tronchi AD, BC paralleli all'asse di rotazione della spira. Indicata con h la loro lunghezza e con μ la permeabilità magnetica del mezzo circostante la spira, la forza F_0 che sollecita ciascuno di questi tratti di spira vale: $F_0 = h\mu HI$; per cui, se β è l'angolo formato dal piano contenente la spira con la direzione delle linee del campo magnetico, la coppia C varrà (vedi fig. 4.31-3b):

4.31-2
$$C = F_0 a \cos\beta = \mu HIah \cos\beta.$$

Il risultato è importante poiché dimostra che la coppia agente sulla spira è, tra l'altro, proporzionale alla sua area ($a \cdot h$): ciò vale anche quando

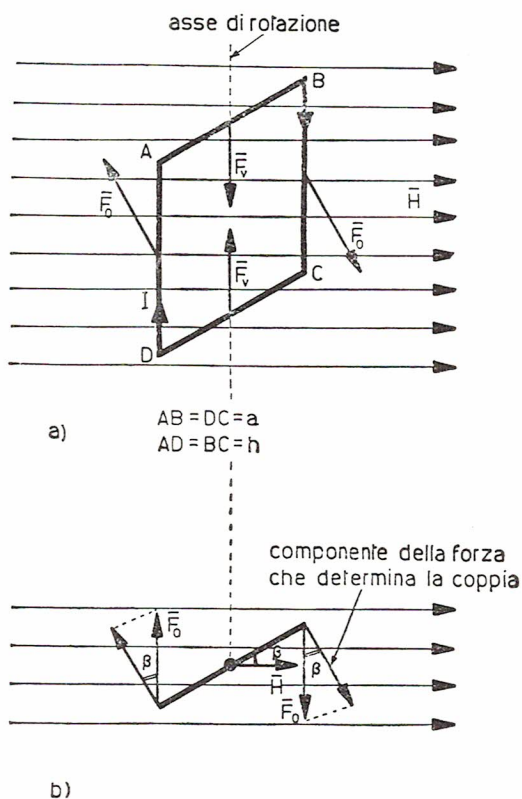



Fig. 4.31-3

la spira non ha forma rettangolare (ad esempio circolare). Inoltre si deduce che la coppia si annulla quando $\beta = 90^0$, cioè quando la spira si dispone col suo piano ortogonalmente al campo magnetico in modo che il flusso concatenato sia massimo. Questa osservazione fatta nel caso particolare di una spira è valevole in generale: si dimostrerà infatti nel § 4.34 che un qualsiasi circuito elettrico libero di muoversi o di deformarsi assume sempre quella posizione o quella forma per la quale il valore del flusso concatenato diventa massimo.

4.32 Forze di natura elettrodinamica

Si parla di forze elettrodinamiche, anziché elettromagnetiche, quando le azioni di forza avvengono fra circuiti elettrici percorsi da corrente. Lo studio di questo caso può essere impostato d'altronde in base ai risultati ottenuti nel paragrafo precedente, poiché è logico che le forze che si manifestano fra due conduttori percorsi da corrente sono dovute al campo di induzione creato dall' uno ed agente sull'altro, e viceversa.

Si supponga di avere ad esempio due conduttori rettilinei molto lun-

ghi, paralleli e distanti d, percorsi da corrente avente intensità rispettivamente I_1 e I_2, immersi in un mezzo di permeabilità magnetica μ (vedi fig. 4.32-1). Allora si calcolerà subito il valore dell' induzione B_1 per

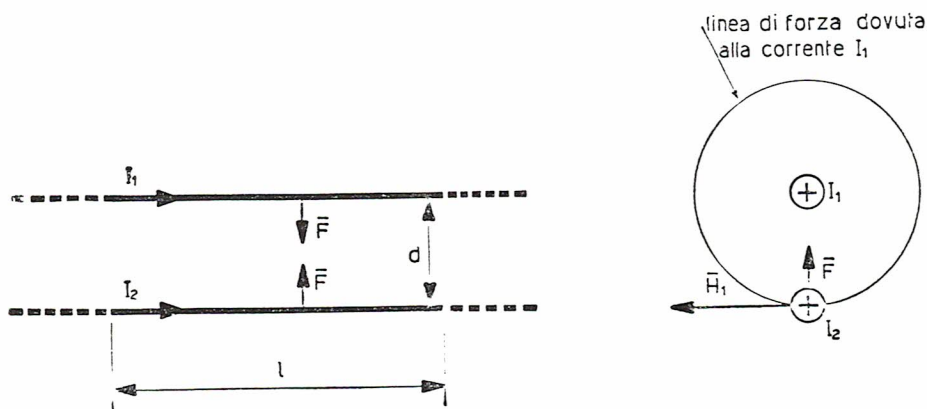



Fig. 4.32-1

effetto del primo conduttore nei punti dove si trova il secondo conduttore, per mezzo della formula 4.15-1, cioè:

4.32-1
$$B_1 = \mu \frac{I_1}{2\pi d} \cdot$$

Si osserverà quindi che il vettore $\overline{B}_1$ è normale all'asse del secondo conduttore, per cui la forza che sollecita un tratto lungo l di quest' ultimo avrà la seguente semplice espressione ($\alpha = 90^0$):

4.32-2
$$F = lB_1I_2 = \frac{\mu l}{2\pi d} I_1I_2 \text{ (}^1\text{)};$$

d'altronde detta forza risulterà giacente nel piano contenente i due conduttori e sarà ortogonale ai conduttori stessi. Il suo verso sarà tale (regola della mano destra) da determinare attrazione fra i due conduttori se le correnti in questi sono equiverse; viceversa, se le correnti saranno discordi, fra i conduttori si determinerà un'azione di repulsione.

Qualora i due conduttori rettilinei molto lunghi siano invece inizialmente incidenti fra di loro (vedi fig. 4.32-2), le forze elettrodinamiche,

---

(1) Questo è anche il valore della forza che sollecita un tratto lungo l del primo conduttore.

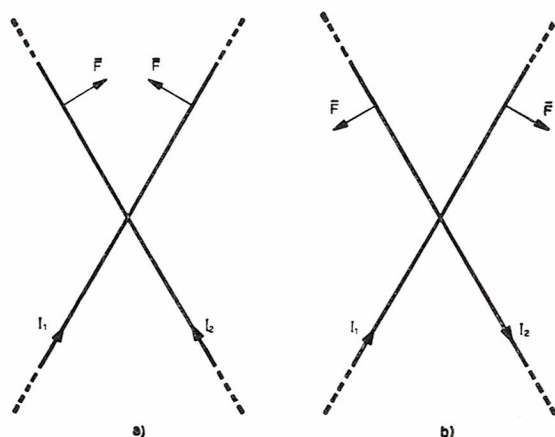



Fig. 4.32-2

che risultano ancora proporzionali al prodotto delle intensità delle due correnti I_1 e I_2, tendono, nel caso di fig. 4.32-2*a*, a chiudere i due conduttori fino a portarli coincidenti; mentre nel caso di fig. 4.32-2*b* esse viceversa tendono ad aprirli fino a portarli in posizione ortogonale fra di loro.

Nel caso di due spire o di due bobine affacciate (vedi fig. 4.32-3), le forze elettrodinamiche, che sono ancora proporzionali al prodotto delle correnti ivi circolanti, risultano attrattive o repulsive secondo che le correnti circolino nello stesso verso o in versi contrari.

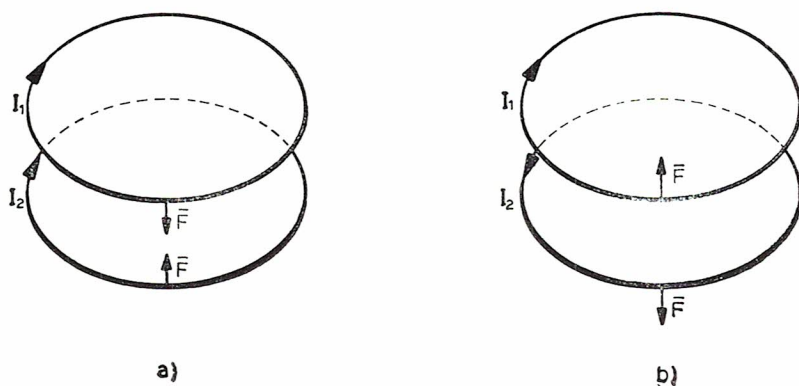



Fig. 4.32-3.

4.33 Forza su di un elettrone in moto

Un elettrone che si muova in un campo magnetico subisce un'azione di forza da parte di quest' ultimo. Ciò è logico se si considera che un elettrone in movimento dà luogo ad una piccolissima corrente i, la quale esiste però solamente là dove l'elettrone si sta muovendo.

Indicate dunque con u e con q_e rispettivamente la velocità e la carica possedute dall'elettrone e con dl il tratto infinitesimo di traiettoria percorso nel tempo dt dall'elettrone stesso ($dl = u\,dt$), la corrente i associabile al tratto di traiettoria dl sarà data dalla seguente espressione [1]:

4.33-1
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q_e}{\frac{dl}{u}} = \frac{uq_e}{dl}.$$

Sull'elettrone agirà perciò la forza che si manifesterebbe su di un tratto di circuito lungo dl percorso da una corrente avente l' intensità i sopra ricavata. Si ha dunque:

4.33-2
$$F = dlB_0 i \operatorname{sen} \alpha = uq_e B_0 \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(forza di Lorentz)},$$

essendo B_0 il valore dell' induzione ove l'elettrone si muove [2] ed α l'angolo formato dalla traiettoria con le linee di induzione (vedi fig. 4.33-1).

La forza F risulterà, per quanto è stato esposto nel § 4.31, perpendicolare alla traiettoria (velocità u) ed alle linee di induzione. Il verso si troverà ad esempio con la regola della mano destra ricordando però

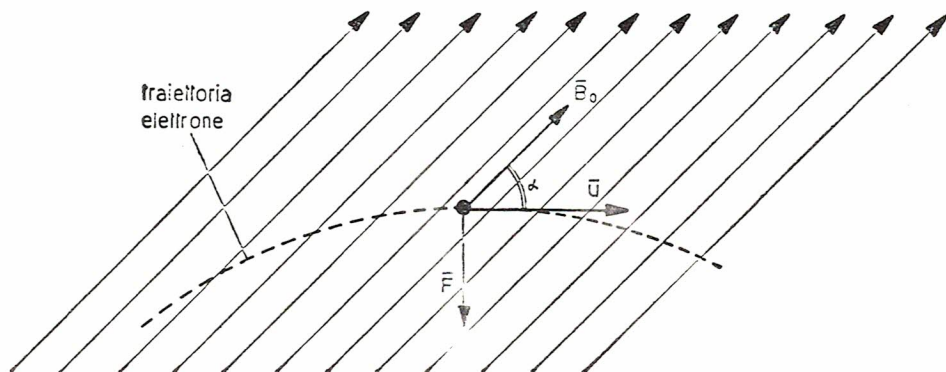



Fig. 4.33-1

che il senso in cui si deve mettere il dito indice è opposto al verso della velocità u posseduta dall'elettrone (questo perché l'elettrone è una carica negativa che dà quindi luogo ad una corrente convenzionale il cui verso è contrario al moto dell'elettrone stesso).

---

(1) Vedi anche esercizio 1.93 riportato nel capitolo 1.
(2) Di solito il mezzo in cui esso si muove è il vuoto spinto.

L'espressione della forza trovata in 4.33-2 consente in particolare di osservare che:

1) se l'elettrone entra in un campo magnetico con velocità u ini-

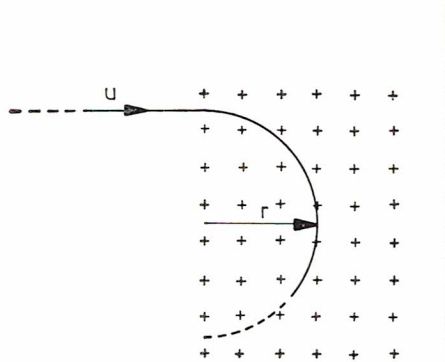
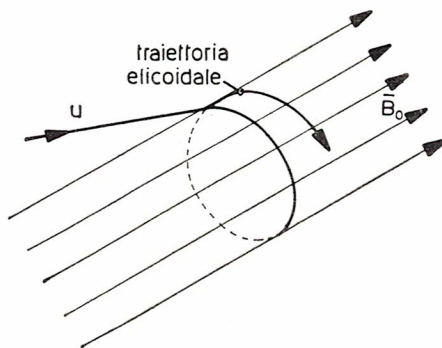



Fig. 4.33-2 *Fig. 4.33-3*

zialmente parallela alle linee del campo, esso non subisce alcuna azione di forza ($\alpha = 0$, sen $\alpha = 0$);

2) se la velocità u dell'elettrone è inizialmente ortogonale alle linee di induzione magnetica, esso verrà a descrivere successivamente una traiettoria circolare ([3]) contenuta nel piano ortogonale alle linee di forza (vedi fig. 4.33-2) e di raggio:

4.33-3 $$r = \frac{u m_e}{B_0 q_e};$$

3) se la velocità u inizialmente posseduta dall'elettrone invece è obliqua rispetto alle linee di induzione, esso verrà a percorrere una traiettoria elicoidale (vedi fig. 4.33-3).

4.34 Energia di un circuito elettrico immerso in un campo magnetico

Un circuito elettrico qualsiasi, percorso da corrente e posto in un campo magnetico, subisce, come si è visto, delle azioni di forza. È chiaro che, per questo fatto, se ad esempio il circuito è impossibilitato a muoversi, esso verrà a possedere una ben determinata energia potenziale la quale, non appena il circuito si potrà muovere, si trasformerà tutta o in parte, a seconda dell'entità del movimento, in altra energia (meccanica).

Si darà qui, senza dimostrazione, la formula dell'energia potenziale W posseduta da un circuito percorso da corrente avente intensità I, e tale

---

([3]) La traiettoria risulta circolare perchè viene descritta sotto l'azione di una forza centripeta costante ($u\ q_e\ B_0$). A questa forza fa equilibrio naturalmente la forza centrifuga ($m_e\ u^2/r$). Si può dunque scrivere così che: $u\ q_e\ B_0 = m_e\ u^2/r$.

da presentare un certo ammontare di flusso concatenato $\Phi_c(B)$ (1). Risulta dunque che:

4.34-1 $$W = -I\Phi_c(B) \ (^2).$$

Naturalmente, se il circuito dovesse muoversi in modo da determinare una variazione $\Delta\Phi_c(B)$ del flusso concatenato, allora l'energia potenziale varierà della seguente quantità:

4.34-2 $$\Delta W = -I\Delta\Phi_c(B) = -I[\Phi_{c_2}(B) - \Phi_{c_1}(B)],$$

essendo $\Phi_{c_1}(B)$ e $\Phi_{c_2}(B)$ rispettivamente il flusso concatenato prima e dopo la variazione.

La formula sopra riportata è assai comoda, poiché permette ad esempio di calcolare, tramite il lavoro meccanico, le forze o le coppie che certi dispositivi elettrici sono in grado di fornire (vedi esercizio 4.371).

Dalla 4.34-1 si deduce inoltre che, quando un circuito elettrico è libero di muoversi (o di deformarsi) entro un campo magnetico, esso viene a disporsi alla fine in modo tale da rendere massimo il suo flusso concatenato, poiché solamente in questo caso risulta minima la sua energia potenziale. Infatti si sa che un sistema fisico tende a portarsi in quella condizione in cui la sua energia potenziale è minima.

Resta così spiegato con considerazioni del tutto generali quanto fu affermato alla fine del § 4.31. Per questo motivo una spira percorsa

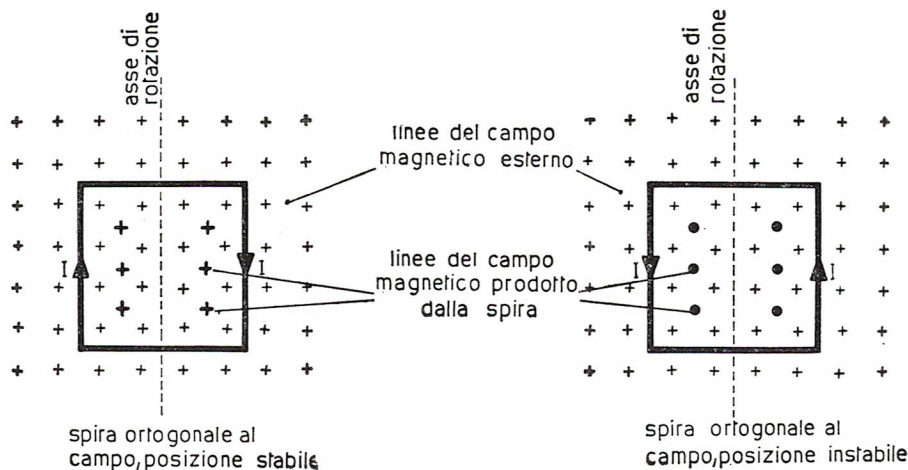



Fig. 4.34-1

---

(1) Col simbolo Φ_c verrà indicato nel testo il flusso concatenato.

(2) Energia espressa in joule se corrente e flusso concatenato vengono espressi rispettivamente in ampere e weber.

da corrente e libera di ruotare si disporrà col suo piano sempre ortogonalmente al campo magnetico e in modo tale che il campo prodotto dalla corrente circolante nella spira sia equiverso a quello esterno: solo in questo modo il flusso concatenato con la spira risulta massimo (vedi fig. 4.34-1), e quindi minima l'energia potenziale.

4.35 Forza portante di un elettromagnete

Gli elettromagneti sono dispositivi di largo impiego nella tecnica odierna (comandi, controlli automatici, ecc.). Essi constano, si veda la fig. 4.35-1, di un nucleo ferromagnetico, costituito da una parte fissa e da una mobile (àncora), e di uno o più avvolgimenti posti sulla parte fissa. Questi avvolgimenti, a forma di bobina, sono detti di *eccitazione*.

Quando negli avvolgimenti di eccitazione circola una corrente di sufficiente intensità l'àncora viene attratta, perché si magnetizza per induzione, e in tale posizione vi rimane finché la forza che l'àncora ha dovuto vincere non supererà un certo valore. Questo valore (forza portante dell'elettromagnete), così come quello di attrazione ad àncora distaccata, sono calcolabili con la seguente formula (che dà la forza sviluppata per ogni polo, vedi fig. 4.35-1):

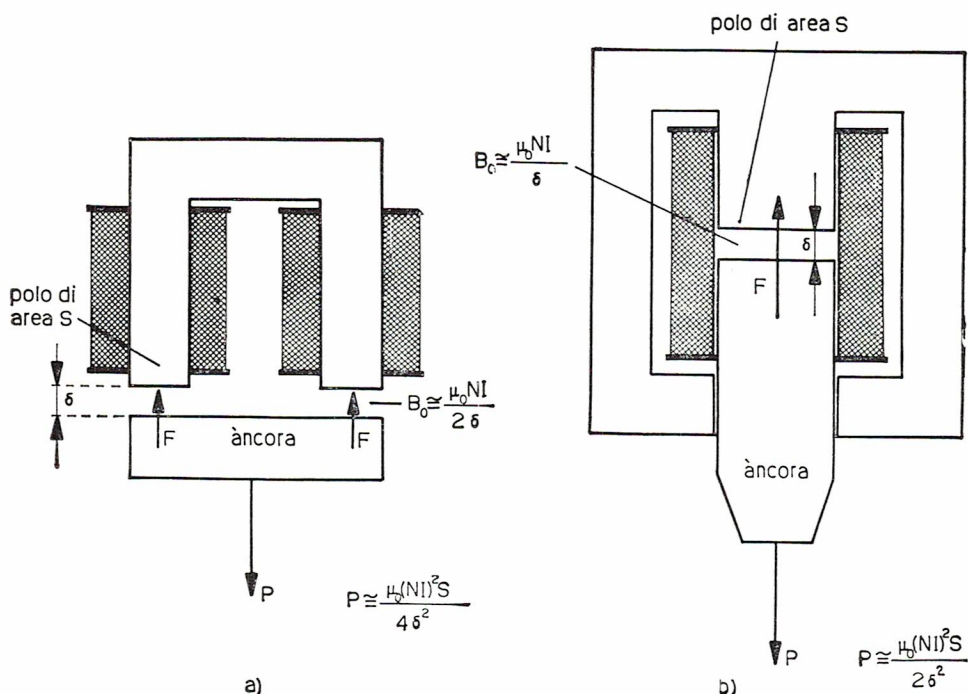



Fig. 4.35-1

4.35-1 $$F = \frac{B^2 S}{2\,\mu_0}\ (^1),$$

dove B ed S rappresentano rispettivamente il valore dell' induzione magnetica e della superficie per polo. Nel caso dell'elettromagnete riportato in fig. 4.35-1*a* l'effettiva forza attrattiva e portante dell'àncora è quindi doppia di quella espressa dalla formula 4.35-1 (infatti i poli sono due).

Si osservi d'altronde che, per la natura stessa del dispositivo caratterizzato dall'avere un organo mobile (àncora), il quale introduce quindi inevitabilmente nel circuito magnetico dell'elettromagnete un traferro (o più traferri) variabile, la forza di attrazione ad àncora staccata sarà di valore notevolmente inferiore a quella ad àncora attaccata (forza portante). Infatti a parità di corrente di eccitazione, ad esempio un raddoppio del traferro, determinando un dimezzamento dell' induzione [2], fa sì che la forza attrattiva si riduca ad un quarto. Si noti appunto che la forza F è proporzionale al quadrato dell' induzione B.

4.36 Strumenti magnetoelettrici ed elettrodinamici

Le azioni meccaniche dei campi magnetici sui circuiti elettrici trovano larga applicazione nella tecnica : oltre alla estesissima gamma dei motori elettrici (circa il principio di funzionamento dei motori elettrici per corrente continua si dirà nel § 4.45), anche la maggior parte degli strumenti di misura, di alcuni dei quali si parlerà in questo paragrafo, fondano il loro principio di funzionamento sulle azioni elettromagnetiche od elettrodinamiche delle correnti.

Si incomincerà dagli strumenti magnetoelettrici [1], nei quali si sfruttano le azioni elettromagnetiche fra un campo magnetico costante ed una bobina percorsa da corrente. Questi strumenti sono perciò essenzialmente formati (vedi fig. 4.36-1*a*) da un magnete permanente, a forma di ferro di cavallo o ad U, e da una bobina costituita da un certo numero di spire di sottile filo di rame avvolte su di un leggero telaio d'alluminio, munito di perni. La bobina può ruotare così attorno al proprio asse. Detta bobina è posta fra le espansioni polari del magnete permanente, le quali sono di ferro dolce e le cui superfici affacciate sono state foggiate a forma cilindrica al fine di determinare, assieme ad un nucleo di ferro dolce anche esso cilindrico posto all' interno della bobina, un traferro in cui per ampio sviluppo il campo magnetico abbia intensità costante ed andamento

---

(1) La forza risulta espressa in newton se le altre grandezze che compaiono nella formula data vengono espresse secondo le unità del sistema Giorgi.

(2) La riluttanza del circuito magnetico è dovuta praticamente al traferro : raddoppiando, triplicando .... il traferro, raddoppia, triplica .... la riluttanza del circuito.

(1) Correntemente ma impropriamente indicati col nome di strumenti a bobina mobile.

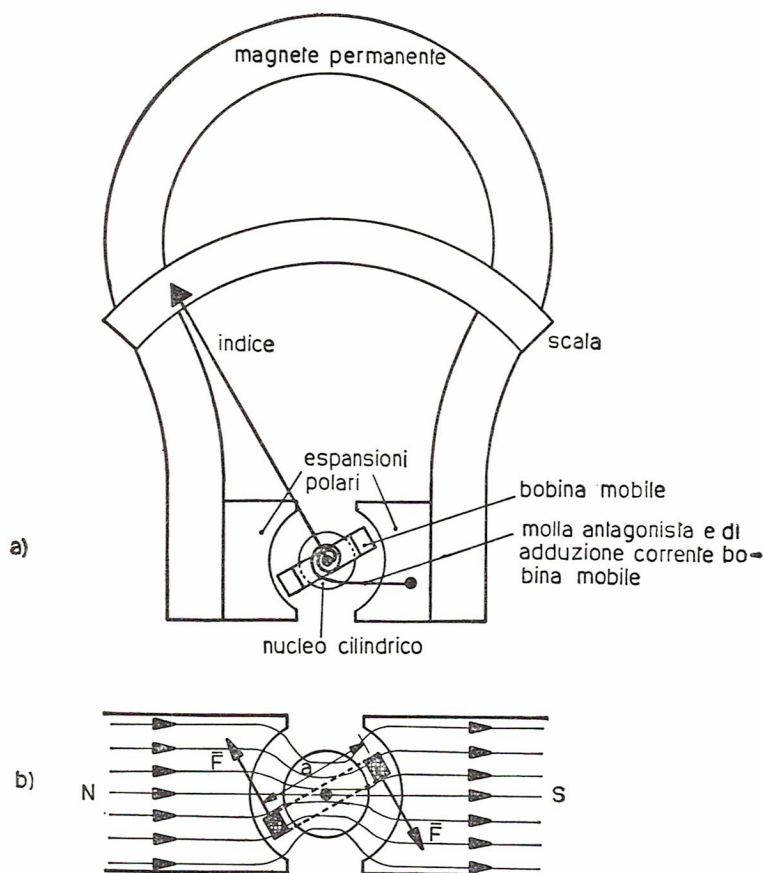



Fig. 4.36-1

radiale (vedi fig. 4.36-1*b*). Lo strumento è completato dalle molle di adduzione della corrente alla bobina, le quali servono nello stesso tempo come molle antagoniste, e naturalmente da un indice rigidamente collegato alla bobina mobile, affacciato ad un quadrante graduato (scala).

Il funzionamento dello strumento è il seguente. In assenza di corrente la bobina mobile occupa quella posizione determinata dalla condizione per cui le molle antagoniste non risultano in tensione (molle scariche). Quando nei conduttori della bobina mobile passa una corrente di intensità I, su questi vengono ad agire delle forze di natura elettromagnetica, forze che determinano la rotazione della bobina, poiché questa è vincolata a girare attorno ai suoi perni. Dato che il campo di induzione nel traferro è costante e radiale, per la particolare costruzione impiegata, i conduttori ortogonali alle linee di induzione (quelli cioé paralleli all'asse della bobina mobile) saranno sollecitati da forze che sono indipendenti dalla posizione della bobina ma solamente dipendenti dall' intensità della corrente.

Indicato con B il valore dell' induzione nel traferro, la coppia C agente sulla bobina, di area S ($S = a \cdot h$) e costituita da N spire, ammonterà, per quanto è stato visto nel § 4.31, a :

4.36-1 $$C = Fa = NhBIa = NBSI \, .$$

D'altronde la bobina, ruotando, farà entrare in tensione le molle le quali reagiranno con una coppia resistente C_r proporzionale all' angolo α di rotazione dell'equipaggio mobile. Si potrà scrivere perciò :

4.36-2 $$C_r = k\alpha \ ,$$

essendo k la costante di proporzionalità dipendente dalle caratteristiche delle molle.

È chiaro che la bobina (e quindi l' indice ad essa unito) cesserà di ruotare quando la coppia elettromagnetica non sarà più in grado di vincere la coppia resistente delle molle. L' indice si fermerà perciò quando avrà assunto la posizione angolare tale per cui $C_r = C$; quindi :

4.36-3 $$\alpha = \frac{NBS}{k} I \, .$$

Negli strumenti magnetoelettrici la deviazione dell' indice è dunque proporzionale alla corrente che vi scorre. Gli strumenti magnetoelettrici sono pertanto strumenti *sensibili alle correnti.* Con essi si costruiscono gli ampermetri per corrente continua dalle portate più basse (microampere) a quelle più alte (chiloampere), usando gli shunt. Naturalmente con opportuni resistori addizionali si potrà trasformare lo strumento di corrente in un misuratore di tensione (voltmetro per corrente continua). In questo caso lo strumento misurerà ancora una corrente che però sarà proporzionale alla tensione applicatavi, come voluto.

Usando la sospensione a filo, anziché a perni, e l' indice luminoso, lo strumento a bobina mobile può raggiungere elevatissime sensibilità. Esso viene allora denominato *galvanometro* ; con tale strumento è possibile infatti apprezzare correnti dell'ordine delle frazioni di nanoampere, e anche meno.

Gli strumenti elettrodinamici sono costituiti invece da due bobine, una fissa ed una mobile (vedi fig. 4.36-2), quest'ultima del tutto simile alla bobina mobile degli strumenti magnetoelettrici. La bobina fissa sostituisce il magnete permanente degli strumenti magnetoelettrici. Naturalmente quando la bobina fissa viene percorsa da corrente, il campo magnetico di questa investe la bobina mobile, la quale, se percorsa a sua volta da corrente, sarà soggetta ad una coppia di natura elettrodinamica.

Proporzionando d'altronde in modo particolare le due bobine, fissa

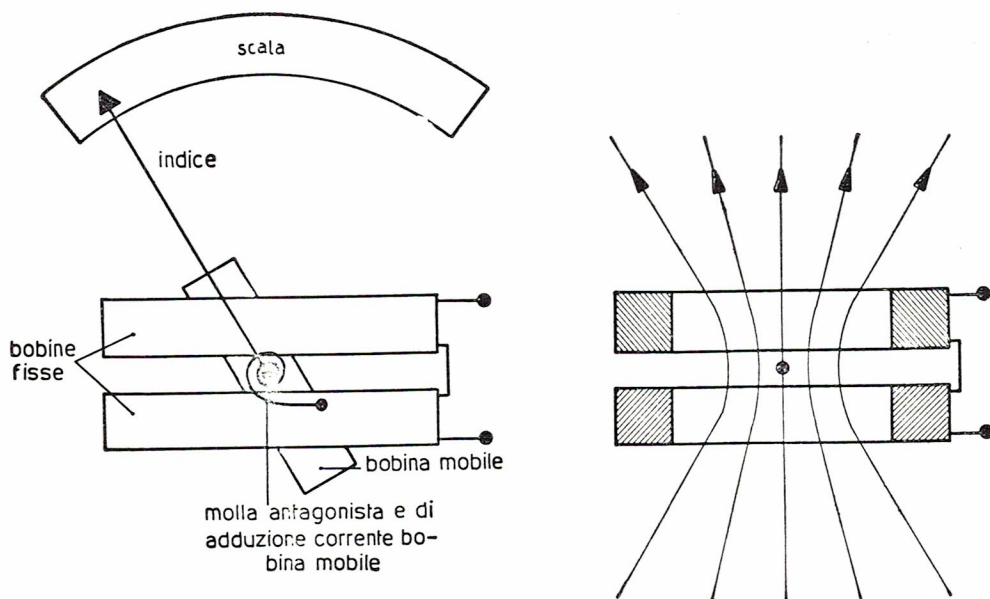



Fig. 4.36-2

e mobile, è possibile far sì che i conduttori di quest'ultima bobina, quelli paralleli al suo asse, taglino il campo magnetico in una zona in cui esso è uniforme, di intensità costante e con andamento radiale. In questo caso la coppia motrice C, che viene ad agire sulla bobina mobile quando questa è percorsa dalla corrente I_m, mentre la bobina fissa è percorsa dalla corrente I_f, risulta indipendente dalla posizione della bobina mobile e proporzionale al prodotto dei valori delle due correnti I_m, I_f (²), cioè:

4.36-4 $$C = k_1 I_m I_f \ ,$$

essendo k_1 una costante dipendente dalle caratteristiche delle due bobine.

Sotto l'azione di questa coppia la bobina mobile ruoterà fintantoché non le farà equilibrio la coppia resistente sviluppata dalle molle. Allo equilibrio si avrà dunque, come al solito, che $C_r = C$ (l'espressione di C_r è sempre la stessa data in 4.36-2) per cui la posizione dell' indice, rigidamente collegato alla bobina mobile, assumerà la posizione angolare α tale da soddisfare la seguente condizione:

4.36-5 $$\alpha = \frac{k_1}{k} I_m I_f \ .$$

(²) Nel § 4.32 si è visto come le forze elettrodinamiche siano sempre proporzionali al prodotto delle intensità delle correnti circolanti nei circuiti.

L' indicazione dello strumento risulta quindi proporzionale al prodotto dei valori delle correnti che scorrono nelle due bobine : anche gli strumenti elettrodinamici sono perciò strumenti *sensibili alle correnti.*

Ora, mettendo in parallelo le due bobine, mobile e fissa, gli strumenti elettrodinamici funzionano da ampermetri (vedi fig. 4.36-3*a*),

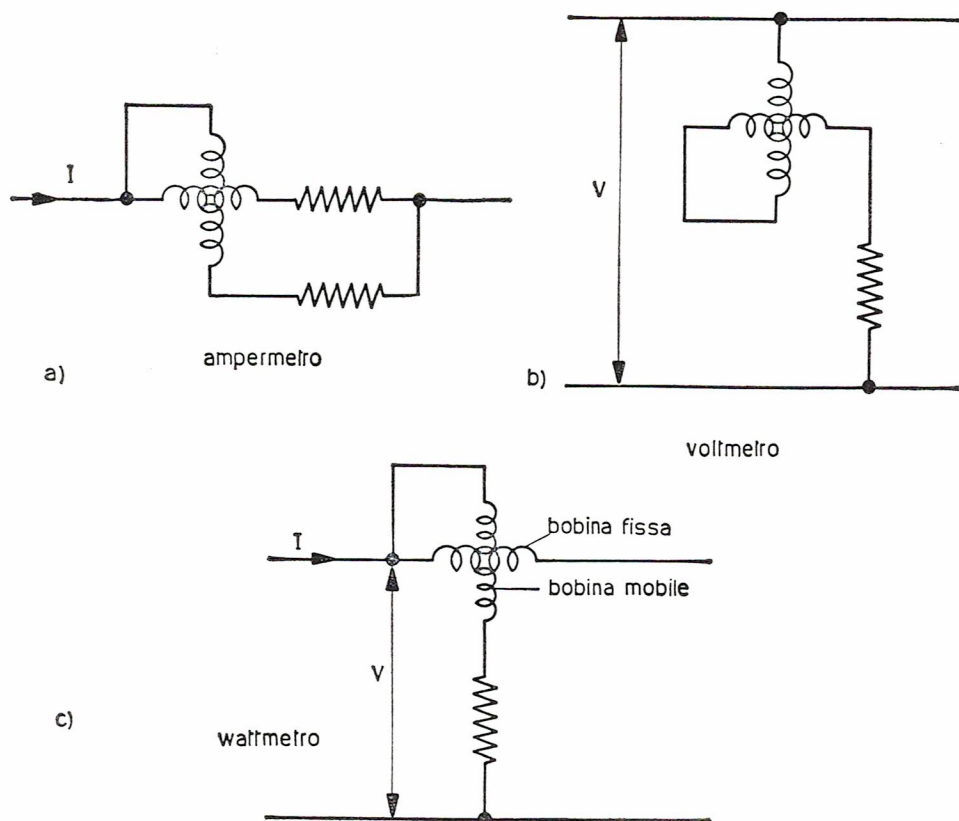



Fig. 4.36-3

con le due bobine in serie e con resistori addizionali funzionano come voltmetri (vedi fig. 4.36-3*b*) ; mentre con la bobina fissa attraversata dalla corrente che scorre in un circuito e con quella mobile attraversata da una corrente proporzionale alla tensione agente nel circuito stesso, come è stato indicato in fig. 4.36-3*c*, questi strumenti si comportano invece come wattmetri.

Con sospensione a filo ed indice luminoso lo strumento viene denominato elettrodinamometro : esso costituisce un apparecchio di misura di laboratorio assai più sensibile dei comuni strumenti elettrodinamici, però dall' impiego particolare quale misuratore di piccole correnti variabili (alternate) e rivelatore di zero (con una delle due bobine eccitata in maniera particolare).

4.37 Problemi di applicazione al § 4.3

Esercizio 4.371

Una bobina è costituita da 20 spire avvolte strettamente su di un telaio rettangolare di 6 × 10 cm ed è imperniata in modo tale da poter ruotare attorno al proprio asse verticale (vedi fig. 4.371-1).

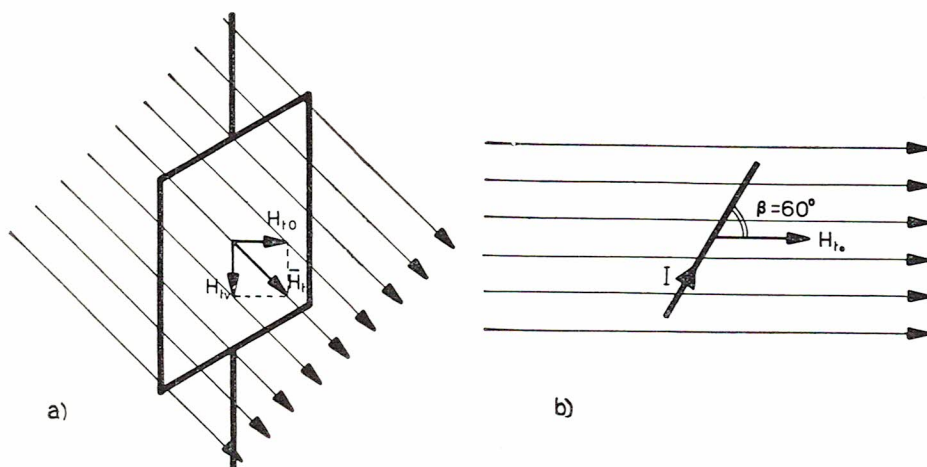



Fig. 4.371-1

Si trovi: *a*) il valore della coppia che agisce su di essa per effetto della componente orizzontale del campo magnetico terrestre ($H_{to} = 18$ Asp/m) quando la bobina è percorsa da una corrente continua di 50 mA e il piano che la contiene forma un angolo di 60° con la direzione del campo; *b*) un'espressione assai più semplice per la formula della coppia.

Soluzione

a) La coppia che agisce su di una bobina di N spire è N volte più intensa della coppia agente su di una spira sola. Poiché d'altronde la bobina è immersa nell'aria, la coppia C varrà (formula 4.31-2 del testo):

$$C = N\mu_0 H_{to} I a h \cos\beta = 20 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 =$$

$$= 67{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ newton} \cdot \text{metro} .$$

b) Ad un'espressione analitica assai più semplice della coppia motrice agente sulla bobina si può arrivare osservando che il termine $N\mu_0 H_{to} a h$,

che compare nella formula usata precedentemente, rappresenta il flusso magnetico massimo Φ_{cM} che si può concatenare con la bobina, cioè quando questa si dispone col suo piano ortogonale alle linee di forza.

Pertanto si potrà scrivere assai semplicemente che:

$$C = I\Phi_{cM} \cos\beta \ .$$

N.B. A tale formula si può arrivare anche per altra via, precisamente applicando i risultati del § 4.34. Infatti la bobina, in quanto percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico, possiede l'energia $W = - I\Phi_c$. L'espressione d'altronde di tale energia, in funzione del flusso concatenato massimo Φ_{cM}, assume la forma (a parte il segno):

$$W = I\Phi_{cM} \operatorname{sen} \beta \ .$$

Supponendo ora di lasciare ruotare la bobina dell'angolo infinitesimo $d\beta$, la coppia C agente sulla bobina compirà il lavoro $Cd\beta$ il quale avverrà naturalmente a spese dell'energia W posseduta dalla bobina. Sarà perciò, indicando con dW la diminuzione di tale energia:

$$Cd\beta = dW$$

e quindi:

$$C = \frac{dW}{d\beta} = I\, \Phi_{cM} \frac{d}{d\beta} \operatorname{sen}\beta \ .$$

Ricordando dall'Analisi matematica che $\frac{d}{d\beta} \operatorname{sen}\beta = \cos\beta$, si ha finalmente:

$$C = I\Phi_{cM} \cos\beta \ .$$

Esercizio 4.372

Due semianelli di rame, collegati elettricamente fra di loro mediante un conduttore flessibile, sono inizialmente accostati (vedi fig. 4.372-1). Che cosa succederà quando la spira sarà percorsa da corrente?

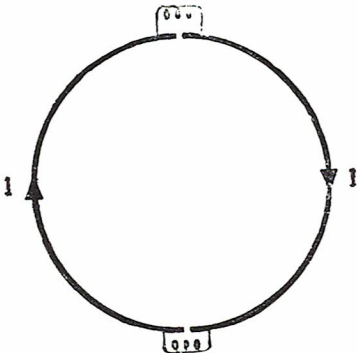



Fig. 4.372-1

Soluzione

Le azioni elettrodinamiche che si sviluppano fra le due parti del circuito sono tali da far allontanare i due semianelli, poiché il campo magnetico generato da un semianello agisce sull'altro con forze repulsive e viceversa.

A tale conclusione si può pervenire in altro modo, ad esempio osservando che il sistema elettrico costituito dai due semianelli tende ad assumere geometricamente quella configurazione per la quale è massimo il suo flusso concatenato, ossia è massima l'energia elettromagnetica accumulata nel mezzo che circonda il circuito.

Esercizio 4.373

Una spira avente forma circolare ($r = 10$ cm), costituita con un filo di rame, è immersa in un campo di induzione uniforme ($B = 0{,}1$ Wb/m^2) ortogonale al piano contenente la spira.

Si trovi la pressione a cui è sottoposto il filo e la tensione meccanica che sollecita il conduttore quando questo è percorso da una corrente dell' intensità di 20 A, il cui verso è quello riportato in fig. 4.373-1.

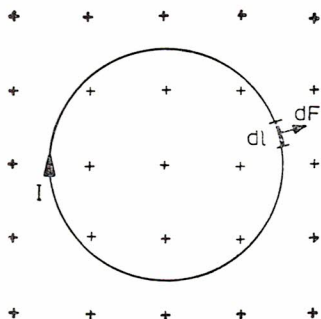
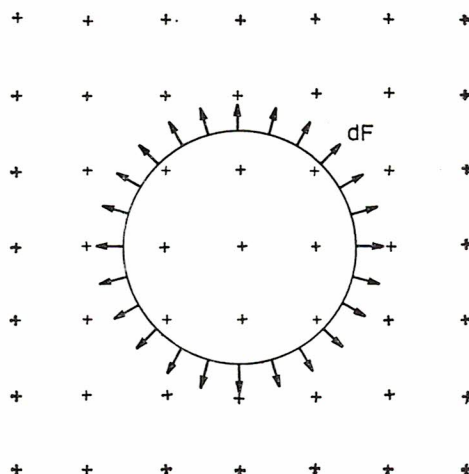



Fig. 4.373-1 *Fig. 4.373-2*

Soluzione

Si consideri un tratto infinitesimo dl della spira: su tale tratto agirà una forza, pure infinitesima, dF, calcolabile mediante la formula 4.31-1 del testo, ove sen $\alpha = 1$. Sarà perciò:

$$dF = BIdl\,.$$

D'altronde, qualunque sia la posizione del tratto infinitesimo dl lungo la spira, la relativa forza risulterà sempre contenuta nel piano della spira e presenterà verso *centrifugo* (vedi fig. 4.373-2).

Si può perciò affermare che il rapporto dF/dl rappresenta certamente la pressione p di natura elettromagnetica che si viene ad esercitare sul conduttore. Con i dati del problema essa vale:

$$p = \frac{dF}{dl} = BI = 0{,}1 \cdot 20 = 2 \text{ newton/metro.}$$

Per trovare la tensione meccanica (trazione) che sollecita il materiale costituente la spira si dovrà invece ragionare in quest'altro modo.

Si supponga di tagliare idealmente la spira in due punti diametralmente opposti (vedi fig. 4.373-3). Ora, ciascuna mezza spira non si staccherà dall'altra sotto l'azione centrifuga della pressione solo se nelle due sezioni di taglio si considereranno agenti delle forze F tali da equilibrare la risultante della pressione che agisce su ciascuna mezza spira.

D'altra parte la forza risultante P, dovuta alla pressione agente sul semianello (vedi fig. 4.373-3), vale l' intensità della pressione p per la proiezione del semianello sulla retta passante per le due sezioni di taglio, cioè sul diametro AB. Quindi sarà $P = p \cdot 2\,r$. Pertanto l'equilibrio si ha solo se:

$$2\,F = P\,,$$

da cui si ricava:

$$F = \frac{P}{2} = pr = 2 \cdot 0{,}10 = 0{,}2 \text{ newton}\,.$$

La sollecitazione a trazione del filo è dunque di 0,2 newton, pari a $0{,}2 \cdot 0{,}102 = 0{,}0204$ kg, cioè 20,4 grammi.

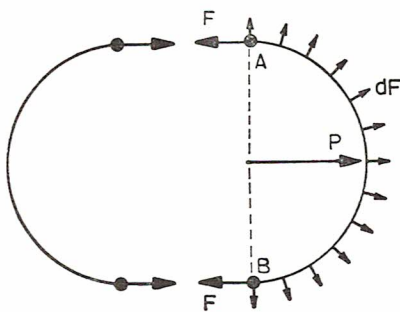
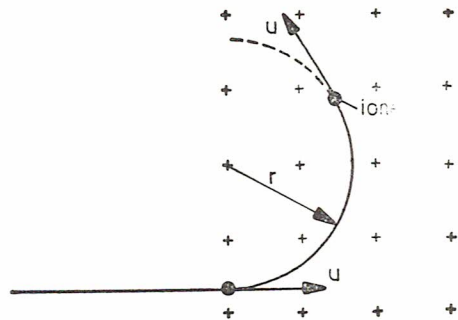



Fig. 4.373-3 *Fig. 4.374-1*

Esercizio 4.374

Uno ione bivalente positivo, la cui massa m ammonta a $66 \cdot 10^{-27}$ kg, entra in un campo di induzione uniforme ($B_0 = 0{,}1$ Wb/m²) normalmente

alle sue linee di forza. Si trovi il tempo che esso impiegherebbe a percorrere un giro completo della traiettoria circolare. Il moto avviene nel vuoto assoluto.

Soluzione

Sia u la velocità con la quale lo ione entra nel campo magnetico (vedi fig. 4.374-1). Poiché questa velocità u viene conservata [1] (il vettore $\bar{u}$ risulta tangente alla traiettoria), si ha che fra tale velocità u, la velocità angolare ω con la quale lo ione descrive la traiettoria circolare e il raggio r di quest'ultima esiste la ben nota relazione:

$$u = \omega r\,.$$

D'altronde la velocità angolare ω è uniforme, per cui si può scrivere anche che:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}\,,$$

essendo T il tempo necessario per compiere un giro completo.

È così ora possibile calcolare questo tempo T, poiché, per quanto sopra riportato, risulta immediatamente che:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\pi\,\frac{r}{u}\,;$$

mentre dalla formula 4.33-3 data nel testo $\left(r = \dfrac{u\,m}{B_0 q}\right)$ [2] si ricava che:

$$\frac{r}{u} = \frac{m}{B_0 q}\,.$$

In definitiva si ottiene:

$$T = \frac{2\pi m}{B_0 q} = \frac{6{,}28 \cdot 66 \cdot 10^{-27}}{0{,}1 \cdot 2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}} \cong 13\ \mu\text{sec}\,.$$

Esercizio 4.375

Si calcoli la forza, espressa in grammi, che si sviluppa su ciascuna delle due superfici affacciate delimitanti l'interferro del circuito magnetico studiato nell'esercizio 4.295 del § 4.2.

---

(1) Lo ione si muove nel vuoto assoluto.

(2) Nel testo, la formula 4.33-3 è relativa al moto di un elettrone. Questa formula però, naturalmente, è valida in generale, cioè per il moto di una qualsiasi carica purché al posto di m_e e di q_e si ponga rispettivamente la massa m e la quantità di elettricità q della carica in moto.

Soluzione

Le forze che sollecitano le estremità del circuito magnetico (poli magnetici) sono attrattive. La risultante F per ciascun polo potrà essere calcolata con la formula 4.35-1 riportata nel testo. Perciò si avrà:

$$F_{newton} = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{0{,}0116^2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 5{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ newton},$$

per cui, ricordando che 1 newton $= \frac{1}{9{,}81}$ kg $= 0{,}102$ kg, si ottiene immediatamente che:

$$F_{kg} = 0{,}102 \cdot 5{,}37 \cdot 10^{-3} = 0{,}547 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

La forza con la quale i due poli si attraggono è quindi di 0,547 grammi, intensità assai modesta dovuta al valore assai piccolo dell' induzione magnetica nel traferro $\left(\cong \frac{1}{100} \text{ Wb/m}^2\right)$.

4.4 Induzione elettromagnetica

4.41 Fenomeno dell' induzione elettromagnetica

Interessanti fenomeni elettrici ed energetici nei circuiti si hanno quando i flussi concatenati con questi sono variabili nel tempo [1]; ora un flusso magnetico concatenato con un circuito elettrico subisce variazione quando varia o l'intensità del campo magnetico che dà luogo al flusso concatenato o il numero di linee costituenti il flusso concatenato stesso o anche naturalmente quando si verificano contemporaneamente le due condizioni qui ricordate.

Per fare riferimento ad un caso concreto, si consideri, immerso nel campo magnetico prodotto da un solenoide in aria, un circuito elettrico costituito da una sola spira (vedi fig. 4.41-1). Se dunque il solenoide è alimentato con corrente di intensità non costante (vedi fig. 4.41-1*a*) il campo magnetico da esso prodotto sarà anch'esso non costante: pertanto il flusso che si concatenerà con la spira sarà variabile. Più precisamente il flusso concatenato varierà nel tempo con la stessa legge con la quale varia nel tempo la corrente: ciò perché in un punto qualsiasi,

---

[1] Per il significato di flusso concatenato si veda quanto riportato nel § 4.110. Più precisamente le linee di induzione che si concatenano col circuito possono essere dovute al circuito stesso (autoinduzione) o ad altri circuiti (mutua induzione) oppure a campi magnetici generati da magneti.

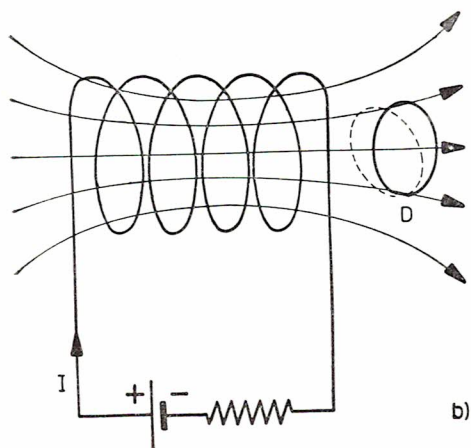
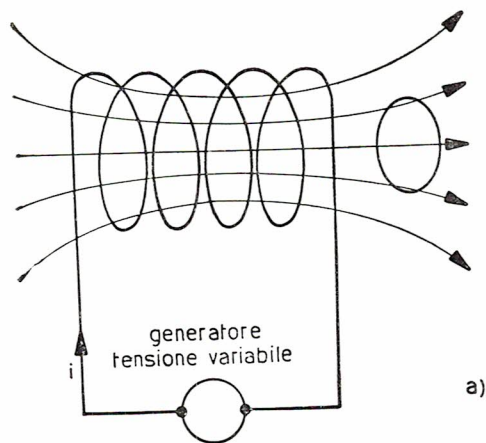



Fig. 4.41-1

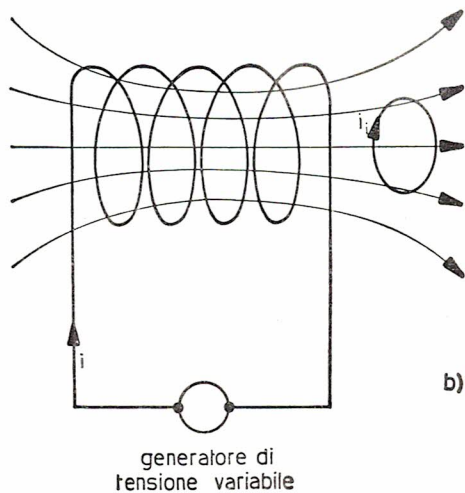
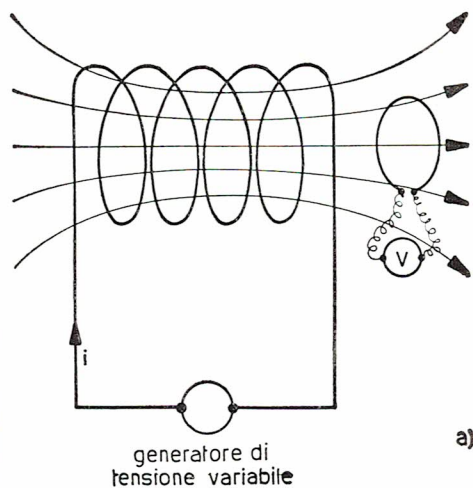



Fig. 4.41-2

posto in un mezzo dia o paramagnetico che circonda un circuito, fra il valore dell' induzione prodotta in quel punto e la corrente che la ha determinata esiste sempre una legge di rigorosa proporzionalità ([2]).

Se invece il campo magnetico prodotto dal solenoide è costante nel tempo, poiché la corrente che vi scorre è rigorosamente continua, il flusso concatenato con la spira può variare ancora nel tempo solo se la spira si muove o si deforma in modo tale da modificare l'entità del flusso concatenato. Si veda la fig. 4.41-1*b*, ove la spira mobile si muove

---

([2]) Basterà ricordare le formule 4.15-1, 2, 3, 4, ... che esprimono il campo magnetico generato da una corrente elettrica.

attorno al punto fisso *D*. In quest'ultimo caso si verifica dunque la seconda condizione affinché si possa manifestare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica.

Ora, la Fisica insegna come, tutte le volte che in un circuito elettrico il flusso magnetico concatenato varia, e ciò per un motivo qualsiasi, in esso nasce sempre una *f.e.m.* detta *indotta* : questo è appunto il fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Precisamente, se il circuito indotto [3] risulta aperto (vedi fig. 4.41-2*a*), tale *f.e.m.* apparirà come *d.d.p.* ai suoi estremi, se invece il circuito è chiuso (fig. 4.41-2*b*), tale *f.e.m.* si comporterà nel circuito come vi agisce la *d.d.p.* di un generatore : per questo motivo nel circuito circolerà una corrente *indotta*.

In questo secondo caso è chiaro che, a causa del fenomeno di induzione, il circuito indotto viene a disporre di un certo ammontare di energia elettrica. Si può intravvedere subito pertanto la grande importanza di tale fatto ai fini della produzione dell'energia elettrica o del suo trasferimento da un circuito all'altro. La maggioranza del macchinario elettrico infatti basa il suo modo di funzionare appunto sul fenomeno dell' induzione elettromagnetica.

4.42 Legge generale dell' induzione elettromagnetica

Il fenomeno dell' induzione elettromagnetica si manifesta in un circuito con una *f.e.m.* tutte le volte che varia, per una causa qualsiasi, il suo flusso concatenato. Naturalmente più veloce avverrà questa variazione più intenso sarà il fenomeno dell' induzione elettromagnetica, cioè più grande sarà il valore raggiunto dalla *f.e.m.* indotta. D'altra parte la *f.e.m.* indotta sarà anch'essa generalmente variabile nel tempo. Si consideri ad esempio ancora il caso visto in fig. 4.41-1*b*, ove una spira, immersa in un campo magnetico costante, ad un certo momento varia la sua posizione : la *f.e.m.* indotta, nulla fino all' inizio del movimento, raggiungerà ad un certo istante il suo massimo valore per poi ritornare di nuovo nulla non appena la spira si sarà fermata. In questo caso la *f.e.m.* indotta ha dunque variato continuamente di valore durante l' intervallo di tempo in cui la spira si è mossa. Ci si chiede ora : è possibile esprimere a mezzo di una formula il valore istantaneo delle *f.e.m.* indotte ?

La risposta è affermativa, poiché il fenomeno dell' induzione elettromagnetica è retto da una legge ben precisa. Infatti, indicata con $d\Phi_c$ la variazione infinitesima del flusso concatenato, avvenuta nello intervallo di tempo dt pure esso infinitesimo, la *f.e.m.* indotta v_i risulta allora, istante per istante, eguale al rapporto, cambiato di segno, fra la variazione del flusso concatenato e il tempo in cui essa è avvenuta, cioè :

4.42-1 $$v_i = -\frac{d\Phi_c}{dt}.$$

---

[3] Si dice indotto quel circuito che subisce il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, cioè che è sede di *f.e.m.* indotte ; mentre si dà il nome di inducente al circuito che determina il fenomeno.

Qualora invece la variazione del flusso concatenato non venga considerata in un tempo infinitesimo, ma in un intervallo di tempo qualsiasi $t_2 - t_1$ (t_1 e t_2 sono i valori assunti dal tempo all' inizio e alla fine dell' intervallo considerato), per cui la relativa variazione del flusso concatenato risulti anch'essa di valore finito ed eguale a $\Phi_{c_2} - \Phi_{c_1}$ (Φ_{c_1} e Φ_{c_2} sono i valori assunti dal flusso concatenato rispettivamente negli istanti di tempo t_1 e t_2), allora il rapporto, cambiato di segno, fra la variazione del flusso concatenato e il tempo in cui essa è avvenuta esprime della *f.e.m.* indotta precisamente il suo valore medio V_{im} entro l' intervallo di tempo considerato. Si potrà perciò scrivere:

4.42-2
$$V_{im} = -\frac{\Phi_{c_2} - \Phi_{c_1}}{t_2 - t_1}.$$

Quanto espresso dalle formule 4.42-1 e 2 rappresenta la legge generale dell' induzione elettromagnetica. Mentre la discussione sul significato del segno meno, che appare in tali formule, viene rimandata al prossimo paragrafo, in questo si cercherà di far vedere come ci si possa avvalere della legge qui trovata per la ricerca grafica dei valori, e quindi dell'andamento, delle *f.e.m.* indotte.

Si supponga di avere un circuito il cui flusso concatenato passi da un valore massimo Φ_{c_1}, inizialmente costante, ad un valore Φ_{c_2} più piccolo, pure costante, secondo l'andamento riportato nel diagramma di fig. 4.42-1*a*. Come si potrà trovare l'andamento nel tempo della *f.e.m.* indotta nel circuito?

A tale scopo si incominci a dividere l' intervallo di tempo $t_1 \div t_2$, in cui avviene la variazione del flusso, in tanti intervalli di tempo Δt sufficientemente piccoli (ad esempio in fig. 4.42-1 si sono presi dieci intervalli uguali). Incominciando quindi dal primo intervallo di tempo, cioè $t' - t_1$, si calcolerà la relativa variazione di flusso concatenato $\Delta\Phi_c$, cioè la differenza $\Phi'_c - \Phi_{c_1}$; allora il rapporto:

4.42-3
$$-\frac{\Phi'_c - \Phi_{c_1}}{t' - t_1}$$

fornirà il valore medio V_{im} della *f.e.m.* indotta nell' intervallo di tempo considerato. Tale valore verrà riportato (punto A) in una certa scala, come è stato fatto nel grafico di fig. 4.42-1*b*. Procedendo nello stesso modo per i successivi intervalli di tempo si verrà a disporre di un sufficiente numero di valori e quindi di punti per tracciare l'andamento della *f.e.m.* indotta, come appare appunto in fig. 4.42-1*b*. Naturalmente più saranno piccoli gli intervalli di tempo scelti, più numerosi saranno i punti ottenuti e quindi più precisa risulterà la curva della *f.e.m.* indotta tracciata con questo metodo [1] [2].

---

[1] È conveniente che gli intervalli di tempo Δt siano presi più piccoli là dove il flusso varia con maggiore rapidità.

[2] A dire il vero, la curva che esprime l'andamento della *f.e.m.* indotta è la curva

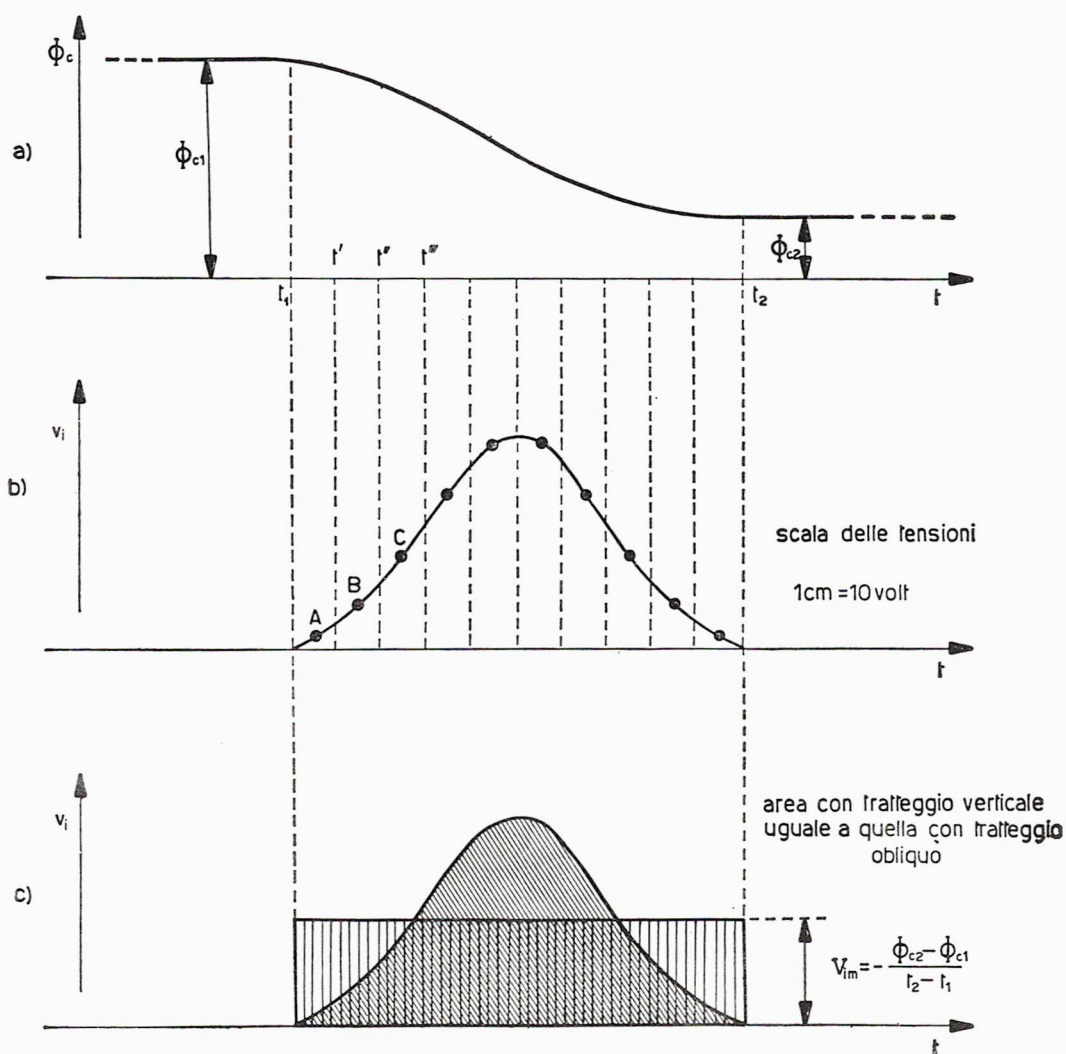



Fig. 4.42-1

Si noti che la curva ora ottenuta presenta nell' intero intervallo di tempo $t_1 \div t_2$ un valore medio V_{im}, la cui entità è analiticamente calcolabile con la formula 4.42-2, mentre graficamente esso è individuato

---

derivata (con segno cambiato) della curva del flusso concatenato, poiché analiticamente tale *f.e.m.* è data dalla derivata rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso concatenato. Di conseguenza, in ciascun punto della curva rappresentante quest' ultimo, la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla tangente con l'orizzontale esprime appunto il valore della tensione indotta, cambiata di segno (vedi fig. 4.42-2).

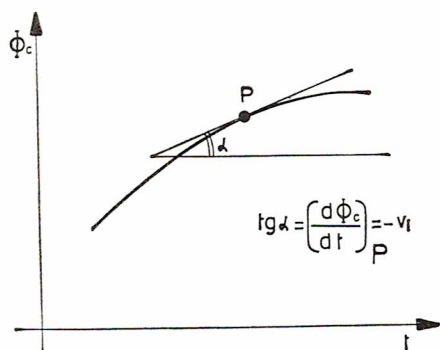



Fig. 4.42-2

dall'ordinata di quel segmento che, col segmento rappresentante l'intervallo di tempo considerato, determina un rettangolo di area uguale a quella sottesa dalla curva data (vedi fig. 4.42-1*c* il cui grafico è lo stesso di quello di fig. 4.42-1*b*).

D'altronde la formula 4.42-2, come del resto le considerazioni grafiche ora fatte sul valor medio, indicano chiaramente che, a parità di variazione di flusso disponibile, per elevare il valore medio della *f.e.m.* indotta è necessario restringere l'intervallo di tempo in cui avviene la variazione. Si possono produrre così veri e propri guizzi di tensione.

Si osservi da ultimo come, in base alle formule esprimenti in un qualsiasi modo la legge dell'induzione elettromagnetica, *dimensionalmente* la tensione (indotta) risulta dal rapporto fra un flusso magnetico ed un tempo per cui di conseguenza il flusso magnetico risulta *dimensionalmente* come prodotto di una tensione per un tempo ($d\Phi_c = - v_i \, dt$). Sarà perciò : weber = volt·secondo [3] ; nel sistema Giorgi si avrà quindi la seguente corrispondenza :

4.42-4 $$1 \text{ weber} = 1 \text{ volt} \cdot 1 \text{ secondo} .$$

Si dimostra ora così agevolmente quanto fu accennato alla fine del § 4.110 di questo capitolo a proposito dell'unità di misura dei flussi magnetici, cioè del weber, la cui definizione risulta legata dunque per la 4.42-4 a grandezze già note.

4.43 Legge di Lenz

È necessario discutere la ragione di quel segno meno che compare nella formula che interpreta la legge generale dell'induzione elettroma-

---

[3] Il prodotto del valore medio V_{im} della tensione indotta per l'intervallo di tempo relativo viene talvolta denominato *impulso della tensione indotta*. Esso verrà misurato in volt·secondo e sarà eguale alla variazione del flusso concatenato, misurato in weber, che ha determinato la *f.e.m.* indotta.

gnetica. A tale scopo si consideri un circuito chiuso, ad esempio una spira concatenata col flusso magnetico di un solenoide. Se il flusso magnetico di quest'ultimo varia, nel circuito indotto (spira) circolerà una corrente che a sua volta genererà un campo magnetico (campo indotto). Questo verrà ad agire su quello iniziale (campo inducente). Quale sarà la sua azione ? Concorde o discorde ?

Si dimostra che la sua azione è sempre discorde. A questa conclusione generale si arriva con considerazioni energetiche : infatti, poiché, per mezzo del fenomeno dell' induzione elettromagnetica, è possibile sviluppare nel circuito indotto dell'energia elettrica tramite la corrente indotta, è chiaro che l'effetto di quest'ultima sarà tale da ostacolare per reazione questo sviluppo energetico, cioè quindi dovrà essere tale da ostacolare le variazioni del flusso magnetico induttore. Se dunque il flusso magnetico induttore sta crescendo, il campo magnetico indotto sarà tale da opporsi a questo aumento e quindi la sua azione tenderà a farlo diminuire (vedi fig. 4.43-1*a*) ; mentre se il flusso magnetico induttore sta calando, il campo magnetico indotto sarà tale da opporsi a questa diminuzione e quindi la sua azione tenderà a farlo crescere (vedi fig. 4.43-1*b*). Dopo quanto è stato esposto, sarà così facile assegnare il verso alle *f.e.m.* indotte agenti in un circuito, poiché esse tendono a farvi

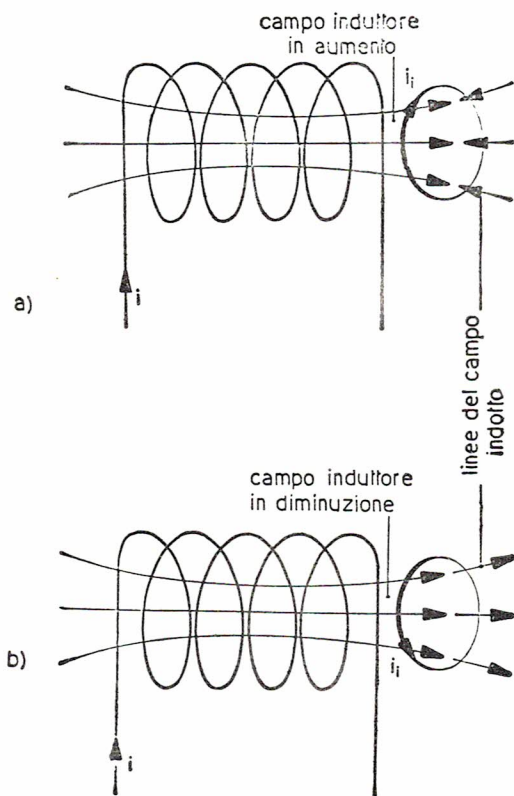



Fig. 4.43-1

circolare delle correnti i cui effetti magnetici devono soddisfare quanto precisato sopra.

Si osservi d'altra parte che la determinazione del segno da attribuire alle *f.e.m.* indotte può essere impostata ricordando la seguente regola generale: in un circuito si debbono considerare positive quelle *f.e.m.* che, da sole, danno luogo a correnti circolanti in quel verso secondo il quale si deve far girare una vite destrorsa perché essa avanzi nel verso del flusso magnetico induttore (vedi fig. 4.43-2). Si può anche dire, in

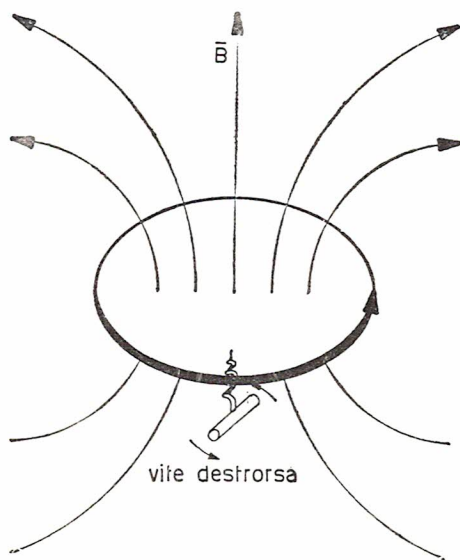



Fig. 4.43-2

altre parole, che è positiva quella *f.e.m.* indotta la cui corrente dà luogo ad un campo magnetico il cui verso risulta concorde con quello del campo inducente; viceversa la *f.e.m.* indotta risulterà negativa quando il relativo campo magnetico sarà discorde col campo inducente.

Dopo quanto è stato esposto si può affermare dunque, poiché il verso della corrente indotta, e quindi quello della relativa *f.e.m.* indotta, è sempre tale da opporsi alla variazione di flusso magnetico induttore, che le *f.e.m.* indotte sono negative quando il flusso concatenato sta crescendo e positive quando sta calando. Questo fatto esige perciò che nella formula esprimente la legge generale dell'induzione (dovuta sostanzialmente al Faraday) compaia il segno meno (dovuto a Lenz).

4.44 F.e.m. indotte nei conduttori in movimento

Tutte le volte che un conduttore si muove in un campo magnetico, in modo tale da tagliarne le linee di induzione, esso diventa sede di una *f.e.m.* indotta.

La dimostrazione verrà condotta per semplicità nel caso particolare di un conduttore rettilineo, lungo l, muoventesi parallelamente a se stesso e perpendicolarmente ad un campo di induzione B uniforme, con velocità costante u ortogonale alle linee del campo stesso. Ai fini della dimostrazione, come si comprenderà tra breve, è perfettamente lecito considerare il conduttore, anziché isolato (vedi fig. 4.44-1*a*), facente

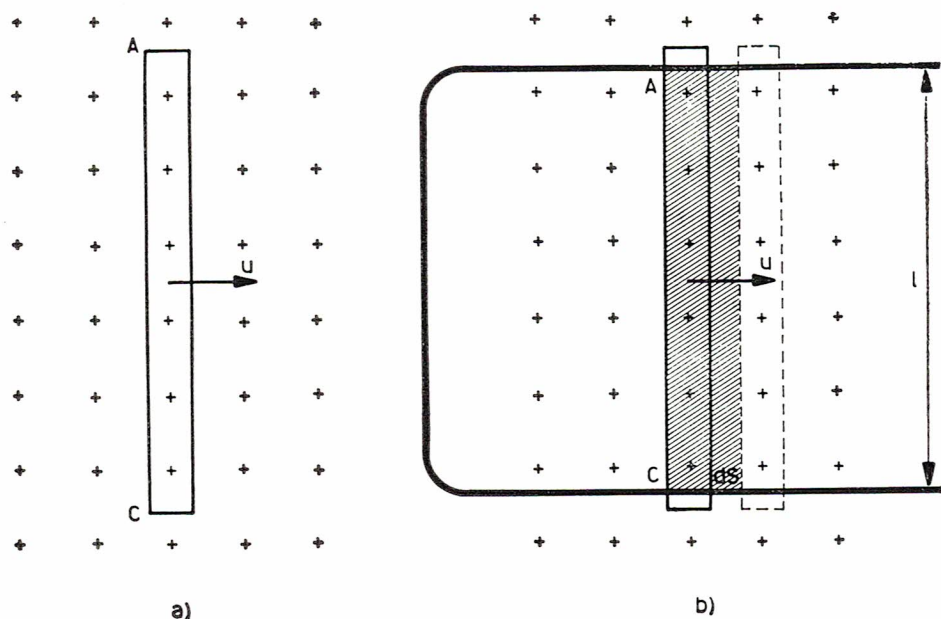



Fig. 4.44-1

parte invece di un circuito immobile di cui solamente detto conduttore costituisce la parte mobile (vedi fig. 4.44-1*b*).

Si indichi con $d\Phi_c$ la variazione che ha subito il flusso concatenato col circuito nell' intervallo di tempo dt. Questa variazione di flusso concatenato ovviamente si è avuta perché il circuito ha modificato la sua forma: infatti, nel caso specifico di fig. 4.44-1*b*, esso ha aumentato nell' intervallo di tempo dt la sua area S della seguente quantità (infinitesima):

4.44-1 $$dS = ludt \ ,$$

poiché il conduttore mobile nel tempo dt ha percorso lo spazio udt. In definitiva la variazione del flusso concatenato risulta:

4.44-2 $$d\Phi_c = BdS = Bludt \ ,$$

per cui, applicando la formula 4.42-1, si deduce immediatamente che la *f.e.m.* indotta nel circuito vale:

4.44-3 $$v_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -Blu\ (^1).$$

Resta da dimostrare che questa *f.e.m.* viene effettivamente ad indursi solamente nel tratto mobile del circuito, cioè lungo il conduttore *AC* che taglia le linee del campo. A tale scopo si osservi come l'espressione della *f.e.m.* indotta trovata (formula 4.44-3) sia indipendente dalle caratteristiche del circuito di partenza, ma solamente dipendente dalle caratteristiche del conduttore in moto. La *f.e.m.* in parola non ha cioè bisogno di un circuito chiuso per indursi nel conduttore: basta che questo sia in movimento e che, effettivamente, tagli delle linee di forza, poiché solamente in questo caso si può associare al conduttore una variazione di flusso concatenato.

Esiste però anche una spiegazione fisica assai semplice e convincente del fenomeno. Si osservi infatti che su tutti gli elettroni di conduzione contenuti entro il conduttore, elettroni anch'essi come il conduttore in movimento di traslazione ortogonale alle linee di induzione, viene ad agire quella forza (forza di Lorentz) di cui si è fatto cenno nel § 4.33 e la cui intensità risulta proporzionale alla velocità u stessa. Sotto la azione di questa forza, ciascun elettrone libero di conduzione tenderà a spostarsi (vedi fig. 4.44-2), alterando quella distribuzione elettronica

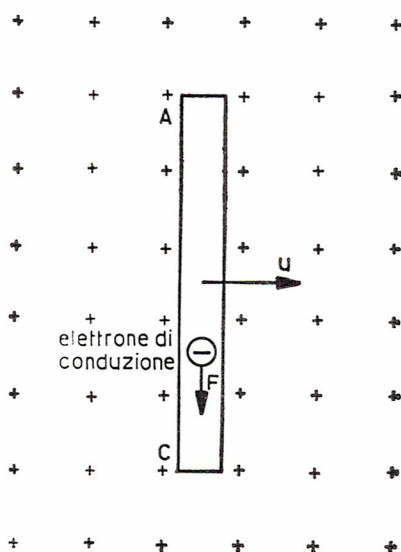



Fig. 4.44-2

---

(1) Nel caso in cui l'asse del conduttore formi l'angolo α (diverso da 90°) con la velocità u di spostamento (conduttore obliquo), allora è facile verificare che la *f.e.m.* indotta vale $v_i = -B\,l\,u\ \text{sen}\alpha$.

per la quale il conduttore prima del movimento si manifestava all'esterno equipotenziale. In definitiva si verrà ad avere un addensamento di elettroni all'estremità C del conduttore e quindi una rarefazione di elettroni all'altra estremità. L'estremo C si mostrerà perciò carico negativamente mentre l'altro lo sarà positivamente: fra questi si dovrà pertanto manifestare una *d.d.p.*, che è appunto la *f.e.m.* indotta.

Ragionando in tal modo sarà anche facile stabilire quale risulterà il verso della *f.e.m.* indotta. Volendo invece disporre di una regola mnemonica, si farà ricorso ad esempio alla regola della mano sinistra: posto il pollice nel senso del movimento e il medio nel senso del campo magnetico, allora l'indice fornirà il verso della *f.e.m.*, o, anche, della corrente che detta *f.e.m.* farebbe scorrere qualora il conduttore risultasse chiuso su di un circuito esterno.

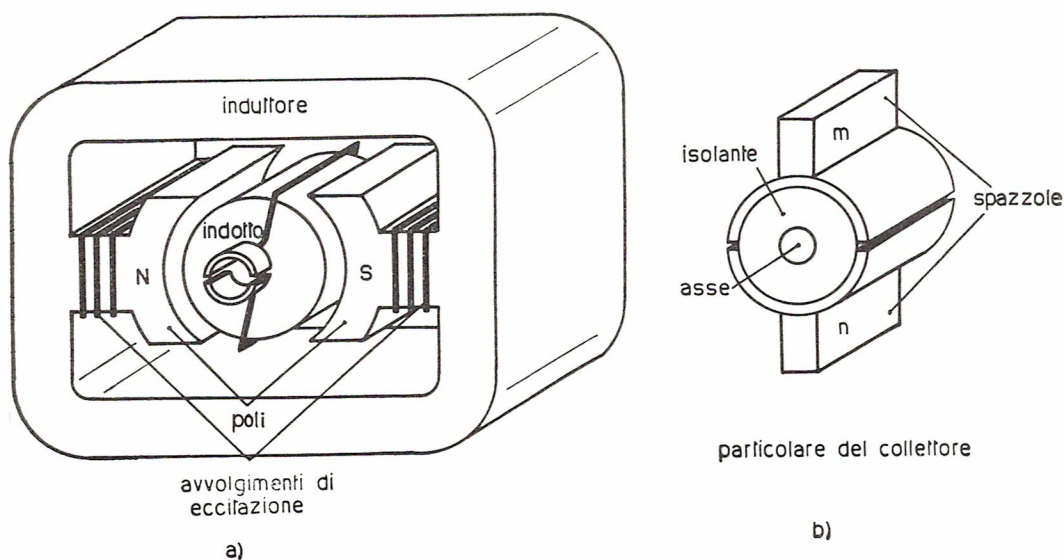



Fig. 4.45-1

4.45 Principio di funzionamento dei generatori e dei motori elettrici

Si inizi col considerare un circuito ferromagnetico foggiato come è stato riportato in fig. 4.45-1*a*, cioè costituito da una parte fissa (induttore), contenente gli avvolgimenti per la creazione di un campo magnetico costante (poli magnetici), e da una parte cilindrica, mobile attorno ad un asse di rotazione (indotto), tale da determinare con quella fissa un ampio sviluppo di traferro costante, in cui l'induzione generata dagli avvolgimenti sia quindi abbastanza uniforme e ad andamento radiale

(vedi fig. 4.45-2a). L' indotto porta d'altronde, come minimo, due scanalature diametralmente opposte in ciascuna delle quali trova posto un certo numero di conduttori. Questi, nel caso di figura, sono stati ridotti, per semplicità, ad uno soltanto. D'altra parte i due estremi posteriori di tali conduttori risultano collegati tra di loro, mentre quelli anteriori

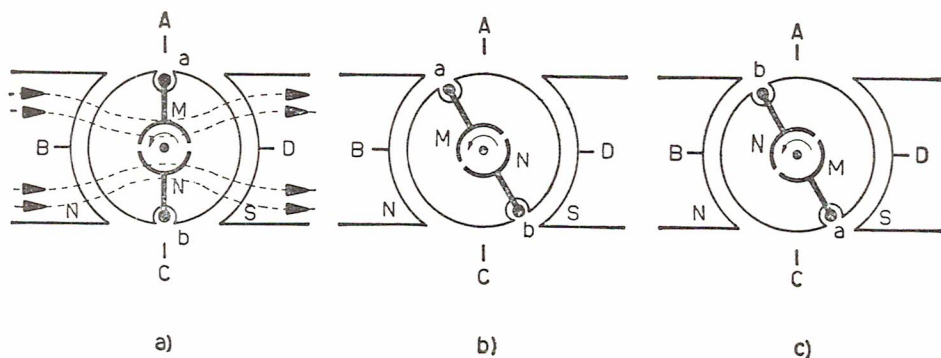



Fig. 4.45-2

terminano a due lamelle di rame, isolate fra di loro e dall'asse dell' indotto, costituenti nel loro insieme un corpo cilindrico (collettore), sul quale poggiano due spazzole conduttrici m ed n (vedi fig. 4.45-1b).

È necessario esaminare, come prima cosa, quale sarà l'andamento dell' intensità dell' induzione lungo lo sviluppo periferico dell' indotto: a tale proposito si può osservare che l' induzione rimane pressoché di valore costante sotto i poli, mentre al di fuori di questi essa risulta pressoché nulla. Si veda la fig. 4.45-3, ove è stato riportato l'andamento dell' induzione lungo l' interferro, considerato sviluppato su di una linea retta.

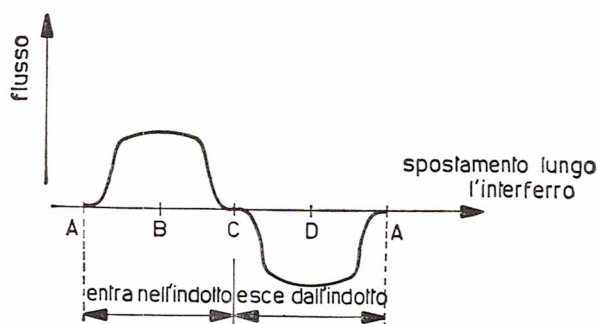



Fig. 4.45-3

Ora, quando durante la rotazione dell' indotto, i due conduttori si trovano nei punti ove l' induzione è nulla, quando cioè ad esempio (vedi fig. 4.45-2a) il conduttore a si trova in posizione A, e quindi il conduttore b in posizione C, nessuna $f.e.m.$ verrà ad indursi; mentre un istante dopo, poiché i conduttori ruotano (ad esempio secondo il verso sinistrogiro) e quindi incominciano a tagliare qualche linea di

induzione (vedi fig. 4.45-2*b*), in essi si indurranno delle *f.e.m.* le quali risultano concordi e tali (regola della mano sinistra) da rendere l'estremo *M* positivo rispetto ad *N*.

Queste *f.e.m.* andranno d'altronde rapidamente aumentando di valore a mano a mano che i conduttori si porteranno verso la parte centrale dei poli, ove l'induzione magnetica è massima ed abbastanza uniforme: transitando in tale zona, le *f.e.m.* indotte si manterranno perciò abbastanza costanti di valore. Ma poi i conduttori usciranno da tale zona, per cui le *f.e.m.* indotte diminuiranno rapidamente di valore, fino ad annullarsi quando il conduttore *a* passerà per il punto *C* e il conduttore *b* per il punto *A*, ove l'induzione è nulla.

Dopodiché, continuando a ruotare l'indotto, il fenomeno riprenderà come precedentemente accennato, salvo che le *f.e.m.* nei conduttori invertiranno verso (vedi ad esempio fig. 4.45-2*c*), per cui ora risulterà positivo l'estremo *N* rispetto ad *M*. Tuttavia il collettore, essendo costituito da due lamelle che seguono la rotazione dei conduttori, farà sì che le spazzole rimangano sempre della stessa polarità. Si noti che il circuito esterno (utilizzatore) fa capo alle spazzole.

La prima conclusione che si può trarre, dopo questa sommaria esposizione, è che fra le spazzole si rende disponibile una tensione il cui andamento nel tempo è simile a quello riprodotto in fig. 4.45-4 e il cui

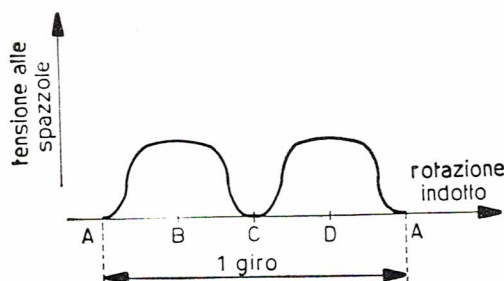



Fig. 4.45-4

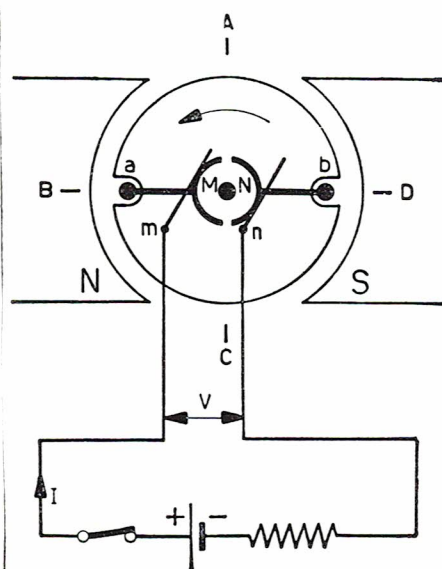



Fig. 4.45-5

valor medio sarà tanto più alto quanto più forte risulterà la velocità di rotazione dei conduttori. La macchina funziona quindi da generatore. Ponendo d'altronde più conduttori sull'indotto, distribuendoli e collegandoli opportunamente, e ricorrendo anche ad un collettore a più lamelle,

si riesce in pratica ad ottenere alle spazzole delle tensioni pressoché costanti nel tempo (dinamo).

Se ora al posto del collettore si pongono invece due anelli metallici, isolati fra di loro, la tensione che si raccoglierà alle spazzole poggianti su questi anelli avrà necessariamente lo stesso andamento del flusso lungo il traferro, quindi simile a quello riportato in fig. 4.45-3 [1], cioè presenterà un andamento cosiddetto *alternato*, ossia tale da passare periodicamente da valori positivi a valori negativi (alternatore, di tipo poco usato).

È interessante osservare ancora che cosa succede quando il generatore venga chiuso su di un circuito in modo che tanto quest'ultimo come i conduttori del generatore risultino percorsi da corrente. È chiaro che in queste condizioni i conduttori subiranno un'azione di forza da parte del campo d' induzione presente al traferro [2], poiché essi sono ortogonali alle sue linee. Tale azione di forza per la parte rotante si manifesterà con una coppia resistente, come risulta controllando, con la regola della mano destra, i versi delle forze sviluppate da ciascun conduttore di indotto. Ma tale risultato può essere previsto anche in base al principio della conservazione dell'energia. Infatti il generatore, erogando corrente al circuito, gli fornisce dell'energia, energia che al generatore dovrà necessariamente essere data dal motore primo che lo aziona. Questo fatto esige naturalmente che il generatore freni il motore che lo muove : il che avverrà solamente se nel generatore nascerà per effetto della corrente erogata una coppia frenante (reazione).

Si consideri sempre la stessa macchina che ha servito per lo studio precedente, solamente che le sue spazzole vengono ora collegate, tramite un interruttore, ad un generatore di tensione continua (vedi fig. 4.45-5). La parte rotante sia d'altronde inizialmente ferma, ad esempio si trovi con il conduttore a in corrispondenza del punto B. Chiuso l' interruttore, che cosa succederà ? Evidentemente, anzitutto, inizierà a circolare nei conduttori una corrente $I = \frac{V}{R}$, essendo V la tensione ai capi delle spazzole ed R la resistenza dell' insieme dei conduttori di indotto. Per effetto di tale corrente si svilupperanno immediatamente sui conduttori delle forze (i conduttori sono infatti ortogonali alle linee di induzione) e quindi una coppia motrice che ne determinerà la rotazione. La prima conclusione che si può trarre è dunque questa : sotto l'azione della coppia motrice l' indotto incomincerà a ruotare e quindi ad aumentare la sua velocità di rotazione. La macchina sta funzionando perciò come motore.

Ma quali fenomeni succederanno entro il motore mentre esso sta ruotando ? È chiaro che i conduttori dell' indotto, ruotando assieme a

---

[1] Infatti, poiché la velocità u con la quale i conduttori tagliano le linee del campo è supposta costante, si ha che, per la formula 4.44-3, la tensione indotta risulta proporzionale al valore dell' induzione.

[2] Là dove c'è, si intende.

questo e tagliando quindi le linee di induzione nel traferro, diventeranno sede di una *f.e.m.*, il cui valor medio crescerà all'aumentare della velocità di rotazione della macchina. D'altronde la polarità presentata dalla risultante di queste *f.e.m.* è tale da rendere positiva quella spazzola che il generatore esterno rende anch'esso positiva: in sostanza tale *f.e.m.* agisce come forza controelettromotrice rispetto alla tensione del generatore.

Si potrà dunque scrivere per l'insieme dei conduttori posti sullo indotto (circuito di indotto) la seguente equazione:

4.45-1
$$V - \frac{d\Phi_c}{dt} = RI \text{ (3)} ,$$

essendo V la tensione alle spazzole (o ai morsetti come generalmente si dice), $-\frac{d\Phi_c}{dt}$ la *f.c.e.m.* indotta e I la corrente che scorre nei conduttori di indotto (tutte queste grandezze elettriche si intendono costanti).

Il motore perciò raggiungerà quella velocità alla quale la *f.c.e.m.* sviluppata dall'indotto risulterà tale da determinare (nella formula 4.45-1 e nel ragionamento le grandezze V ed R sono costanti) quella corrente I necessaria e sufficiente per sviluppare la coppia motrice richiesta. D'altronde più forte sarà la coppia motrice chiesta al motore più piccola dovrà essere la *f.c.e.m.* (il motore cioè rallenterà) al fine di consentire che la corrente nei conduttori di indotto abbia ad aumentare di intensità.

4.46 Correnti parassite

Le correnti parassite nascono nei corpi conduttori tutte le volte che questi o sono investiti da flussi magnetici variabili oppure si muovono in campi magnetici costanti o anche naturalmente quando si verificano entrambe le condizioni. Esse sono dunque delle particolari correnti indotte che, per essere generalmente di effetto dannoso, vengono dette appunto *parassite* (1).

---

(3) Moltiplicando per Idt questa equazione si ottiene:

$$VI\,dt - \frac{d\Phi_c}{dt} Idt = RI^2dt ,$$

cioè:

$$VI\,dt = Id\Phi_c + RI^2dt ,$$

la quale esprime il bilancio energetico per il motore nell'intervallo di tempo dt considerato: da un lato l'energia assorbita dal motore ($VIdt$), dall'altro lato l'energia meccanica che il motore fornisce sul suo albero ($Id\Phi_c$) assieme alle inevitabili perdite per effetto Joule (RI^2dt).

(1) O anche di Foucault.

Si consideri ad esempio un nucleo di ferro massiccio, costituente un circuito magnetico, il quale sia sede di un flusso magnetico variabile nel tempo poiché le amperspire di magnetizzazione sono per l'appunto variabili nel tempo (vedi fig. 4.46-1*a*). Che cosa succederà nel nucleo? A

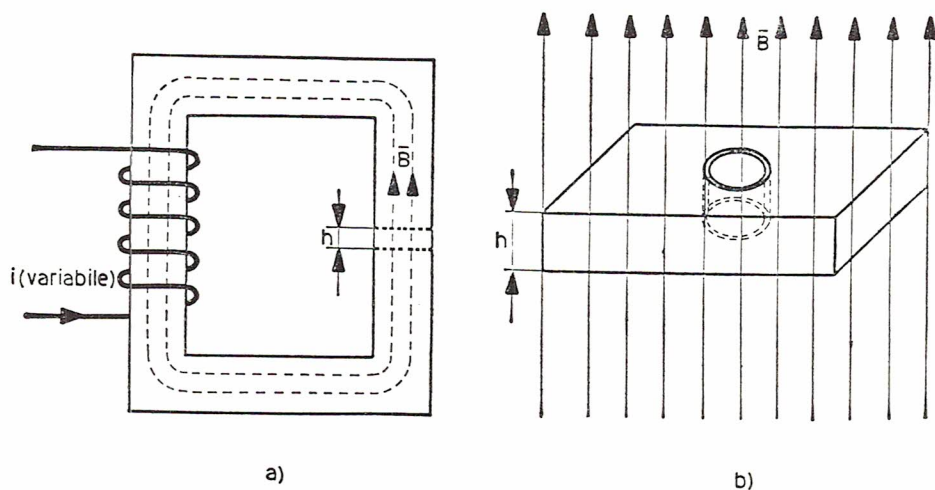



Fig. 4.46-1

tale scopo si incominci ad isolare un piccolo tronco di altezza h ed avente la stessa sezione S del nucleo dato (vedi fig. 4.46-1*b*). È chiaro che in questo tronco si potranno considerare tanti percorsi chiusi (ad andamento regolare come in figura, ma anche irregolare non ha importanza) i quali verranno a costituire in sostanza altrettante spire chiuse. Poiché nel nucleo il flusso di induzione varia nel tempo, anche il flusso concatenato con ciascuna di queste spire varierà nel tempo, per cui esse diverranno sede di *f.e.m.* indotte e quindi di correnti indotte. Nel tronco considerato si avrà perciò in definitiva un complesso di correnti indotte circolanti in modo vorticoso. Ciò che si è detto per un tronco potrà essere esteso allo intero nucleo.

Dopo quanto è stato descritto, appare chiaro che gli effetti più importanti delle correnti parassite, dovute ad un campo magnetico variabile, sono quelli di determinare una dissipazione di energia elettrica in calore nella massa del materiale. L'ammontare di tale dissipazione dipenderà naturalmente, tra l'altro, dal valore presentato dalla resistività del materiale stesso (2).

Ma anche nel caso in cui un conduttore massiccio si sposti in un

---

(2) Più alto è il valore della resistività del materiale, a parità di variazione nel tempo del flusso magnetico, più piccola risulterà l'intensità delle correnti parassite e quindi minore sarà la dissipazione di energia elettrica in calore.

campo di induzione costante, il fenomeno delle correnti parassite rimane in sé ancora lo stesso. A questo scopo si esamini ad esempio che cosa succede in un cilindro massiccio ruotante attorno al proprio asse e tale che sia investito da un campo magnetico costante (vedi fig. 4.46-2*a*). Si

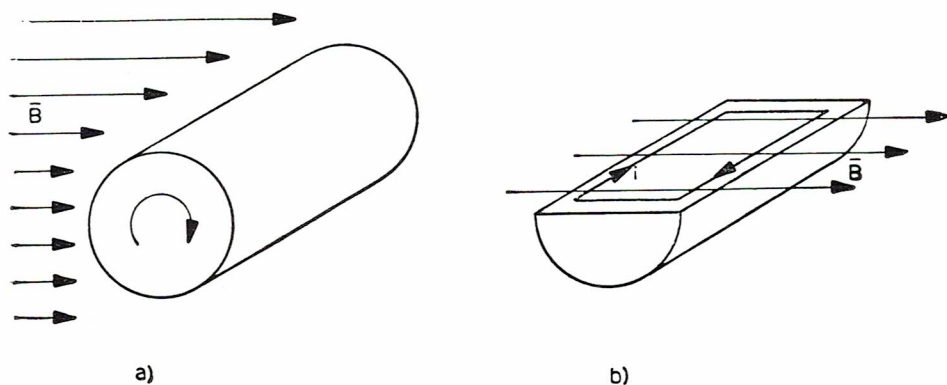



Fig. 4.46-2

consideri allora una delle tante spire delle quali si può pensare composto il cilindro e i cui lati opposti corrono parallelamente all'asse del cilindro stesso (vedi fig. 4.46-2*b*). Questi, durante la rotazione, vengono a tagliare le linee di induzione, diventando perciò sede di *f.e.m.* indotte e quindi di correnti indotte, che circoleranno nella massa del cilindro, dato che esso è costituito con materiale conduttore (ad esempio ferro, rame, alluminio, ecc.).

Pure in questo caso entro la massa del cilindro si vengono a generare dunque delle correnti vorticose il cui risultato è quello di dissipare in calore, per effetto Joule, parte dell'energia meccanica fornita al cilindro dal sistema meccanico che lo mantiene in rotazione. Si comprende così come, tutte le volte che le correnti parassite siano generate entro un conduttore da un'azione di movimento, queste abbiano un'azione frenante sul conduttore stesso e ciò in virtù del principio della conservazione dell'energia o della legge di Lenz (le correnti indotte si oppongono sempre alla causa, in questo caso è il movimento, che le genera).

Si può concludere pertanto come, salvo casi particolari (ad esempio freni elettromagnetici e magnetici, si vedano rispettivamente le figg. 4.46-3*a* e *b*), gli effetti delle correnti parassite siano fonte di notevoli disturbi ed inconvenienti. Per diminuirli (eliminarli non è possibile) occorrerà cercare di aumentare la resistenza dei possibili percorsi che le correnti indotte trovano entro la massa del conduttore investito dal campo magnetico. Ciò si realizza suddividendo il conduttore massiccio con tante superfici parallele alle linee di flusso [3] e, se possibile, aumentando la

---

[3] Per questo motivo le parti di macchine sottoposte a flussi variabili sono costituite da lamierini isolati fra di loro con carta o vernice.

resistività dei materiali impiegati (ad esempio ferro silicio anziché ferro dolce, poiché la resistività del ferro silicio è circa quattro volte più grande di quella del ferro dolce, come appare dalla tabella 1.46).

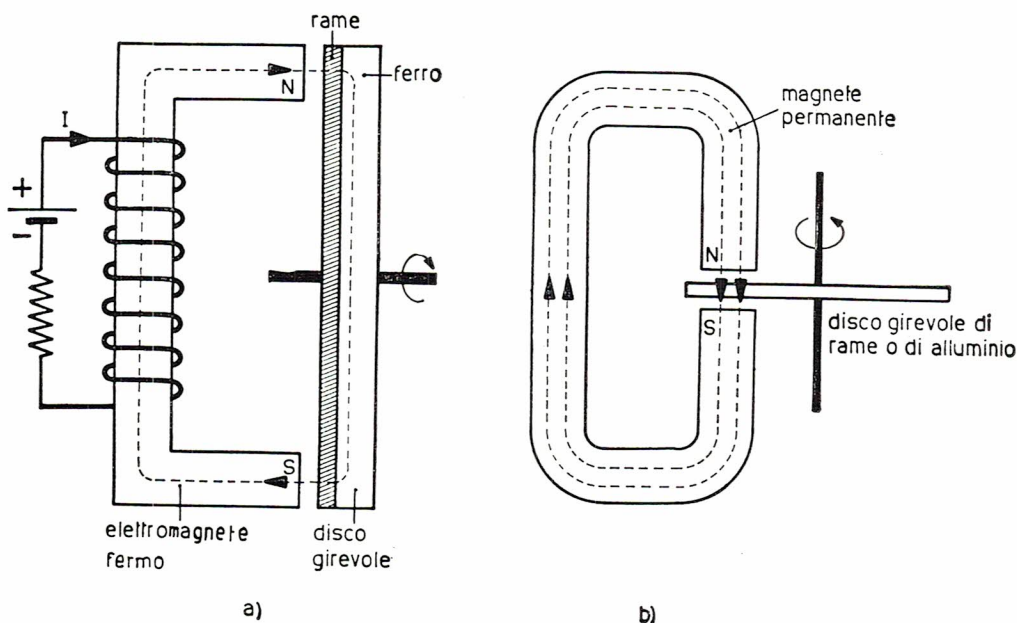



Fig. 4.46-3

4.47 Autoinduzione - Legge di Ohm per i circuiti in regime variabile

È noto che un circuito elettrico percorso da corrente determina un campo magnetico le cui linee di forza sono *sempre* concatenate col circuito che le ha generate (§§ 4.14 e 4.15). Pertanto, con quest'ultimo, si concatenerà sempre un flusso magnetico il quale, se la corrente varia nel tempo, risulterà pure esso variabile: di conseguenza si verrà a generare entro il conduttore una *f.e.m.* indotta. È questo il cosiddetto fenomeno della autoinduzione: la *f.e.m.* in parola si dirà perciò *autoindotta.*

Per poter esprimere questa *f.e.m.* è necessario anzitutto disporre dell'espressione del flusso concatenato Φ_c col circuito in funzione della corrente i che vi circola. A tale proposito si osservi che, se il mezzo che circonda il circuito elettrico è a permeabilità costante, il flusso concatenato con esso risulta certamente proporzionale alla corrente che vi scorre. Infatti, come più volte è stato accennato, il campo magnetico generato in ogni istante da un circuito è proporzionale all'intensità che la corrente ivi circolante ha in quell'istante. Si potrà perciò scrivere che:

4.47-1 $$\Phi_c = Li \; ,$$

essendo appunto L il fattore di proporzionalità sopra menzionato.

Il fattore L così definito prende il nome di coefficiente di autoinduzione o anche di induttanza del circuito dato. Tale nuovo parametro risulta dunque avere le dimensioni fisiche date dal rapporto di un flusso ad una corrente; cioè $\frac{\text{weber}}{\text{ampere}} = \frac{\text{volt} \cdot \text{secondo}}{\text{ampere}} = \text{ohm} \cdot \text{secondo}$. L'unità di misura di questa grandezza fisica è stata denominata henry (abbreviato H); si ha perciò:

4.47-2 $$1 \text{ henry} = 1 \text{ ohm} \cdot 1 \text{ secondo} .$$

Precisato quanto sopra, si è ora in grado di esprimere la *f.e.m.* autoindotta nel circuito a causa di una variazione di della sua corrente. Infatti dalla 4.47-1 si deduce che, per una variazione di avvenuta nella corrente i, il flusso concatenato è variato della quantità:

4.47-3 $$d\Phi_c = L di .$$

Poiché tale variazione infinitesima di flusso è avvenuta in un intervallo di tempo dt, pure esso infinitesimo, la *f.e.m.* autoindotta v_i sarà espressa dalla seguente formula:

4.47-4 $$v_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -L \frac{di}{dt} \cdot$$

A questo punto è possibile scrivere la legge di Ohm per un circuito percorso da corrente variabile, sottratto però all'azione di eventuali campi magnetici esterni variabili (dovuti cioè ad altre correnti o ad altre cause). Si osservi anzitutto che tale legge deve essere scritta per i valori istantanei delle tensioni in gioco e che, per la legge di Lenz, la *f.e.m.* autoindotta è di natura controelettromotrice. Detti allora v la tensione istantanea agente ai capi di un circuito, di resistenza R e di induttanza L, e i il valore istantaneo della corrente che vi scorre, ricordando il significato della legge di Ohm, cioè che alle *f.e.m.* agenti in un circuito (v), diminuite delle *f.c.e.m.* $\left(L \frac{di}{dt}\right)$, fanno equilibrio le varie cadute di tensione nelle resistenze (Ri), sarà facile scrivere in questo caso che:

4.47-5 $$v - L \frac{di}{dt} = Ri ,$$

o anche che:

4.47-5′ $$v = L \frac{di}{dt} + Ri .$$

Come si vede, la corrente che scorre in un circuito affetto anche da

induttanza [1] non è più data dal semplice rapporto V/R: occorre infatti tener conto ora degli effetti dell'autoinduzione. Ed interpretando la 4.47-5′ si può pure dire che questa determina in sostanza una caduta di tensione $v_L = L \frac{di}{dt}$. In realtà occorre precisare subito che il valore istantaneo della tensione v_L, dovuta all'induttanza, ha un segno che dipende dal segno della variazione della corrente. La caduta di tensione induttiva è quindi fisicamente differente dalla caduta di tensione ohmica. Ciò apparirà anche nel § 4.49.

È giusto quindi che, dal punto di vista del graficismo circuitale, la induttanza di un bipolo o di un circuito venga indicata con un simbolo differente rispetto a quello della resistenza. Tale simbolo appare nella fig. 4.47-1.

Fig. 4.47-1

Si può concludere dunque osservando che un bipolo od un circuito, dotato di resistenza R e di induttanza L, verrà schematizzato pertanto come in fig. 4.47-2*a*. Ciò è logico se si considera che, quando esso verrà

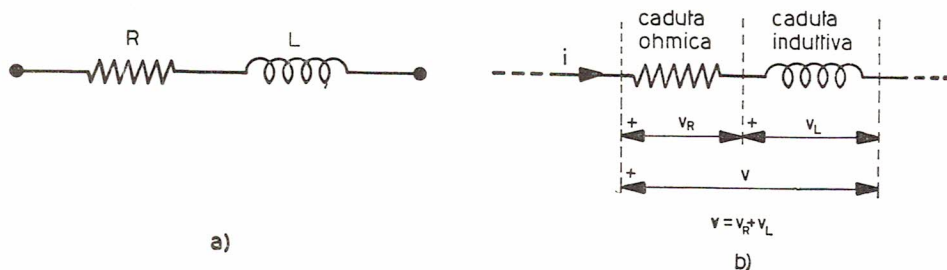



Fig. 4.47-2

percorso dalla corrente i, ciascun elemento determinerà una caduta di tensione, la quale deve essere dipendente dalla corrente che vi circola e la cui somma (algebrica) $v_R + v_L$ necessariamente equilibra la tensione v applicata dall'esterno. Si veda ad esempio la fig. 4.47-2*b*, dalla quale appare quindi tra l'altro come le polarità da assegnare alla caduta di tensione induttiva v_L siano concordi con quelle della caduta di tensione ohmica [2].

---

[1] Si dice in tal caso che il circuito è induttivo o, meglio, ohmico-induttivo.

[2] Il punto a potenziale più alto viene considerato dunque ancora quello in cui entra la corrente.

Dopo quanto è stato detto è altresì facile dimostrare che più induttanze L_1, L_2, L_3 .... collegate in serie (vedi fig. 4.47-3), cioè percorse

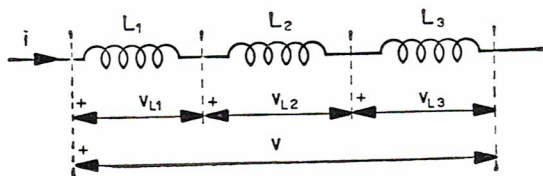



Fig. 4.47-3

tutte dalla stessa corrente i, equivalgono ad un'unica induttanza L_{eq} espressa dalla formula:

4.47-6
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots .$$

Infatti per il circuito di fig. 4.47-3 è possibile scrivere:

$$v = v_{L_1} + v_{L_2} + \dots = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots = (L_1 + L_2 + \dots) \frac{di}{dt} =$$
$$= L_{eq}\, di/dt \; .$$

Per più induttanze collegate fra di loro in parallelo, l' induttanza equivalente è espressa invece dalla formula:

4.47-8
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots ,$$

analoga a quella vista per più resistenze collegate in parallelo.

4.48 Espressione del coefficiente di autoinduzione

La conoscenza del valore del coefficiente di autoinduzione L di un bipolo o di un circuito, dopo quanto è stato esposto, appare della massima importanza pratica, così come la conoscenza del valore de la sua resistenza. Tale calcolo, che si basa sulla ricerca del valore assunto dal rapporto Φ_c/I (dalla 4.47-1 infatti $L = \Phi_c/I$), non sempre però è di facile attuazione, poiché si rende necessario cercare l'espressione del flusso concatenato col circuito in funzione della corrente (qualsiasi) (1) che lo percorre.

Si presenta ora qualche caso pratico.

a) Induttanza di un avvolgimento toroidale (vedi fig. 4.48-1). Questo abbia N spire avvolte su di un nucleo di permeabilità μ costante, di

---

(1) Questa può essere appunto continua, di valore I.

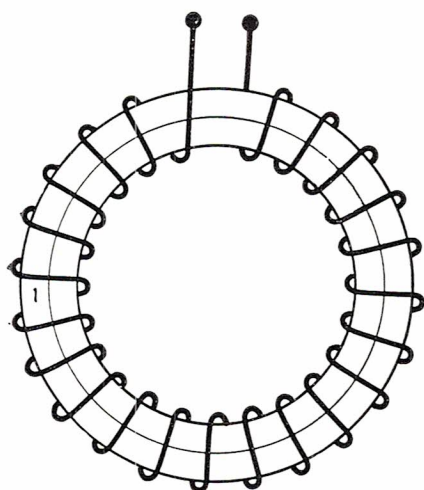
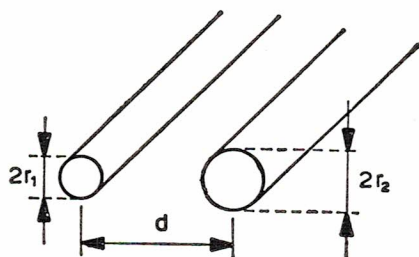



Fig. 4.48-1 *Fig. 4.48-2*

sezione S pure costante e di lunghezza media l. Poiché il flusso nel nucleo vale:

4.48-1 $$\Phi = \mu H S = \frac{\mu N S}{l} I ,$$

quello concatenato avrà la seguente espressione:

4.48-2 $$\Phi_c = N\Phi = \frac{\mu N^2 S}{l} I .$$

Il coefficiente L dell'avvolgimento toroidale risulta individuato perciò dalla seguente formula:

4.48-3 $$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l} \ (^2) .$$

Si osservi che tale coefficiente è sempre espresso da un numero positivo, poiché le spire appaiono al quadrato e le altre grandezze sono essenzialmente positive. Si noti ancora che la formula 4.48-3 vale pure per un solenoide di lunghezza assiale l, purché sufficientemente lungo in ragione delle sue dimensioni trasversali.

b) Induttanza di una spira circolare di diametro D grande rispetto al raggio r del conduttore immersa in un mezzo di permeabilità μ costante. Il calcolo, piuttosto laborioso, porta alla seguente espressione:

---

(2) L' induttanza risulta espressa in henry se le varie grandezze che appaiono nella formula verranno espresse in unità del sistema Giorgi.

4.48-4 $$L = \frac{\mu D}{2}\left(-1{,}75 + 2{,}30 \log \frac{4D}{r}\right)(^2) .$$

Si noti che l' induttanza dipende direttamente dal diametro della spira. Infatti, a parità di corrente nella spira, all'aumentare del diametro aumenta il suo flusso concatenato.

c) Induttanza di due conduttori rettilinei (vedi fig. 4.48-2), di raggio rispettivamente r_1 ed r_2, paralleli, distanti d, di lunghezza l ed immersi in un mezzo di permeabilità μ costante. Uno dei due conduttori serve da conduttore di andata, l'altro di ritorno per la stessa corrente. Il calcolo, piuttosto laborioso, porta alla seguente formula:

4.48-5 $$L = \frac{\mu l}{2\pi}\left(0{,}50 + 2{,}30 \log \frac{d^2}{r_1 r_2}\right)(^2) .$$

L' induttanza dei due conduttori, come si vede, a parità di altre condizioni, aumenta all'aumentare della distanza d. Questo fatto è naturale se si considera che con ciò aumenta il valore del flusso concatenato.

Osservando le formule sopra riportate, si comprende come il coefficiente di autoinduzione sia funzione delle caratteristiche geometriche del circuito e della permeabilità magnetica del mezzo in cui si sviluppa il campo magnetico. D' altronde dette espressioni valgono solamente quando la permeabilità del mezzo è costante. Sono quindi esclusi i circuiti con ferro.

Le formule sopra citate permettono altresì di indicare quali siano le dimensioni fisiche della permeabilità magnetica e di ricavare quindi la sua unità di misura. Si ha infatti, ad esempio dalla 4.48-3, che:

4.48-6 $$\mu = \frac{Ll}{N^2 S} ,$$

e quindi che la permeabilità magnetica μ ha le dimensioni fisiche date dal rapporto di una induttanza con una lunghezza. È per questo motivo che l'unità di misura della permeabilità magnetica risulta l'henry/metro (abbr. H/m).

4.49 Energia immagazzinata da un circuito - Carattere inerziale delle correnti

Si è visto nel § 4.24 come, alla generazione del campo magnetico da parte della corrente che percorre un circuito elettrico, sia connesso un importante fenomeno energetico: è necessario infatti che, durante tale fase, il generatore fornisca al circuito una certa quantità di energia

elettrica [1], energia che viene immagazzinata dal mezzo che circonda il circuito, là dove esiste il campo magnetico. D'altronde tale energia verrà restituita al circuito una volta che la corrente e quindi il campo magnetico si annulleranno.

Ora, all'espressione di questa energia si può pervenire assai facilmente in altro modo, precisamente quando del circuito si conosca il relativo coefficiente di autoinduzione L e il valore I della corrente che vi scorre. In ogni istante infatti l'energia immagazzinata dal campo magnetico, e quindi dal circuito, può essere calcolata con la seguente formula :

4.49-1 $$W_L = \frac{1}{2} LI^2 ,$$

analoga a quella che esprime l'energia elettrostatica immagazzinata da un condensatore $\left(W_C = \frac{1}{2} CV^2\right)$.

La 4.49-1 può essere ricavata assai speditamente, ad esempio, per un circuito costituito da un avvolgimento toroidale (vedi fig. 4.48-1). In questo caso, applicando la 4.24-1 a tutto il volume costituente il nucleo, poiché il campo all' interno di questo è pressoché uniforme mentre esso è nullo all'esterno, si trova, indicati con N, S, l, μ rispettivamente il numero di spire dell'avvolgimento, la sezione, la lunghezza e la permeabilità del nucleo torico, che :

4.49-2 $$W_L = \frac{1}{2} \mu H^2 \cdot \text{volume nucleo} = \frac{\mu}{2} \frac{(NI)^2}{l^2} Sl = \\ = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 S}{l} I^2 .$$

D'altronde, per quanto trovato in 4.48-1, il rapporto $\mu N^2 S/l$ esprime il coefficiente di induttanza L dell'avvolgimento toroidale. Resta così confermato che $W_L = \frac{1}{2} LI^2$.

Si vuole da ultimo richiamare l'attenzione sul fatto che l'assorbimento di energia da parte di un circuito (necessaria per la generazione del relativo campo magnetico) non può avvenire istantaneamente, ma solo gradatamente [2] : perciò gradualmente crescerà il valore del campo

---

[1] Oltre si intende a quella dissipata per effetto Joule.

[2] Poiché il generatore elettrico che alimenta il circuito non ha potenza infinita. La dimostrazione è la seguente. È noto come, affinché si compia un qualsiasi processo energetico, sia necessario che il sistema abbia una certa potenza. D'altronde, poiché fra potenza P ed energia ΔW prodotta od assorbita nel tempo Δt esiste la relazione $\Delta W = P \cdot \Delta t$, è chiaro che, affinché ΔW sia diverso da zero per Δt eguale a zero (cioè perché si compia un processo energetico anche piccolo però in un tempo nullo), occorrerebbe che P fosse infinito. Scende quindi che, non potendo mai essere P di valore infinito, l' intervallo di tempo Δt non risulterà mai nullo.

ed altrettanto quindi quello della corrente elettrica che lo produce. È per questo motivo che la corrente in un circuito elettrico dotato di induttanza L, oltre che di resistenza R, non può assumere subito, alla brusca applicazione di una tensione continua V, il valore V/R, ma a questo valore si porterà solo gradatamente. Si dimostra infatti che l'andamento di tale corrente risulta crescente secondo una legge esponenziale, come è stato riportato in fig. 4.49-1*a*.

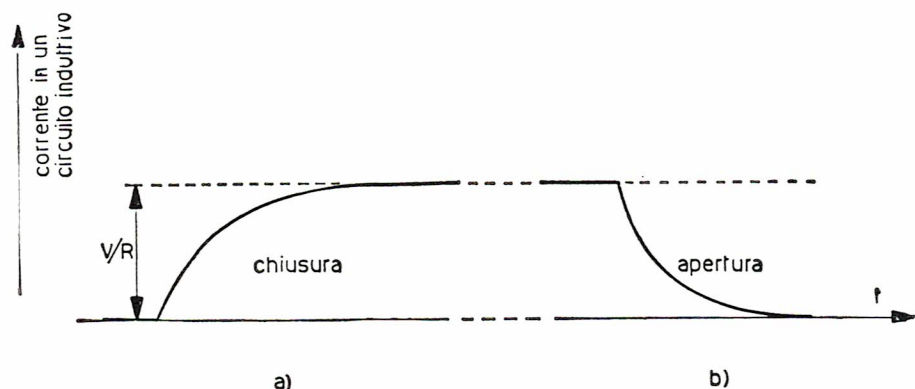



Fig. 4.49-1

Così all'apertura del circuito la corrente, il cui valore è V/R, non si estinguerà istantaneamente, ma l'estinzione avverrà ancora secondo una legge esponenziale decrescente, come è stato riportato in fig. 4.49-1*b*. Solo in questo modo si permetterà all'energia immagazzinata nel campo magnetico di annullarsi gradatamente.

In ciò consiste appunto il cosiddetto carattere inerziale della corrente, quando essa percorre un circuito induttivo. Come un corpo raggiunge proprio a causa della sua massa un nuovo regime di velocità, diverso da quello che aveva precedentemente, solo dopo un certo tempo, così in un circuito dotato di induttanza la corrente raggiungerà un nuovo valore di intensità solo dopo un certo tempo, tempo necessario per permettere che si possano compiere quei fenomeni energetici connessi ai campi magnetici.

Risulta altresì, per l'analogia sopra richiamata, che l'energia elettromagnetica di un circuito $\left(W_L = \frac{1}{2} LI^2\right)$ ha carattere cinetico: per questo motivo un circuito tenderà sempre a portarsi nelle condizioni di massima energia magnetica. Infatti, ad esempio, un circuito deformabile tende ad aumentare il valore del proprio coefficiente di autoinduzione (vedi esercizio 4.32).

4.410 Mutua induzione - Equazioni del trasformatore

F.e.m. si possono indurre in un circuito per azione di un altro circuito quando quest'ultimo sia percorso da una corrente variabile nel

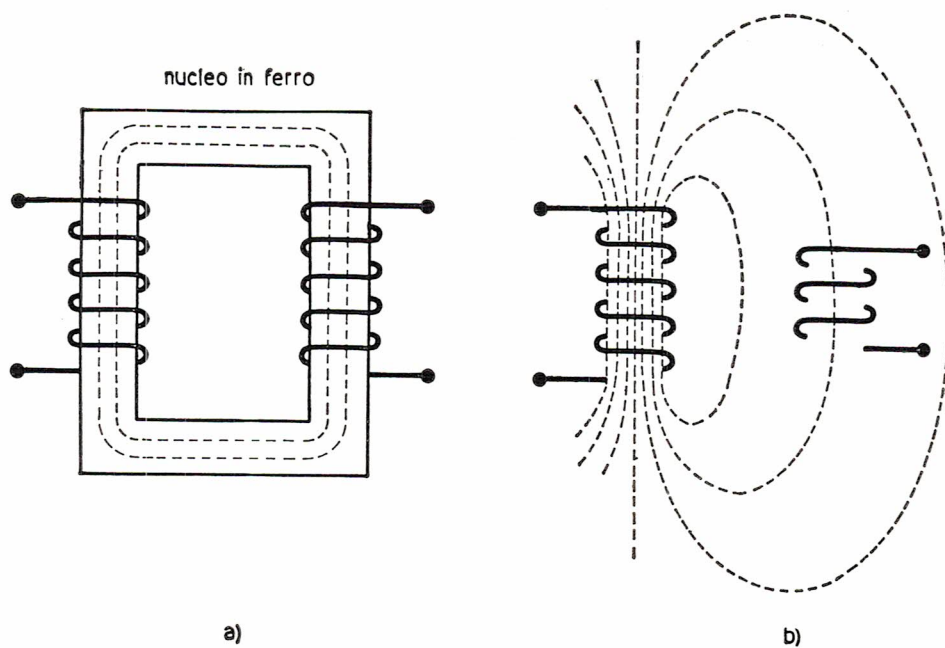



Fig. 4.410-1

tempo. Perché effettivamente ciò avvenga è necessario però che i due circuiti occupino una posizione tale per cui tutto (fig. 4.410-1*a*) o una parte (fig. 4.410-1*b*) del flusso generato da uno si concateni con l'altro. I due circuiti si dicono allora mutuamente concatenati e mutua induzione si chiama il fenomeno che prende origine.

Si considerino dunque due circuiti mutuamente concatenati o, come si dice anche, magneticamente accoppiati; ad esempio le due spire di fig. 4.410-2. La loro posizione reciproca sia tale che una parte del flusso

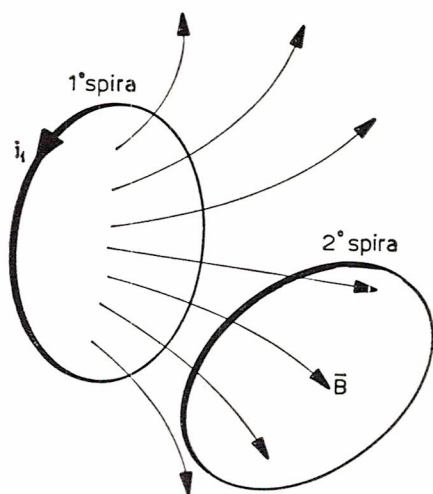



Fig. 4.410-2

prodotto dalla corrente i_1, circolante nel primo circuito, si concateni col secondo. Di conseguenza anche una parte del flusso prodotto da un'eventuale corrente i_2 circolante nel secondo circuito si concatenerà col primo.

È facilmente intuibile d'altronde che, se i due circuiti si trovano immersi in un mezzo avente permeabilità magnetica costante, il flusso magnetico dovuto al primo circuito e concatenato col secondo dovrà essere proporzionale alla corrente i_1 che scorre nel primo circuito, così come il flusso magnetico dovuto al secondo circuito, se percorso da corrente, e concatenantesi col primo, dovrà essere proporzionale alla corrente i_2 che scorre nel secondo circuito. Indicato allora con M il fattore di proporzionalità, che è unico nei due casi, si potrà scrivere dunque:

4.410-1 $$\Phi_{c_2} = M i_1 ,$$

4.410-1′ $$\Phi_{c_1} = M i_2 .$$

Nel caso che la corrente i_1, rispettivamente i_2, dovesse variare di una quantità infinitesima di_1, rispettivamente di_2, il flusso concatenato col secondo circuito subirà la seguente variazione:

4.410-2 $$d\Phi_{c_2} = M di_1 ,$$

e così quello concatenato con il primo circuito:

4.410-2′ $$d\Phi_{c_1} = M\, di_2 .$$

Poiché tale variazione avverrà nell'intervallo di tempo infinitesimo dt, in ciascun circuito si indurrà una *f.e.m.* detta di mutua induzione, la cui espressione si ricaverà applicando la formula 4.42-1. Si otterrà così, precisamente, per il secondo circuito:

4.410-3 $$v_{i_2} = - M \frac{di_1}{dt} ,$$

e, analogamente, per il primo circuito:

4.410-3′ $$v_{i_1} = - M \frac{di_2}{dt} .$$

È importante osservare come il fattore di proporzionalità M, che compare nelle espressioni ora trovate, venga denominato induttanza mutua o anche coefficiente di mutua induzione. Poiché le sue dimensioni fisiche sono date dal rapporto di un flusso con una corrente, esso verrà misurato, come l'induttanza, in henry.

A questo punto è opportuno indicare come debba essere scritta la legge di Ohm per i circuiti mutuamente accoppiati. Si consideri dunque (vedi fig. 4.410-3*a*) un circuito (avvolgimento) che sia percorso da una

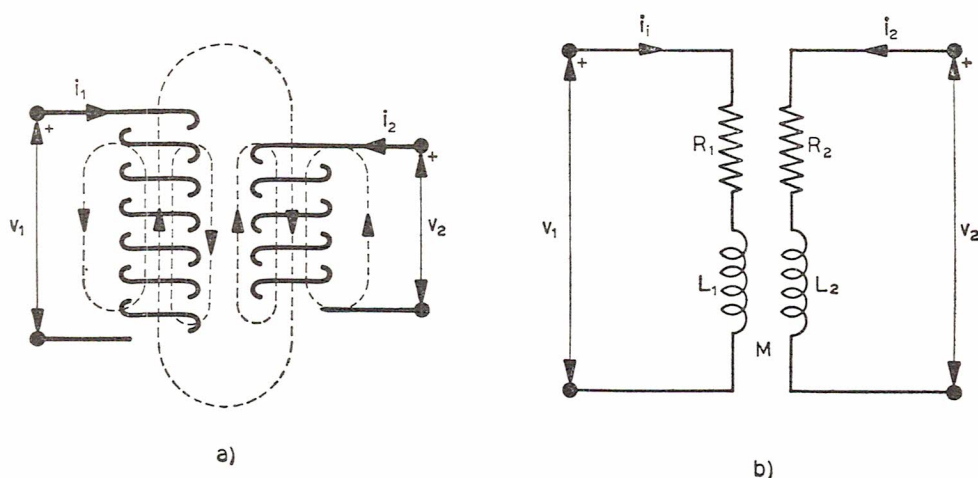



Fig. 4.410-3

corrente i_1 variabile, perché assoggettato ad una tensione v_1 variabile, e che sia magneticamente accoppiato [1] ad un altro circuito (avvolgimento) in cui circoli la corrente i_2, pure essa variabile nel tempo, perché anche quest' ultimo circuito è sottoposto ad una tensione v_2 variabile. Come risulterà ora l'espressione della legge di Ohm ? È chiaro che la corrente i_1 fluendo nel primo avvolgimento, determinerà, si veda la fig. 4.410-3*b* che rappresenta circuitalmente lo stesso schema di fig. 4.410-3*a*, una caduta ohmica $R_1 i_1$ (dovuta alla resistenza dell'avvolgimento) ed una caduta induttiva $L_1 \dfrac{di_1}{dt}$ (dovuta all' induttanza dell' avvolgimento).

---

[1] Dal punto di vista del graficismo circuitale, due bipoli o due circuiti mutuamente accoppiati vengono indicati come in fig. 4.410-4, cioè con due induttanze

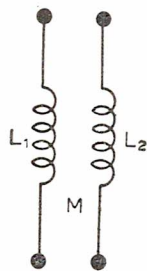



Fig. 4.410-4

poste vicine fra di loro. Ciò è logico se si pensa che, quando fra due circuiti vi è un certo accoppiamento magnetico, ciascuno di essi deve necessariamente possedere anche un flusso magnetico proprio, quindi un' induttanza ben determinata.

D'altronde il mutuo accoppiamento col secondo circuito vi causerà anche una tensione indotta $- M \frac{di_2}{dt}$ (²), la quale dovrà essere considerata come *f.c.e.m.* Per il primo circuito si potrà perciò scrivere la seguente equazione:

4.410-4 $$v_1 - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt},$$

esprimente il solito equilibrio fra *f.e.m.*, *f.c.e.m.* e cadute di tensione. Analogamente per il secondo circuito si potrà scrivere:

4.410-4′ $$v_2 - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Queste costituiscono le cosiddette equazioni del trasformatore; poiché, quando due avvolgimenti vengono di proposito accoppiati, il dispositivo elettrico che prende origine è denominato *trasformatore.*

4.411 Espressione del coefficiente di mutua induzione

Il coefficiente di mutua induzione si calcola in base alle formule 4.410-1 e 1′ del capitolo precedente: è necessario esprimere quindi il flusso concatenato con uno dei due circuiti in funzione della corrente che percorre l'altro circuito. È indifferente l' uso della formula 4.410-1 o di quella 4.410-1′. La difficoltà del calcolo consiste, come al solito, nella ricerca dell'espressione del flusso concatenato.

Un caso assai semplice si ha ad esempio quando i due circuiti sono costituiti da due avvolgimenti strettamente avvolti su di un nucleo toroidale od analogo. Questi abbiano rispettivamente N_1 ed N_2 spire e siano collocati su di un nucleo di sezione S, lunghezza media l e permeabilità magnetica μ. In tal caso, il flusso generato ad esempio dall'avvolgimento percorso dalla corrente I_1:

4.411-1 $$\Phi_1 = \frac{\mu S N_1 I_1}{l}$$

si concatenerà tutto (¹) con il secondo avvolgimento:

4.411-2 $$\Phi_{c_2} = N_2 \Phi_1 = \frac{\mu S N_1 N_2}{l} I_1,$$

(²) Il segno da attribuire ad M dipende dalla relazione esistente fra i flussi magnetici generati dai due circuiti: se questi flussi sono concordi, M è da considerarsi positivo; se invece sono discordi, M è negativo. Per maggiori ragguagli su tale argomento si rimanda al § 7.5.

(¹) Salvo precisazioni che si faranno fra breve.

per cui il coefficiente M di mutua induzione varrà:

4.411-3
$$M = \frac{\Phi_{c_2}}{I_1} = \frac{\mu S N_1 N_2}{l}.$$

Si osservi che il segno del coefficiente M dipende da quello delle spire N_1 ed N_2, nel senso accennato dalla nota 2 del precedente paragrafo.

Nel caso invece di due conduttori eguali, paralleli, distanti d e lunghi l, immersi in un mezzo avente permeabilità costante μ, con calcolo piuttosto laborioso si arriva alla seguente espressione del coefficiente di mutua induzione:

4.411-4
$$M = \frac{\mu l}{2\pi}\left(-1 + 2{,}30 \log \frac{2l}{d}\right),$$

purché $l >> d$.

Si dimostra d'altronde che il coefficiente di mutua induzione M relativo a due qualsiasi circuiti o bipoli, i quali siano caratterizzati da un coefficiente di autoinduzione rispettivamente L_1 ed L_2 (valori questi che sono ovviamente indipendenti dall'eventuale mutuo accoppiamento), può essere posto come funzione di L_1 ed L_2, precisamente secondo la seguente relazione:

4.411-5
$$M = \pm K \sqrt{L_1 L_2}\ (^2).$$

Il coefficiente K che compare nella suddetta relazione dicesi *coefficiente di accoppiamento* dei due circuiti. Si può dimostrare d'altra parte facilmente che esso è un numero positivo compreso fra uno e zero: precisamente esso vale uno quando il flusso generato da un circuito si concatena tutto con l'altro circuito (3), vale zero ovviamente quando fra i due circuiti non vi è alcun accoppiamento. Quest' ultimo caso si ha ad esempio quando due spire o due fili rettilinei giacciono in piani ortogonali fra di loro, come è indicato in fig. 4.411-1 (4).

---

(2) Il segno $\pm$ che compare avanti la radice è necessario, poiché la radice risulta sempre positiva, mentre M può essere positivo o negativo.

(3) Con riferimento al coefficiente di mutua induzione fra due avvolgimenti toroidali trovato in 4.411-3, si elevi al quadrato tale espressione:

$$M^2 = \left(\frac{\mu S N_1 N_2}{l}\right)^2 = \frac{\mu S N_1^2}{l}\ \frac{\mu S N_2^2}{l} = L_1 L_2,$$

quindi se ne estragga la radice quadrata; risulta allora: $M = \pm \sqrt{L_1 L_2}$. Ciò conferma che in questo caso $K = 1$, come deve essere per l' ipotesi fatta di concatenamento perfetto. In realtà il concatenamento non è mai perfetto, a causa degli inevitabili flussi dispersi, per cui in pratica K si presenta sempre minore dell' unità, anche se in certi casi (trasformatori in ferro) esso vi è molto vicino.

(4) Per questo motivo si pongono le bobine ortogonali fra di loro quando si vuole evitare al massimo il loro accoppiamento magnetico.

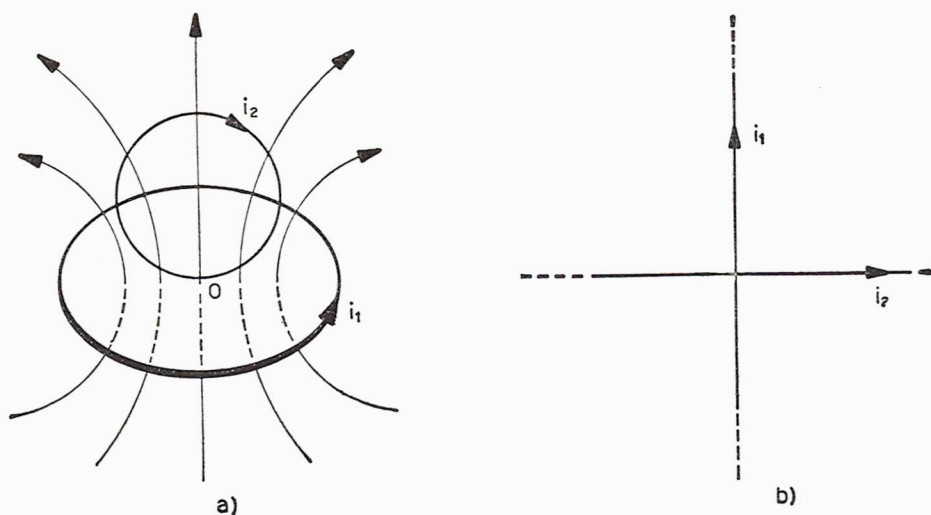



Fig. 4.411-1

Concludendo, il valore del coefficiente K, il quale dipenderà dalla forma e dalla posizione reciproca dei due circuiti, ne esprime quindi il grado di accoppiamento. Questo d'altronde si dirà *stretto* se il valore di K sarà vicino all' unità ; si dirà invece *lasco* se il valore di K risulterà assai lontano dall' unità.

4.412 Energia immagazzinata da due circuiti percorsi da corrente

Quando due circuiti, di induttanza rispettivamente L_1 ed L_2, mutuamente accoppiati (M), sono percorsi da correnti, i cui valori istantanei siano rispettivamente i_1 e i_2, vengono a possedere, istante per istante, a causa dell'energia accumulata dal campo magnetico creato dalle due correnti, un'energia totale la cui espressione è la seguente:

4.412-1 $$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 .$$

Naturalmente i primi due termini esprimono l'energia intrinseca (propria) dei due circuiti, qualora cioè essi fossero a sé stanti, il terzo termine esprime invece l'energia mutua : tale termine è necessario poiché dà conto della modificazione subìta dall'energia propria dei due circuiti per effetto del loro mutuo accoppiamento. Infatti l'ammontare di tale energia aumenta se M è positivo, diminuisce se M è negativo.

A questo proposito si può precisare che, in conseguenza del carattere cinetico dell'energia elettromagnetica, due circuiti percorsi da corrente e tali che la loro posizione reciproca possa essere mutata, tendono ad

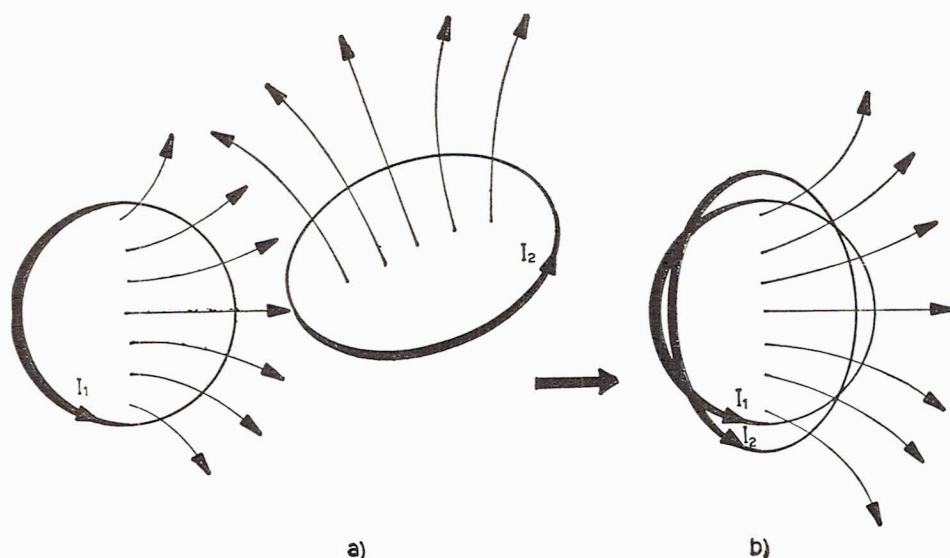



Fig. 4.412-1

assumere quella configurazione per la quale risulta massima l'energia elettromagnetica totale del sistema. Così, ad esempio, due spire libere di muoversi nello spazio, quando sono percorse da correnti, tendono ad avvicinarsi fino a sovrapporsi in modo tale che i loro flussi magnetici si sommino (M positivo) (vedi fig. 4.412-1).

4.413 Problemi di applicazione al § 4.4

Esercizio 4.4131

Nell' ipotesi che il flusso concatenato con un circuito abbia a variare secondo l'andamento riportato nelle figg. 4.4131-1*a*, 2*a*, 3*a*, si trovi il corrispettivo andamento (qualitativo) della *f.e.m.* indotta.

Soluzione

Sotto ciascun diagramma del flusso è stato riportato il relativo diagramma della *f.e.m.* indotta.

Si noti che per il suo tracciamento è conveniente determinare i punti più caratteristici. Ad esempio, dove la curva del flusso concatenato presenta una tangente orizzontale, il punto corrispondente nella curva della *f.e.m.* indotta ha evidentemente ordinata nulla, così dove la curva del flusso concatenato mostra inclinazione massima il punto corrispondente sulla curva della *f.e.m.* indotta presenterà ordinata massima. D'altronde

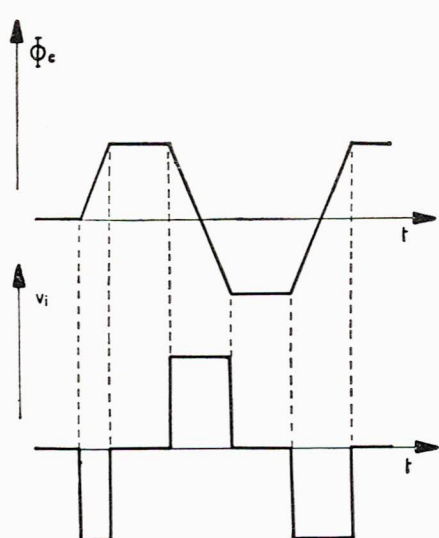
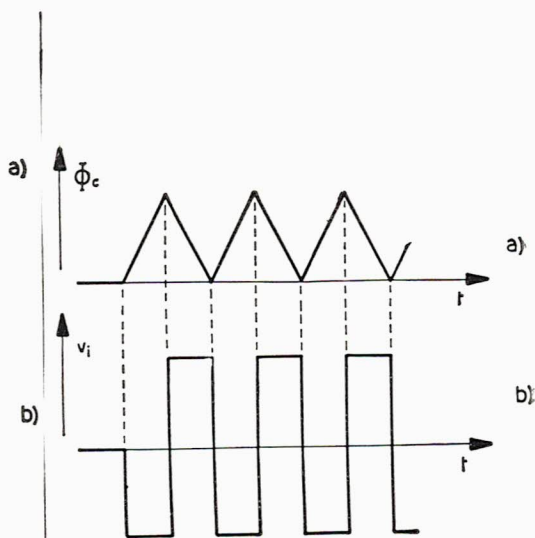



Fig. 4.4131-1

Fig, 4.4131-2

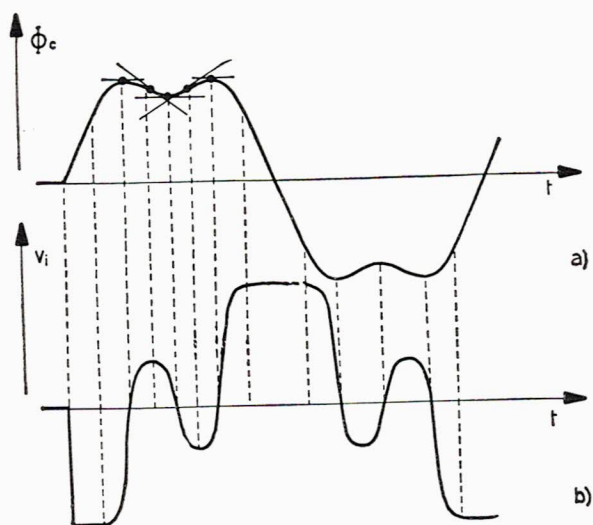



Fig. 4.4131-3

ove il flusso presenta un tratto di inclinazione costante, per quel tratto la *f.e.m.* indotta risulterà costante e così via. Tutte proprietà queste che discendono naturalmente dall'interpretazione geometrica della formula $v_i = - d\Phi_c/dt$.

Esercizio 4.4132

Una bobina, costituita da 100 spire poste sopra un telaio di area $S = 20 \text{ cm}^2$, è immersa in un campo magnetico uniforme $H_0 = 2000$

Asp/m, il quale risulta inizialmente ortogonale al piano della bobina. Questa può girare attorno al proprio asse verticale. Quale sarà il valore medio della *f.e.m.* indotta quando la bobina compie tre giri completi nel tempo di 6 millisecondi oppure quando compie mezzo giro in 1 millisecondo ?

Soluzione

Si incominci a studiare il fenomeno per un giro completo. Il flusso concatenato all' inizio del movimento ($\alpha = 0$) è massimo (Φ_{cM}) e ritorna allo stesso valore (e segno) dopo un giro completo. Infatti la sua espressione analitica è data da $\Phi_c = \Phi_{cM} \cos\alpha$ (vedi fig. 4.4132-1),

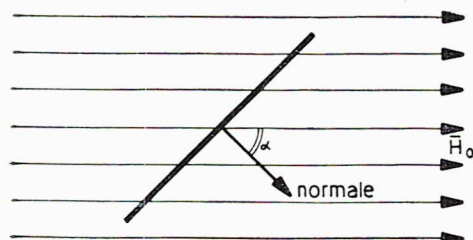



Fig. 4.4132-1

essendo α l'angolo generico formato dalla normale alla superficie della bobina con il campo H_0. Quindi per ogni giro completo il termine $\Phi_{c_2} - \Phi_{c_1}$ è nullo (poiché $\Phi_{c_2} = \Phi_{c_1}$), pertanto nullo sarà il valor medio della *f.e.m.* indotta. Si veda anche il grafico di figura 4.4132-2, ove è

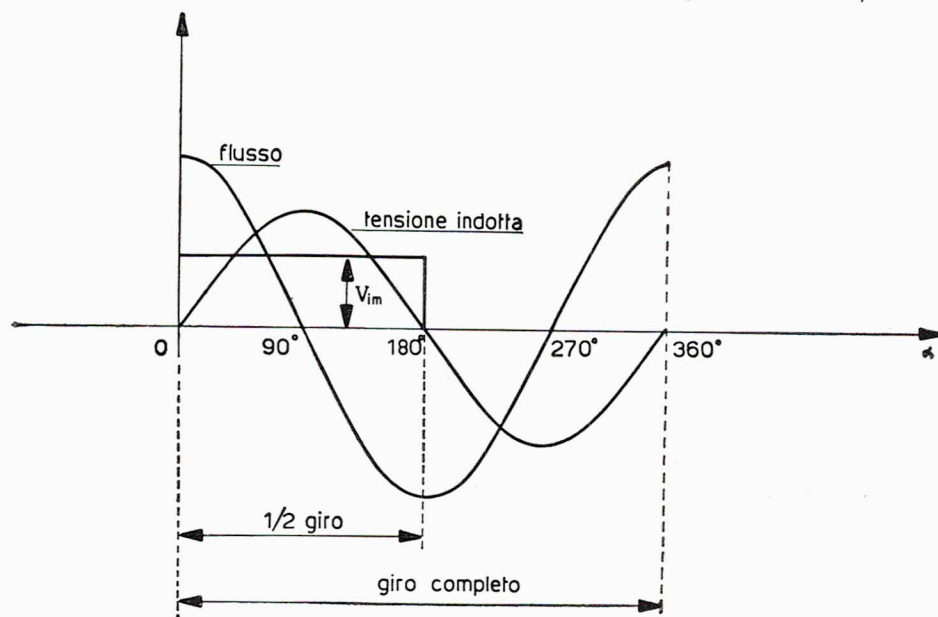



Fig. 4.4132-2

stato riportato, in funzione dell'angolo di rotazione α, l'andamento del flusso concatenato e quello della relativa *f.e.m.* indotta.

Concludendo, anche per tre giri completi, la *f.e.m.* indotta ha valore medio nullo. Non così dopo mezzo giro: in questo caso si ha:

$$V_{im} = \frac{2\Phi_{cM}}{t} = \frac{2\mu_0 H_0 S N}{t} = \frac{2\cdot 1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{3}\cdot 20\cdot 10^{-4}\cdot 10^{2}}{10^{-3}} \cong 1 \text{ volt}.$$

Esercizio 4.4133

Trovare il valore e la polarità della *d.d.p.* presente agli estremi di una barretta di rame lunga 20 cm la quale ruota con velocità angolare ω costante, corrispondente a 3000 giri/minuto, attorno ad una estremità mantenendosi ortogonale alle linee di forza di un campo di induzione uniforme ($B_0 = 0{,}06$ Wb/m²) (vedi fig. 4.4133-1).

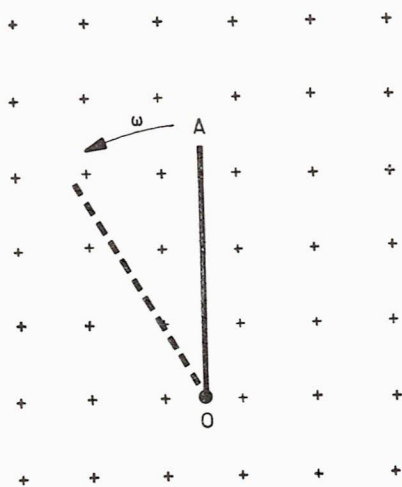
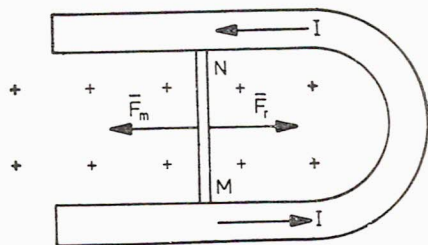



Fig. 4.4133-1 *Fig. 4.4134-1*

Soluzione

Si osservi innanzitutto che i vari tronchi infinitesimi, in cui si può pensare suddivisa la barretta, tagliano le linee di forza con velocità variabile a seconda della loro distanza dal centro di rotazione O. Tuttavia è possibile applicare direttamente all'intera barretta la formula $v_i = Blu$ (a parte segno) purché si intenda che la velocità u sia quella media, cioé quella corrispondente al punto medio della barretta.

Indicata con l la lunghezza della barretta, la velocità media allora risulta espressa da:

$$u = \omega \frac{l}{2},$$

per cui la *d.d.p.* V_{OA} cercata vale (il punto O è positivo rispetto ad A):

$$V_{OA} = B_0 \, l \, u = \frac{B_0 l^2 \omega}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 314}{2} = 0{,}377 \text{ volt} ,$$

essendo $\omega = 2 \pi \dfrac{3000}{60} = 314$ rad/sec.

Si osservi che la tensione V_{OA} è costante nel tempo, poiché la rotazione avviene con velocità angolare costante.

Esercizio 4.4134

Su due guide metalliche poste nell'aria, distanti $d = 40$ cm e di resistenza ohmica trascurabile, chiuse ad una estremità, scorre con moto uniforme traslatorio ($u = 2$ m/sec) una sbarrettina metallica la cui resistenza R è di 10 ohm. Il sistema giace in un campo magnetico costante ($H_0 = 10000$ Asp/m) e le cui linee di forza sono ortogonali al piano contenente le due guide (vedi fig. 4.4134-1).

Si trovi il valore della forza con la quale occorre muovere la sbarrettina, a prescindere dalle resistenze di attrito e dell'aria e dalla gravità, nonché l'ammontare della potenza meccanica assorbita. Si dica inoltre dove va a finire il lavoro meccanico compiuto nel muovere la barretta.

Soluzione

Ai capi della sbarrettina, mentre essa è in movimento uniforme, si induce la seguente tensione V_i costante:

$$V_i = \mu_0 H_0 u d = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 0{,}4 \cong 10 \text{ millivolt} ,$$

la quale darà luogo nel circuito ad una circolazione di corrente continua I del valore [1]:

$$I = \frac{V_i}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10} = 1 \text{ mA} .$$

In conseguenza di ciò, sulla sbarrettina si sviluppa una forza resistente F_r di natura elettromagnetica, che tende ad opporsi al moto, e la cui intensità vale:

$$F_r = \mu_0 H_0 I d = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}40 \cong 5 \cdot 10^{-6} \text{ newton.}$$

Perché la sbarrettina si muova di moto uniforme occorrerà quindi applicare ad essa una forza motrice F_m eguale e contraria a quella F_r ora calcolata. Per questo motivo il dispositivo meccanico che muove la

---

[1] Per il verso si veda la figura 4.4134-1. Naturalmente la corrente indotta I ha verso tale da creare un campo magnetico contrario a quello inducente; pertanto risulta positivo l'estremo M della sbarrettina la quale, per il circuito, si comporta come elemento generatore.

sbarrettina verrà impegnato per una certa potenza meccanica P_m, calcolabile semplicemente come segue:

$$P_m = F_m u = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 10 \ \mu W .$$

Il lavoro meccanico d'altronde verrà integralmente trasformato in calore per effetto Joule dalla corrente elettrica che scorre nel circuito chiuso, poiché questo è il solo fenomeno elettrico presente. Detta P la potenza elettrica dissipata, si dovrà verificare allora che $P = P_m$. Infatti:

$$P = RI^2 = 10 \cdot 10^{-6} = 10 \ \mu W .$$

D'altra parte tale potenza elettrica viene generata nel circuito per effetto della tensione indotta. Pertanto si dovrà verificare immediatamente che la potenza elettrica generata P_g risulta eguale alla potenza dissipata, come appunto si constata tramite il seguente calcolo:

$$P_g = V_i I = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10 \ \mu W .$$

Esercizio 4.4135

Un circuito, costituito da una sola spira circolare di raggio eguale a 10 cm, chiuso su di un generatore di *f.e.m.* continua $V_0 = 10$ volt, è immerso in un campo di induzione uniforme la cui intensità diminuisce di 0,02 Wb/m² ogni millisecondo. Il campo è ortogonale al piano contenente la spira, come appare in fig. 4.4135-1.

Si trovi il valore della tensione totale agente nella spira.

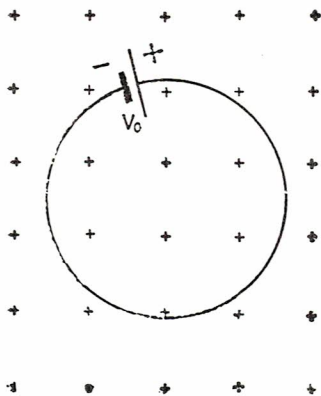



Fig. 4.4135-1

Soluzione

La tensione totale V agente nella spira è la risultante di quella costante V_0 dovuta al generatore e a quella V_i, pure costante, dovuta all' induzione elettromagnetica. Quest' ultima in valore assoluto ammonta a:

$$V_i = \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta t} = \frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t} = \frac{0{,}02 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} \cong 0{,}63 \text{ volt.}$$

Osservando la fig. 4.4135-1 si può capire d'altronde come questa tensione agisca concordemente con quella V_0 dovuta al generatore e sia positiva. Infatti entrambe queste tensioni danno luogo nella spira a correnti tali da produrre campi magnetici concordi con quello inducente. Sarà perciò:

$$V = V_0 + V_i = 10 + 0{,}63 = 10{,}63 \text{ volt}.$$

Esercizio 4.4136

Si trovi il valore assunto dal coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento ($N = 100$ spire) uniformemente distribuito su di un circuito magnetico torico con traferro ($\delta = 0{,}1$ mm) e costituito da una lega ferromagnetica a permeabilità costante ($\mu_f = 500\ \mu_0$, $r_m = 5$ cm, $S = 1$ cm^2).

Soluzione

Poiché nel presente caso le dispersioni magnetiche sono trascurabilissime, il flusso Φ_c concatenato coll'avvolgimento vale N volte il flusso Φ nel nucleo; d'altronde quest' ultimo, per la legge di Hopkinson, è espresso dal rapporto $NI/\mathcal{R}$. Si ha così in definitiva che:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}.$$

Si procederà perciò, per prima cosa, al calcolo della riluttanza totale del circuito magnetico. Con i dati del problema si ha:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0 = \frac{l_f}{\mu_f S} + \frac{\delta}{\mu_0 S} =$$

$$= \frac{0{,}314}{500 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4}} + \frac{10^{-4}}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4}} \cong 5{,}8 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

L' induttanza L vale quindi:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{10^4}{5{,}8 \cdot 10^6} = 1{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ H}.$$

Esercizio 4.4137

Si trovi il valore del coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento facente parte del circuito magnetico studiato nell'esercizio 4.295.

Soluzione

Il calcolo del coefficiente di autoinduzione L può essere ricavato tramite la formula dell'energia:

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 ,$$

poiché l'esercizio 4.295 fornisce proprio il valore dell'energia W_L. Questa infatti risulta come somma dell'energia accumulata nel ferro e nel traferro, cioè:

$$W_L = W_f + W_0 = (0{,}43 + 5{,}37)\, 10^{-6} = 5{,}80 \cdot 10^{-6} \text{ joule} .$$

Sarà allora, poiché la corrente I che percorre l'avvolgimento vale 0,1 A, :

$$L = \frac{2 \cdot W_L}{I^2} = \frac{2 \cdot 5{,}80 \cdot 10^{-6}}{10^{-2}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ henry} .$$

Naturalmente il risultato così ottenuto può essere controllato mediante la ben nota formula dell'induttanza $L = \Phi_c/I$ la quale, con i dati desunti dallo stesso esercizio 4.295, dà infatti:

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{NSB}{I} = \frac{100 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}0116}{10^{-1}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ henry} .$$

I valori coincidono, ovviamente.

Esercizio 4.4138

Un bipolo ohmico-induttivo, si veda la fig. 4.4138-1, fa parte di un circuito in corrente continua. Ad un certo istante l'interruttore S_1 si apre determinando nello stesso tempo la chiusura dell'interruttore S_2. Che cosa succederà?

Soluzione

L'apertura dell'interruttore S_1 e la contemporanea chiusura dell'interruttore S_2 vengono a realizzare un nuovo circuito, chiuso, quello

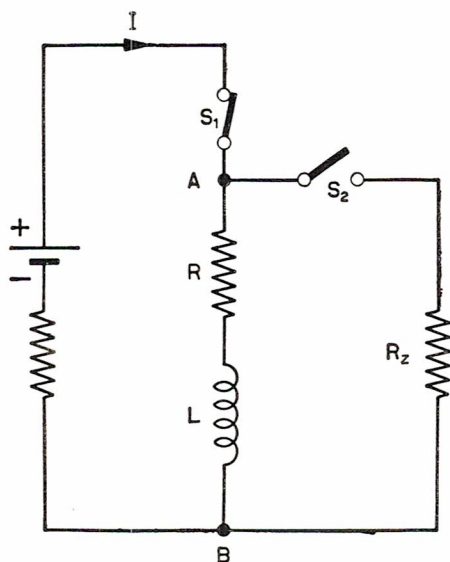



Fig. 4.4138-1

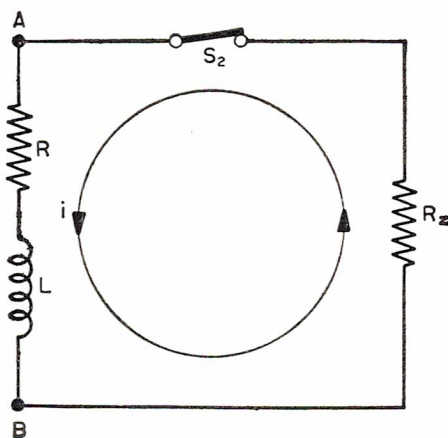



Fig. 4.4138-2

riportato in fig. 4.4138-2. In questo circuito potrà dunque circolare una corrente i (la cui intensità, nel primissimo istante, coincide con quella della corrente I che circolava nel ramo AB con S_1 chiuso ed S_2 aperto), determinando perciò negli elementi resistivi $R + R_z$ la dissipazione per effetto Joule dell'energia elettromagnetica posseduta dall' induttanza e permettendo così alla corrente i di annullarsi dopo un certo tempo.

Ma se da un punto di vista energetico si può affermare che la corrente i è dovuta all'energia elettromagnetica dell' induttanza, dal punto di vista circuitale si potrà dire invece che la corrente i è dovuta alla *f.e.m.* sviluppata dall' induttanza. Per il circuito chiuso di fig. 4.4138-2 si può infatti scrivere (legge di Ohm):

$$- L \frac{di}{dt} = (R + R_z)\, i \,,$$

osservando però che in questo caso il termine $- L \frac{di}{dt}$ è certamente positivo, per essere il rapporto di/dt di segno negativo, poiché la corrente sta diminuendo. La tensione dovuta all'autoinduzione si comporta ora nel circuito come una vera e propria *f.e.m.* e non come una *f.c.e.m.*

Si noti da ultimo che il dispositivo dei due interruttori S_1 ed S_2 permette di aprire un circuito induttivo senza incorrere negli inconvenienti dovuti al carattere inerziale della corrente (forte scintillio ai contatti dell' interruttore che si apre). In pratica, la difficoltà creata dal fatto che la chiusura dell' interruttore S_2 deve avvenire in *sincronismo* con la apertura dell' interruttore S_1, può essere brillantemente girata sostituendo l' interruttore S_2 con un diodo (ad esempio a semiconduttore) inserito

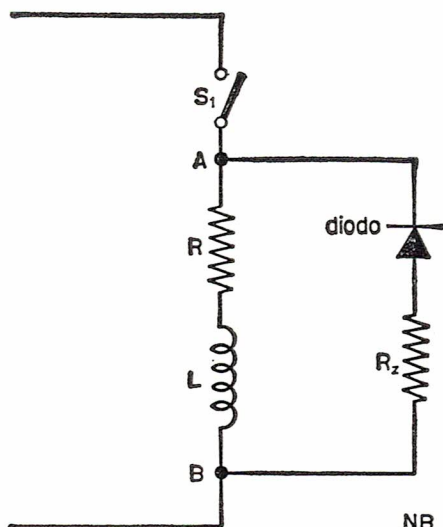



Fig. 4.4138-3

come mostra la fig. 4.4138-3. In questo modo si raggiunge anche la condizione per la quale l' interruttore S_2 si apre automaticamente quando l' interruttore S_1 si richiude. Il diodo quindi chiude ed apre automaticamente la resistenza R_z sul ramo induttivo rispettivamente all' apertura e alla chiusura dell' interruttore S_1.

Esercizio 4.4139

Un circuito magnetico, di lunghezza media $l_m = 20$ cm e sezione $S = 0{,}5$ cm^2, con traferro $\delta = 0{,}1$ mm, porta uniformemente distribuiti due avvolgimenti, rispettivamente di 200 e 100 spire. Nell' ipotesi che la permeabilità magnetica del nucleo sia costante ($\mu_f = 300\ \mu_0$), che i flussi dispersi siano trascurabili e che quindi l'accoppiamento fra i due avvolgimenti sia perfetto, si calcolino il coefficiente M di mutua induzione e l' induttanza dei due avvolgimenti.

Soluzione

Per definizione, si può scrivere che:

$$M = \frac{\Phi_{c_2}}{I_1},$$

ma, non essendovi per ipotesi flussi dispersi, risulta anche che $\Phi_{c_2} = N_2\Phi$, essendo Φ il flusso nel nucleo. D'altronde, per la legge di Hopkinson, si ha che $\Phi = \dfrac{N_1 I_1}{\mathcal{R}}$. In definitiva si ottiene:

$$M = \frac{\Phi_{c_2}}{I_1} = \frac{N_2\Phi}{I_1} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}},$$

ove $\mathcal{R}$ è la riluttanza totale del circuito magnetico. Questa, con i dati del problema, osservando che per la piccolezza del traferro $l_f \cong l_m$, vale:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_0 = \frac{l_f}{\mu_f S} + \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{0{,}20}{300 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{10^{-4}}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}} = 12{,}2 \cdot 10^{6}\ \mathrm{H}^{-1}.$$

Pertanto il coefficiente M assume il seguente valore:

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}} = \frac{200 \cdot 100}{12{,}2 \cdot 10^{6}} = 1{,}64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H};$$

mentre il coefficiente di autoinduzione L_1 del primo avvolgimento ammonta a:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} = \frac{4 \cdot 10^{4}}{12{,}2 \cdot 10^{6}} = 3{,}28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H},$$

e quello L_2 del secondo avvolgimento risulta:

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} = \frac{10^{4}}{12{,}2 \cdot 10^{6}} = 0{,}82 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}.$$

Ottenuti i valori di L_1 ed L_2 si potrà controllare naturalmente quello di M mediante la formula:

$$M = \pm K \sqrt{L_1 L_2},$$

ove $K = 1$, per l'ipotesi di accoppiamento perfetto. Si ha dunque:

$$\sqrt{L_1 L_2} = 10^{-3} \sqrt{3{,}28 \cdot 0{,}82} = 1{,}64 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H},$$

valore che corrisponde a quello già trovato più sopra per M.

Esercizio 4.41310

Si trovi il valore del coefficiente di mutua induzione esistente fra un filo rettilineo ed un avvolgimento toroidale in aria ($r_m = 20$ cm,

$S = 0{,}6 \times 0{,}8$ cm, $N = 1000$ spire), disposti fra di loro in modo tale che l'asse del filo coincida con l'asse del toro (vedi fig. 4.41310-1).

Soluzione

Tutto il flusso prodotto dall'avvolgimento toroidale (circuito 1), salvo quello disperso, che del resto in questo caso risulta trascurabile, è concatenato col circuito costituito dal filo conduttore rettilineo (circuito 2). Pertanto, indicando con I_1 la corrente che circola nell' avvolgimento toroidale ed osservando che il campo magnetico creato da questo si può ritenere di intensità costante entro lo spazio torico, per il fatto che piccole sono le dimensioni radiali della sezione in confronto con il raggio medio del toro, si ha:

$$M = \frac{\Phi_{c_2}}{I_1} = \frac{SB_{01}}{I_1} = \frac{S\mu_0 \dfrac{NI_1}{2\pi r_m}}{I_1} = \mu_0 \frac{NS}{2\pi r_m} =$$

$$= 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{10^3 \cdot 0{,}48 \cdot 10^{-4}}{1{,}256} = 48 \text{ nanohenry} .$$

Naturalmente il coefficiente M si poteva calcolare anche come rapporto Φ_{c_1}/I_2. In quest' ultimo caso il flusso che si concatena col circuito 1, cioè con il toro, è dovuto a quella parte di linee di forza prodotte dal conduttore rettilineo che vanno a confinarsi entro l'avvolgimento torico. Il risultato finale che così si ottiene è, ovviamente, lo stesso.

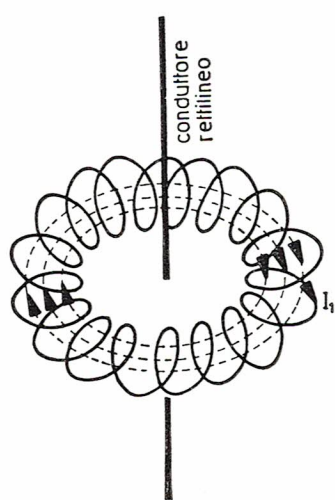



Fig. 4.41310-1

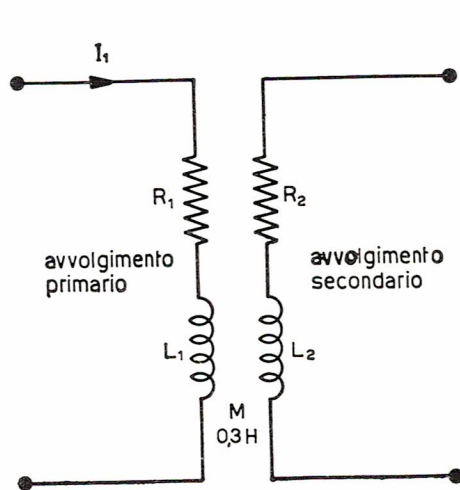



Fig. 4.41311-1

Esercizio 4.41311

Nell'avvolgimento primario del trasformatore riportato in fig. 4.41311-1, l'intensità della corrente si porta da 10 a 6 ampere in 3/10 di secondo. Quale sarà il valor medio della tensione indotta nell'avvolgimento secondario ?

Soluzione

La tensione indotta nel secondo avvolgimento, quando varia la corrente nel primo avvolgimento, è espressa, come è noto, dalla relazione generale :

$$v_{i2} = - M \frac{di_1}{dt},$$

la quale però dà per v_{i2} il valore istantaneo, dato che la variazione della corrente che vi compare avviene in un tempo infinitesimo. Quando la variazione della corrente avviene invece in un intervallo di tempo qualsiasi $(t_1 \div t_2)$ allora, in analogia ad esempio con la formula 4.42-2 del testo, l'espressione :

$$- M \frac{I_1'' - I_1'}{t_2 - t_1}$$

fornisce il valor medio della *f.e.m.* mutua indotta. È quanto serve in questo problema. Si deduce così che :

$$V_{i_2,m} = - 0{,}3 \frac{6 - 10}{0{,}3} = 4 \text{ volt}.$$

4.5 16 esercizi completamente svolti di elettromagnetismo

Esercizio 4.51

Si trovi il valore che assume il campo magnetico nel centro di una spira, di raggio $r = 10$ cm, percorsa da una corrente $I_1 = 0{,}1$ A e posta

nell'aria, nel cui piano giacciono due conduttori rettilinei percorsi rispettivamente dalla corrente $I_2 = 0{,}2$ A e $I_3 = 0{,}3$ A, disposti come in fig. 4.51-1.

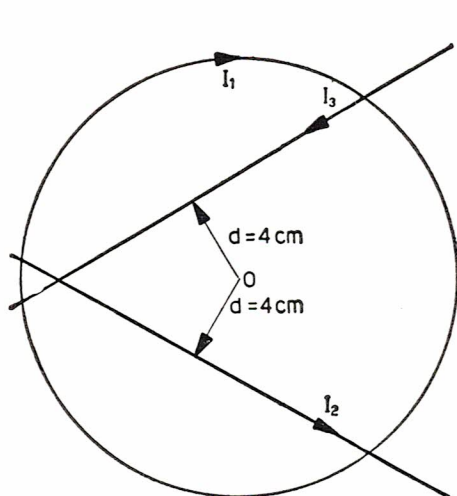



Fig. 4.51-1

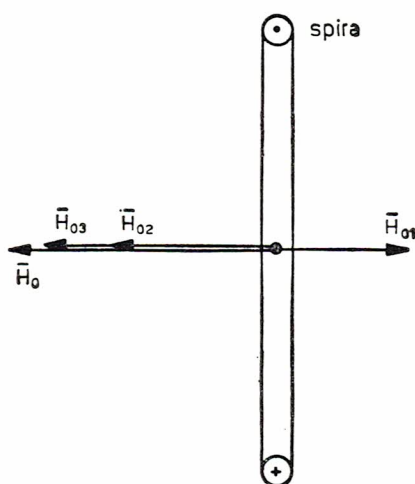



Fig. 4.51-2

Soluzione

Il vettore campo magnetico $\overline{H}_0$ nel punto O è la risultante vettoriale dei campi magnetici $\overline{H}_{01}$, $\overline{H}_{02}$, $\overline{H}_{03}$ dovuti ai tre circuiti dati, che però si possono considerare agenti separatamente. D'altronde il campo $\overline{H}_{01}$ risulta ortogonale al piano contenente la spira e ha il verso che appare in fig. 4.51-2, ma anche i campi $\overline{H}_{02}$ ed $\overline{H}_{03}$ risultano ortogonali in O al piano contenente la spira, con i versi indicati in fig. 4.51-2.

I moduli di questi vettori valgono d'altra parte:

$$H_{01} = \frac{I_1}{2\,r} = \frac{0{,}1}{2 \cdot 0{,}1} = 0{,}500 \text{ Asp/m}$$

$$H_{02} = \frac{I_2}{2\pi d} = \frac{0{,}2}{6{,}28 \cdot 0{,}04} = 0{,}796 \text{ Asp/m}$$

$$H_{03} = \frac{I_3}{2\pi d} = \frac{0{,}3}{6{,}28 \cdot 0{,}04} = 1{,}195 \text{ Asp/m}\,,$$

per cui, si veda la fig. 4.51-2, si ha che:

$$H_0 = H_{02} + H_{03} - H_{01} = 0{,}796 + 1{,}195 - 0{,}500 = 1{,}491 \text{ Asp/m}\,.$$

Esercizio 4.52

Si trovi l'andamento delle linee di forza del campo magnetico esistente fra le espansioni polari di un magnete a forma di ferro di cavallo, quando fra queste si trova un conduttore rettilineo percorso da corrente, disposto ortogonalmente all'asse dei poli (vedi fig. 4.52-1).

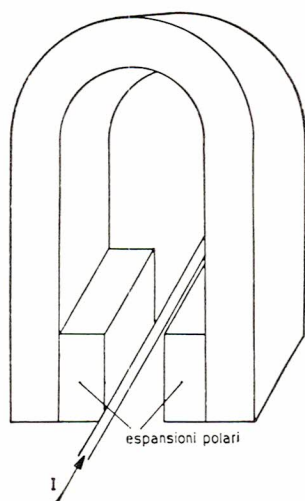



Fig. 4.52-1

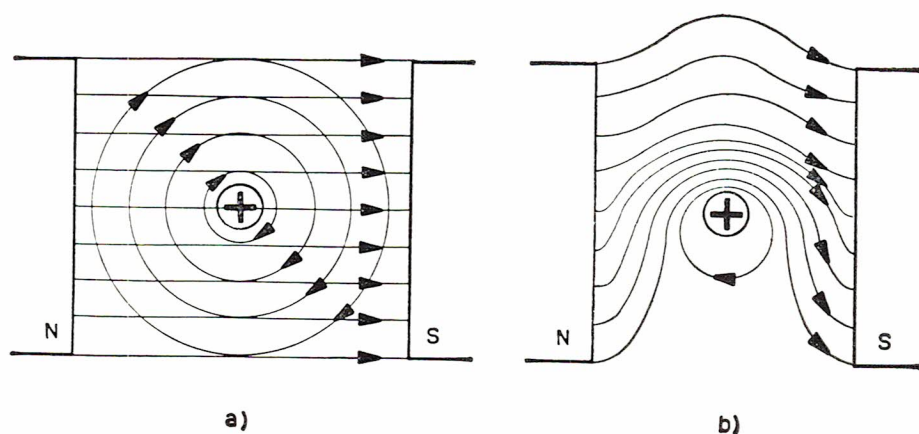



Fig. 4.52-2

Soluzione

Nella zona centrale, tra le espansioni polari, le linee di forza giacciono evidentemente su piani ortogonali al conduttore. Prendendo uno di questi piani, le linee di forza risultano allora come in fig. 4.52-2b, poiché

il campo magnetico, inizialmente uniforme fra le espansioni polari, risulta deformato dall'azione della corrente nel conduttore che agisce con linee di forza circolari (vedi fig. 4.52-2a).

Esercizio 4.53

Si trovi la lunghezza di un solenoide rettilineo in aria di sezione circolare (r = 1 cm), a spire serrate, affinché il campo magnetico nel punto centrale differisca dell' 1 % dal valore che avrebbe in tale punto se il solenoide fosse di lunghezza molto grande (infinita).

Soluzione

Nel caso del solenoide di lunghezza molto grande, il campo magnetico H_0 al centro è espresso dalla formula:

$$H_0 = \frac{NI}{l},$$

mentre, se il solenoide non è molto lungo, il campo magnetico H'_0, sempre al centro, può essere espresso mediante la formula 4.15-4 del testo, cioè, per essere nel nostro caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ (vedi fig. 4.53-1):

$$H'_0 = \frac{NI}{2\,l}\, 2 \cos\alpha = \frac{NI}{l} \cos\alpha .$$

Per soddisfare il problema dovrà essere perciò:

$$\frac{H_0 - H'_0}{H_0} = 0{,}01 ,$$

da cui si deduce immediatamente, con le espressioni dei campi magnetici sopra trovate, che:

$$\cos\alpha = 0{,}99 ,$$

cioè che:

$$\alpha = 8^0\, 6' .$$

D'altronde fra la lunghezza assiale l, il raggio r e l'angolo α intercorre la seguente relazione (vedi fig. 4.53-1):

$$l = 2\, r \cot g\alpha ,$$

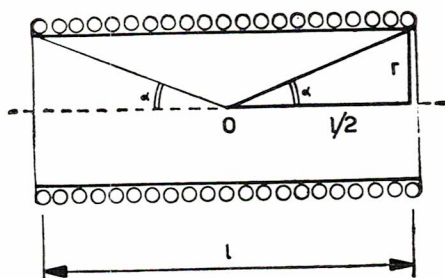



Fig. 4.53-1

per cui, essendo $\cot g\alpha = \cot g\, 8^0\, 6' = 7{,}02$, si otterrà che:

$$l = 2 \cdot 7{,}02 \cong 14 \text{ cm},$$

cioè la lunghezza assiale del solenoide deve essere sette volte il suo diametro.

Esercizio 4.54

Quanti millimetri di interferro si possono sostituire ad ogni metro di circuito ferromagnetico avente permeabilità $\mu_f = 5000\ \mu_0$ affinché il circuito, considerato a sezione costante, non cambi riluttanza?

Soluzione

Poiché lo spazio d'aria lungo l_0 (interferro) deve avere la stessa riluttanza di quella del tronco in ferro lungo l_f, si potrà subito affermare che:

$$l_0 = \frac{\mu_0}{\mu_f} l_f = \frac{l_f}{\mu_{f,r}},$$

per cui, con i dati del problema, poiché 1 metro equivale a 1000 millimetri, :

$$l_0 = \frac{1000}{5000} = 0{,}2 \text{ mm}.$$

In sostanza, la riluttanza di un interferro di 2/10 mm equivale dunque a quella di un tronco lungo un metro costituito con lega ferromagnetica di permeabilità relativa eguale a 5000.

Esercizio 4.55

Un avvolgimento toroidale, avente la lunghezza media $l_m = 20$ cm, porta 400 spire percorse da una corrente di 500 mA e ha un nucleo costituito per tre quarti da una lega ferromagnetica ($\mu_r = 1000$) e per il rimanente da aria. Se la parte di nucleo in ferro fosse successivamente tolta, il campo magnetico, nel tratto in aria varierebbe di valore? E di quanto?

Soluzione

Il campo magnetico H'_0 nel tratto in aria, nel primo caso (nucleo parzialmente in ferro), risulta certamente più intenso rispetto a quello H''_0 nel secondo caso. Ciò è dovuto al fatto che, nel primo caso, la tensione magnetica assorbita da quella parte di linea di forza sviluppantesi nel ferro ($H_f l_f$) è trascurabile rispetto a quella che agisce sulla rimanente parte sviluppantesi in aria ($H'_0 l_0$), per cui, praticamente, tutta la *f.m.m.* dell'avvolgimento viene ad agire solo su di un quarto di linea di forza, quella parte cioè che si sviluppa in aria: il campo magnetico perciò è più intenso rispetto a quando la stessa *f.m.m.* agirà invece sulla intera linea di forza, il che avviene col nucleo interamente in aria.

Numericamente si procederà come segue. Per trovare H'_0 si farà ricorso alla legge di Hopkinson, quindi:

$$H'_0 = \frac{B'_0}{\mu_0} = \frac{NI}{\mu_0 S \mathcal{R}'} = \frac{NI}{\mu_0 S\left(\dfrac{l_f}{\mu_f S} + \dfrac{l_0}{\mu_0 S}\right)} = \frac{NI}{\dfrac{l_f}{\dfrac{\mu_f}{\mu_0}} + l_0} =$$

$$= \frac{200}{\dfrac{0,15}{1000} + 0,05} = \frac{200}{0,05015} \cong 4000 \text{ Asp/m } (^1);$$

mentre per il calcolo di H''_0, essendo il nucleo omogeneo, cioè interamente in aria, si ricorrerà alla solita formula:

$$H''_0 = \frac{NI}{l_m} = \frac{200}{0,20} = 1000 \text{ Asp/m}.$$

La variazione è stata dunque di 3000 Asp/m.

---

(1) I calcoli confermano dunque che la *f.m.m.* dovuta all'avvolgimento agisce praticamente tutta sul tronco in aria: ciò risulta conseguenza del fatto che la riluttanza del tronco in ferro è trascurabilissima rispetto a quella del tronco in aria, il quale qui si presenta di notevole lunghezza.

Esercizio 4.56

Si trovino i valori assunti dai flussi di induzione nella struttura magnetica in ferro ($\mu_f = 7960\ \mu_0$) riportata in fig. 4.56-1.

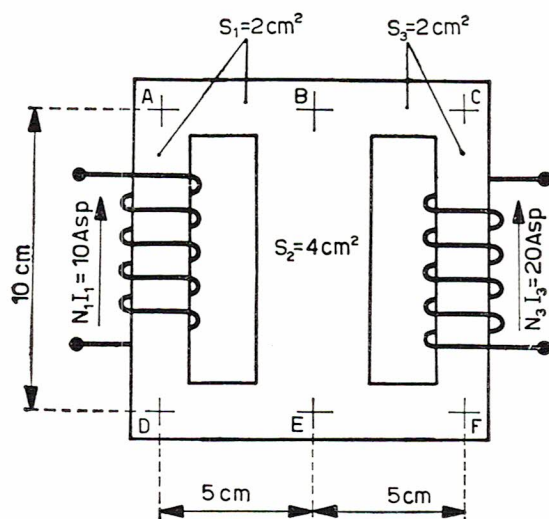



Fig. 4.56-1

Soluzione

Poiché la struttura magnetica data risulta composta da tre rami (cioè quello $BADE$ di riluttanza $\mathcal{R}_1$, quello BE di riluttanza $\mathcal{R}_2$, quello $BCFE$ di riluttanza $\mathcal{R}_3$, con $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$), si assegneranno ai relativi flussi magnetici dei versi arbitrari, come è stato fatto in fig. 4.56-2. Quindi si scriveranno le seguenti equazioni:

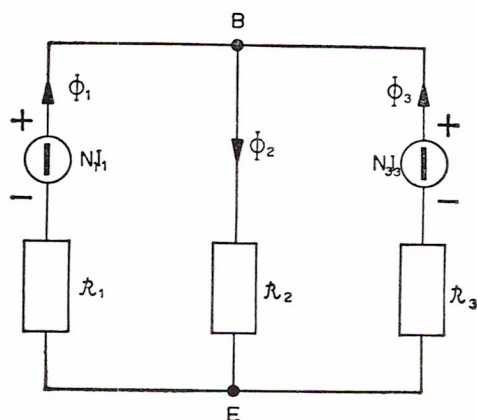



Fig. 4.56-2

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \qquad \text{nodo } B$$

$$\mathcal{R}_1\Phi_1 + \mathcal{R}_2\Phi_2 = N_1I_1 \qquad \text{maglia } ABEDA$$

$$\mathcal{R}_1\Phi_1 - \mathcal{R}_3\Phi_3 = N_1I_1 - N_3I_3 \qquad \text{maglia } ABCFEDA.$$

D'altronde, con i dati del problema, le riluttanze dei tre rami valgono, ricordando che la permeabilità assoluta del materiale impiegato è $\mu_f = 7960 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} = 10^{-2}$ H/m, :

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3 = \frac{l_1}{\mu_f S_1} \cong \frac{0{,}20}{10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 10^5 \text{ henry}^{-1}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_f S_2} \cong \frac{0{,}10}{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 0{,}25 \cdot 10^5 \text{ henry}^{-1} .$$

Il sistema scritto in precedenza diventa pertanto :

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0$$

$$10^5\Phi_1 + 0{,}25 \cdot 10^5\Phi_2 = 10$$

$$10^5\Phi_1 - 10^5\Phi_3 = -10 .$$

Da questo, dopo aver eliminato Φ_3, si ottiene quest'altro sistema :

$$\Phi_1 + 0{,}25\,\Phi_2 = 10 \cdot 10^{-5}$$

$$2\,\Phi_1 - \Phi_2 = -10 \cdot 10^{-5},$$

che risolto porta ai seguenti risultati :

$$\Phi_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

$$\Phi_2 = 20 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

Di conseguenza:

$$\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1 = 15 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} .$$

D'altronde i versi assegnati all'inizio arbitrariamente (ma logicamente) ai tre flussi sono risultati giusti.

N.B. L'esercizio può essere risolto vantaggiosamente applicando il principio di Millman alla rete di fig. 4.56-2.

Esercizio 4.57

Un nucleo toroidale in ferro, di sezione costante $S = 2$ cm² e di lunghezza media $l_m = 40$ cm, con traferro dello spessore $\delta = 0{,}5$ mm,

porta uniformemente distribuito un avvolgimento formato da 100 spire.

Nota la curva di magnetizzazione della ferrolega costituente il nucleo (vedi fig. 4.57-1), si trovi il valore della corrente di eccitazione affinché l'induzione nel ferro assuma il valore $B = 0{,}4\ \mathrm{Wb/m^2}$.

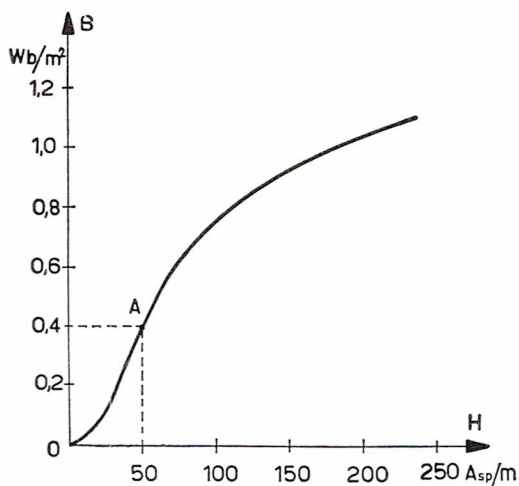



Fig. 4.57-1

Soluzione

Il circuito magnetico è costituito da due tronchi in serie: quello in ferro, lungo l_f ($l_f \cong l_m$) e quello in aria lungo δ. Indicato con H_f ed H_0 rispettivamente il campo magnetico nel ferro e nel traferro, campi magnetici che sono uniformi, si potrà scrivere, per la legge della circuitazione, che:

$$H_f\, l_f + H_0 \delta = NI\,,$$

cioè che le amperspire (NI) necessarie alla magnetizzazione del nucleo sono assorbite in parte dal tronco in ferro, con la tensione magnetica $\mathfrak{F}_f = H_f\, l_f$, e nella restante parte dal traferro con la tensione magnetica $\mathfrak{F}_0 = H_0 \delta$.

Ora, la tensione magnetica $\mathfrak{F}_f$ impegnata dal tronco in ferro è facilmente calcolabile poiché, dalla curva di magnetizzazione riportata in fig. 4.57-1, si deduce che nel ferro vi è un'induzione di 0,4 Wb/m² (punto A) per un campo magnetico $H_f = 50$ Asp/m. Pertanto si ha:

$$\mathfrak{F}_f = H_f l_f = 50 \cdot 0{,}40 = 20\ \mathrm{Asp}\,.$$

La tensione magnetica assorbita dal traferro si calcola anch'essa immediatamente poiché, essendo il nucleo torico, per le condizioni date dal problema, praticamente un tubo di flusso, si ha che l' induzione nel traferro vale ancora 0,4 Wb/m². Perciò risulta:

$$\mathfrak{F}_0 = H_0 \delta = \frac{B\delta}{\mu_0} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}256 \cdot 10^{-6}} = 159{,}2\ \mathrm{Asp}\,.$$

In definitiva, occorrono dunque le seguenti amperspire:

$$NI = \mathfrak{F}_f + \mathfrak{F}_0 = 20 + 159{,}2 = 179{,}2 \text{ Asp},$$

cui corrisponde nell'avvolgimento una corrente di 1,792 A.

Esercizio 4.58

Si trovi il valore assunto dall' induzione nel nucleo toroidale studiato nell'esercizio precedente, quando la corrente di eccitazione ha l' intensità di 3 ampere.

Soluzione

Il problema non può essere risolto direttamente: ciò perché non è possibile procedere al calcolo delle amperspire impegnate dal circuito ferromagnetico, dato che non è noto il valore del campo magnetico nel ferro (non essendo noto quello dell' induzione, grandezza questa appunto incognita), ovvero anche perché non è possibile calcolare la riluttanza del tronco in ferro, poiché non è noto il valore della permeabilità magnetica ($\mu_f = B_f/H_f$).

Il problema viene risolto allora indirettamente; precisamente incominciando col calcolare i diversi valori di amperspire necessari per determinare prefissati valori di flusso (o di induzione se il circuito è a sezione costante, come nel nostro caso) e passando a tracciare quindi con tali dati un grafico $\Phi = f(NI)$, cioè la cosiddetta caratteristica di magnetizzazione del circuito magnetico dato (vedi fig. 4.58-1). Ciò è possibile perché, pur disponendo di non molti punti, questi stanno su di una curva continua simile a quella di magnetizzazione del ferro [1].

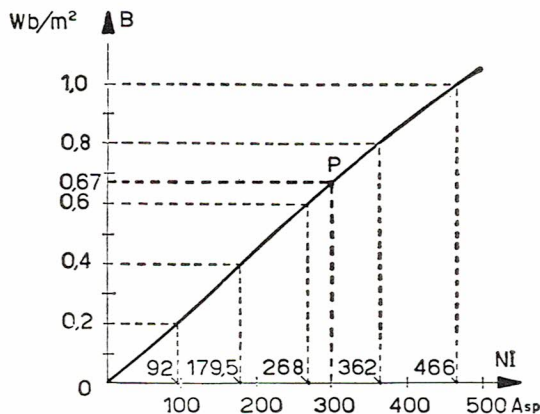



Fig. 4.58-1

[1] Quando nel circuito magnetico vi è traferro, la relativa caratteristica di magnetizzazione, per bassi valori di induzione, si presenta assai più lineare della curva di magnetizzazione del materiale magnetico costituente il nucleo.

Solo così è possibile risalire al valore del flusso (o dell' induzione se la sezione è costante), fissato un certo valore di *f.m.m.*, poiché basterà individuare sulla caratteristica di magnetizzazione, tracciata come indicato sopra, il punto avente per ascissa le amperspire assegnate : la corrispondente ordinata darà allora il valore del flusso (quindi quello dell' induzione).

In fig. 4.58-1 si è tracciata la caratteristica di magnetizzazione per il circuito dell'esercizio precedente, precisamente calcolando le *f.m.m.* corrispondenti ai valori di induzione di 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0 $\mathrm{Wb/m^2}$. L' induzione corrispondente ad una magnetizzazione dovuta a $3 \cdot 100 = 300$ amperspire, come è richiesto dal presente problema, sarà individuata allora dal punto P e vale circa 0,67 $\mathrm{Wb/m^2}$.

Esercizio 4.59

Si trovi il potenziale acceleratore necessario affinché lo ione dell'esercizio 4.374 possa percorrere un tratto di orbita circolare del diametro di 40 cm.

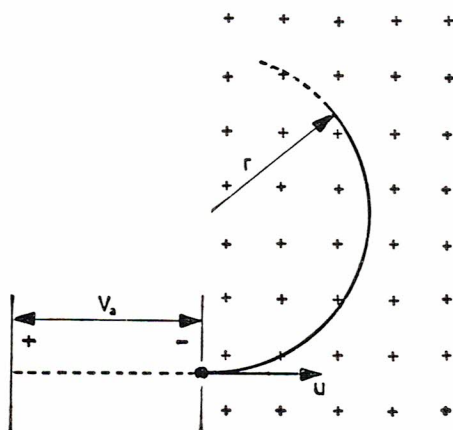



Fig. 4.59-1

Soluzione

Lo ione in parola descriverà un'orbita circolare di raggio r se entrerà nel campo magnetico con la seguente velocità u (vedi fig. 4.59-1) :

$$u = \frac{rB_0 q}{m},$$

che, con i dati del problema, risulta espressa dal valore:

$$u = \frac{20\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-1}\cdot 2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}}{66\cdot 10^{-27}} = 9{,}7\cdot 10^{4} \text{ m/sec}.$$

Poiché d'altronde lo ione è accelerato nel vuoto, nell' istante in cui esso lascerà l'elettrodo acceleratore, tutta l'energia dovuta al potenziale acceleratore V_a ($W = V_a q$) sarà andata a beneficio della sua energia cinetica $\left(W = \frac{1}{2}mu^2\right)$, per cui varrà la seguente equazione:

$$\frac{1}{2}mu^2 = V_a q\,,$$

dalla quale si ricava quindi che:

$$V_a = \frac{mu^2}{2\,q} = \frac{66\cdot 10^{-27}\cdot 94{,}1\cdot 10^{8}}{2\cdot 2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}} = 970 \text{ volt}.$$

Esercizio 4.510

Si trovi il diametro dell'orbita circolare descritta da un elettrone che entra ortogonalmente alle linee di forza di un campo di induzione uniforme $B_0 = 0{,}05$ Wb/m², con velocità pari ad 1/5 di quella della luce. Il moto avviene nel vuoto assoluto.

Soluzione

Assumendo per la velocità della luce il valore di $300\cdot 10^6$ m/sec, quella dell'elettrone ammonterà perciò a $60\cdot 10^6$ m/sec. A tale velocità la massa effettiva dell'elettrone non differisce ancora di molto (2 %) da quella in quiete ([1]). Per m_e potrà essere quindi usato il solito valore ($m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg).

Dalla formula 4.33-3 del testo si ricava pertanto:

$$2r = \frac{2um_e}{B_0 q_e} = \frac{2\cdot 60\cdot 10^{6}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}{5\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}} = 1{,}36 \text{ cm}.$$

([1]) È noto dalla Fisica che la massa m_{eu} di un elettrone in moto, avente la velocità u, risulta maggiore di quella in quiete m_e. Per il calcolo vale la seguente formula:

$$m_{eu} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_o}\right)^2}}\,,$$

dove u_o è la velocità della luce.

Esercizio 4.511

Un motore a corrente continua ha sei poli (lunghezza assiale 30 cm) ed è stato costruito in modo tale che in ogni istante sotto ciascun polo, ove l' induzione presenta un' intensità media di 0,9 Wb/m², si vengono a trovare sempre 30 conduttori di indotto, il diametro del quale è di 16 cm.

Si calcoli la potenza meccanica sviluppata dal motore nell' ipotesi che i conduttori di indotto siano percorsi da una corrente di 12 ampere e che l' indotto compia 800 giri/minuto.

Soluzione

La potenza sviluppata dal motore è esprimibile con la ben nota formula :

$$P = \omega C ,$$

essendo C la coppia elettromagnetica che agisce sull' indotto ed ω la sua velocità angolare.

D'altronde la coppia sviluppata dall' indotto è $6 \cdot 30 = 180$ volte quella sviluppata da un singolo conduttore, per cui si può scrivere, indicando con l ed r rispettivamente la lunghezza attiva dei conduttori e il raggio dell' indotto, che :

$$C = 180\, BlIr = 180 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}30 \cdot 12 . 0{,}08 = 46{,}6 \text{ N/m} ;$$

mentre la velocità angolare ω con i dati del problema ammonta a :

$$\omega = 2\,\pi \frac{n \text{ giri}}{\text{sec}} = 6{,}28 \frac{800}{60} = 83{,}7 \text{ rad/sec.}$$

In definitiva la potenza elettromeccanica cercata vale :

$$P = \omega C = 83{,}7 \cdot 46{,}6 = 3{,}9 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.512

Un circuito chiuso è costituito da un filo conduttore isolato, piegato ad *otto*, come appare in fig. 4.512-1. Si trovi il valore della *f.e.m.* indottavi da un campo di induzione uniforme la cui intensità incrementa linearmente col tempo nella proporzione di 0,02 Wb/m² per millisecondo. Il circuito giace su di un piano ortogonale alle linee di flusso magnetico.

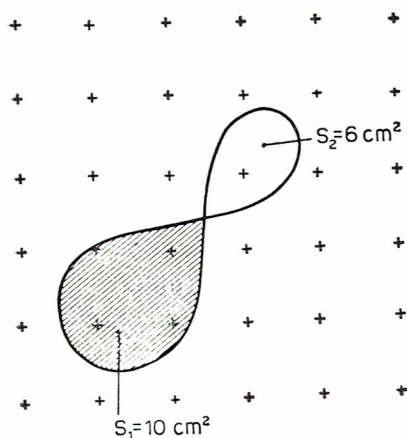



Fig. 4.512 1

Soluzione

Per il calcolo della *f.e.m.* indotta V_i si ricorrerà alla formula $-\Delta\Phi_c/\Delta t$ la quale, nel nostro caso, diventa assai semplicemente:

$$V_i = - S \frac{\Delta B}{\Delta t} .$$

Osservando d'altronde che l'area S del circuito é composta da due aree S_1 ed S_2, le quali presentano le normali orientate in versi opposti (vedi fig. 4.512-2a), si può scrivere subito che:

$$S = S_1 - S_2 ,$$

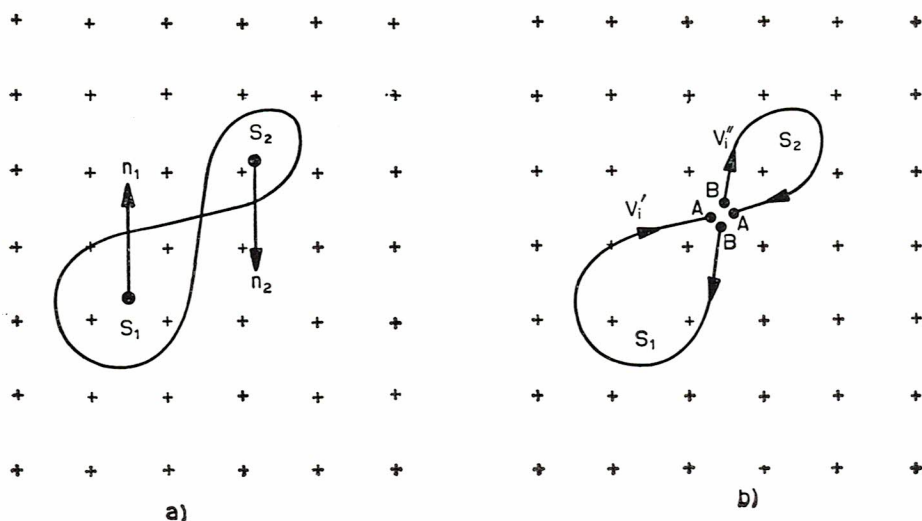



Fig. 4.512-2

e quindi di conseguenza che:

$$V_i = -(10 - 6)\,10^{-4}\,\frac{20 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = -8 \cdot 10^{-3} \text{ volt}.$$

A questo risultato si può pervenire ragionando anche in altro modo, cioè osservando come la *f.e.m.* V_i non sia altro che la risultante di due *f.e.m.* V_i' e V_i'', ciascuna delle quali è dovuta ad un ansa dell'otto del circuito dato (vedi fig. 4.512-2*b*). Poiché le due *f.e.m.* agiscono in opposizione, si ha subito:

$$V_i = V_i' - V_i'' = -S_1\,\frac{\Delta B}{\Delta t} - \left(-S_2\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\right) = -(S_1 - S_2)\,\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Esercizio 4.513

Un nucleo toroidale di ferro ($S = 8$ cm^2, $l_m = 30$ cm, $\mu_r = 2000$) porta un avvolgimento primario di $N_1 = 300$ spire ed uno secondario di $N_2 = 100$ spire, strettamente accoppiati fra di loro.

Si trovi la quantità di elettricità Q che fluisce nel circuito secondario di resistenza totale $R_2 = 40\ \Omega$, quando nel primario la corrente, del valore di 0,1 A, viene ad essere invertita nel suo verso (vedi fig. 4.513-1).

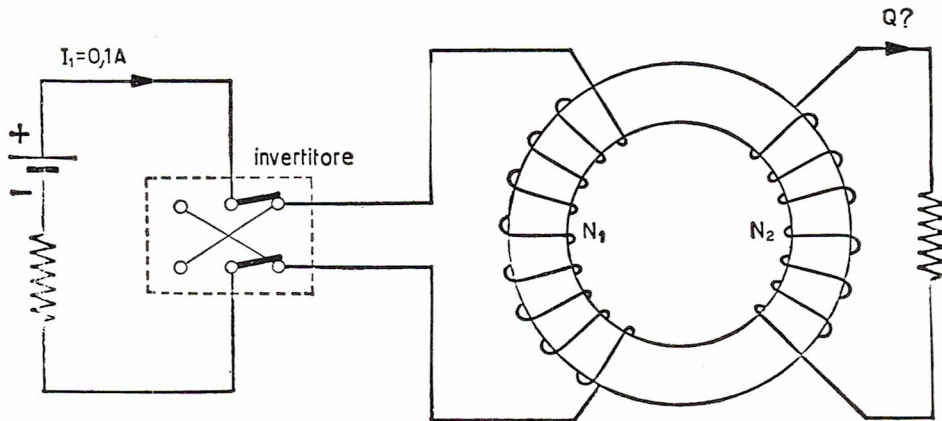



Fig. 4.513-1

Soluzione

Si incominci a trovare il valore del flusso magnetico nel nucleo quando la corrente primaria ha un'intensità di 0,1 ampere (quindi prima e dopo l'inversione):

$$\Phi = \mu\,\frac{N_1 I_1}{l_m}\,S = \frac{2000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 0{,}1 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{0{,}30} = 0{,}201 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}.$$

Pertanto il flusso concatenato con l'avvolgimento secondario ammonta a:

$$\Phi_{c_2} = N_2\Phi = 100 \cdot 0{,}201 \cdot 10^{-3} = 20{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}\,.$$

D'altronde il fenomeno che si viene a manifestare, quando si ha l'inversione di corrente nell'avvolgimento primario, è quello dell'induzione elettromagnetica, la quale determinerà nell'avvolgimento secondario un impulso di tensione. Ora questo impulso di tensione [$V_{i\,2,m} \cdot t$ (1)] può essere calcolato assai facilmente poiché si ha che:

$$V_{i\,2,m} \cdot t = -(\Phi''_{c_2} - \Phi'_{c_2})\,.$$

Ma nel nostro caso $\Phi''_{c_2} = -\Phi'_{c_2} = \Phi_{c_2}$, per cui:

$$V_{i\,2,m} \cdot t = 2\,\Phi_{c_2} = 40{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{volt} \cdot \text{secondo}\,.$$

Poiché il circuito secondario risulta chiuso, a quest'impulso di tensione corrisponderà un impulso di corrente, il quale altro non è che la quantità di elettricità Q cercata. Si ha dunque:

$$Q = \frac{V_{i\,2,m} \cdot t\ (^2)}{R_2} = \frac{40{,}2 \cdot 10^{-3}}{40} \cong 1\ \text{mC}\,,$$

che rappresenta la quantità di elettricità che fluisce nel circuito secondario durante l'inversione della corrente primaria.

Esercizio 4.514

Nel centro di un solenoide rettilineo molto lungo ($l = 40$ cm, $N = 800$ spire) è stata collocata una piccola spira chiusa del raggio $r = 2$ mm. Questa spira è ortogonale all'asse del solenoide.

Si trovi il valore medio della tensione indotta nella spira e il diagramma del suo andamento nel tempo, sapendo che il solenoide, inizialmente diseccitato, viene portato in eccitazione con una corrente di 5 ampere praticamente nel tempo di 80 millisecondi.

Soluzione

Si incominci a calcolare il flusso concatenato con la spira all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo in cui il campo magnetico del solenoide ha variato.

---

(1) t rappresenta il tempo in cui avviene la variazione del flusso concatenato considerato.

(2) L'induttanza dell'avvolgimento secondario non ha ovviamente alcuna influenza sulla quantità di elettricità che fluisce nel circuito, non così sul valore istantaneo della corrente.

All' inizio il flusso concatenato è nullo, poiché è nulla la corrente di eccitazione del solenoide. Quindi $\Phi_{c_1} = 0$. Alla fine il flusso concatenato vale invece:

$$\Phi_{c_2} = B_0 S = \mu_0 \frac{NI}{l} \pi r^2 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{800 \cdot 5}{0{,}4} 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 0{,}158 \cdot 10^{-6} \text{ Wb} .$$

Il valor medio V_{im} della tensione indotta ammonta dunque a:

$$V_{im} = - \frac{\Phi_{c_2} - \Phi_{c_1}}{t} = - \frac{0{,}158 \cdot 10^{-6}}{80 \cdot 10^{-3}} \cong -2 \ \mu\text{V} .$$

Per quanto riguarda il tracciamento qualitativo dell'andamento nel tempo della *f.e.m.* v_i si osservi che, essendo noto quello della corrente di eccitazione del solenoide (affetto da resistenza R ed induttanza L), poiché questa cresce con legge esponenziale fino a portarsi al valore di 5 ampere (si veda il diagramma *a* di fig. 4.514-1), sarà pure noto l'an-

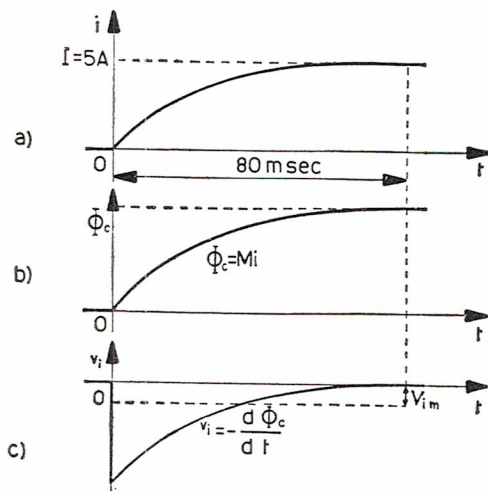



Fig. 4.514-1

damento del flusso magnetico concatenato con la spira (vedi diagramma *b* di fig. 4.514-1). Non rimarrà perciò che passare da questo diagramma a quello della tensione v_i con i metodi accennati nel § 4.42. È quanto appare in fig. 4.514-1*c*.

Esercizio 4.515

Si trovi il valore del coefficiente di mutua induzione M esistente fra una spira circolare di diametro molto piccolo ($2r_1 = 1$ cm) e una

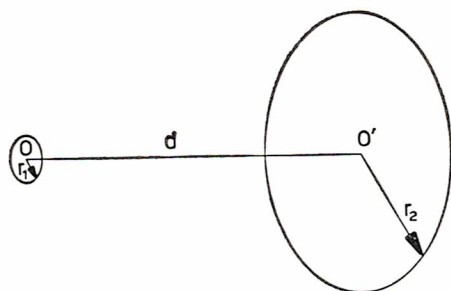



Fig. 4.515-1

di diametro molto grande ($2\,r_2 = 16$ cm), poste alla distanza $d = 30$ cm. Le due spire giacciono su piani paralleli e i loro assi coincidono (vedi fig. 4.515-1).

Soluzione

Conviene calcolare il coefficiente M col seguente rapporto:

$$M = \frac{\Phi_{c_1}}{I_2},$$

dove con Φ_{c_1} si intende il flusso concatenato con la spira di piccolo diametro e con I_2 si indica la corrente circolante nella spira di grande diametro.

Infatti il calcolo dell'espressione del flusso concatenato con la spira di piccolo diametro è assai facile, dato che esso è dovuto al campo magnetico generato dalla seconda spira, campo le cui linee di forza possono considerarsi pressoché ortogonali all'area S_1 della prima spira, a causa della piccolezza delle dimensioni di quest'area in confronto con la distanza d. Inoltre l'intensità di detto campo magnetico, in ciascun punto della superficie S_1, può ritenersi poco differente dal valore che esso assume nel centro O che sta sull'asse. Quindi (vedi formula 4.15-2 del testo):

$$H_0 = \frac{r_2^2}{2\,(r_2^2 + d^2)^{3/2}}\, I_2 .$$

Sarà perciò:

$$\Phi_{c_1} = \mu_0 H_0 S_1 = \mu_0 \frac{r_2^2}{2\,(r_2^2 + d^2)^{3/2}}\, \pi r_1 I_2 ,$$

per cui il coefficiente M varrà in definitiva:

$$M = \frac{\Phi_{c_1}}{I_2} = \pi \mu_0 \frac{(r_1 r_2)^2}{2\,(r_2^2 + d^2)^{3/2}} = 3{,}14 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{16 \cdot 10^{-4}}{2\,[(64 + 900)\,10^{-4}]^{3/2}} =$$

$$= 0{,}106 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H}\,.$$

Esercizio 4.516

Si dica se il coefficiente di mutua induzione di due conduttori rettilinei percorsi da correnti equiverse sia da considerarsi positivo o negativo.

Soluzione

Il coefficiente M è positivo. Infatti, ragionando dal punto di vista energetico, si può osservare come i due conduttori tendano ad avvicinarsi per far assumere al sistema la massima energia elettromagnetica. Poiché d'altronde l'avvicinamento dei conduttori comporta un aumento del valore di M (vedi formula 4.411-4), dalla formula 4.412-1 del testo si deduce che, essendo L_1 ed L_2 costanti, un aumento di energia avviene solo se il coefficiente di mutua induzione M è positivo.

CORRENTI ALTERNATE 5

5.1 Generalità

5.11 Introduzione

Il capitolo delle correnti alternate si occupa dello studio di quelle grandezze elettriche (tensioni, correnti, potenze) che risultano variabili nel tempo, cioè tali che il loro valore varia da istante ad istante, secondo una legge che verrà precisata nei successivi paragrafi. Il fatto fondamentale è che, essendo ora la tensione applicata ad un circuito, o la corrente che vi circola, variabile nel tempo, anche se con legge molto semplice (sinusoidale), ciò porta a dover considerare per gli elementi che compongono il circuito dei fenomeni che in regime stazionario non si manifestavano. Questi fenomeni determinano d'altronde notevoli complicazioni anche se essi, il più delle volte, risultano molto utili in pratica. Per tale motivo lo studio delle correnti alternate sarà più difficile di quello, visto a suo tempo, relativo alle correnti continue.

Lo studio delle correnti alternate non si occupa naturalmente solo delle grandezze elettriche in sé e degli effetti da esse determinate nei principali elementi di circuito impiegati nella realizzazione pratica dei circuiti elettrici, ma anche dei mezzi per calcolare le varie grandezze elettriche in gioco nei circuiti stessi, dai più semplici ai più complessi, cioè, come si dice, dei metodi per la risoluzione dei circuiti elettrici in regime alternativo.

5.12 Grandezze periodiche

Le grandezze periodiche rappresentano per la tecnica un' importante particolare categoria di funzioni variabili nel tempo. Sono queste delle particolari funzioni del tempo che, ad intervalli di tempo regolari, uguali, riprendono a variare con le stesse modalità. Precisamente una

grandezza si dice periodica, di periodo T, quando esiste un valore finito di tempo T tale per cui la grandezza soddisfa la seguente condizione:

5.12-1
$$y(t) = y(t + T) = y(t + 2\,T) = \\ = y(t + 3\,T) = ... = y(t + nT) = ...$$

Come si vede la grandezza y data è *periodica* appunto perché assume valori eguali per intervalli di tempo T eguali, a partire da un qualsiasi istante (vedi fig. 5.12-1). L' intervallo di tempo T si chiama, come già detto, periodo della grandezza data e viene naturalmente misurato in secondi o nei suoi sottomultipli (millisecondo $= 10^{-3}$ secondi; microsecondo $= 10^{-6}$ secondi; nanosecondo $= 10^{-9}$ secondi; ecc.). Naturalmente un secondo conterrà un certo numero, non sempre intero, di periodi: questo numero rappresenta la *frequenza* della grandezza data. Essa viene indicata con la lettera f e misurata in periodi al secondo (abbreviazione per/sec) (1), poiché risulta legata al periodo T della grandezza periodica dalla semplice relazione:

5.12-2
$$f = \frac{1}{T}.$$

A questo punto ci si può chiedere quale sia il significato fisico di una grandezza variabile con legge periodica, ad esempio come quella già vista in fig. 5.12-1. La risposta è semplice: se questa rappresenta una tensione,

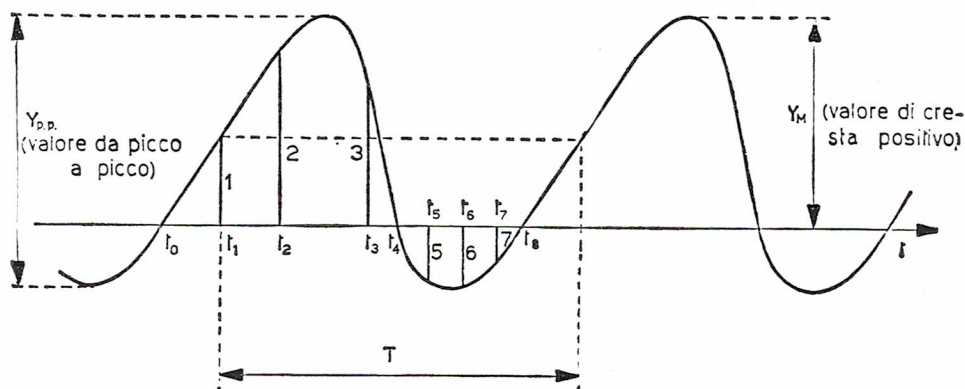



Fig. 5.12-1

cioè una differenza di potenziale fra due punti stabiliti, come potrebbe essere ad esempio fra i morsetti P e Q di un generatore, allora si comprende come la tensione assegnata assumerà valori continuamente varia-

(1) Parallelamente al periodo al secondo (abbreviato talvolta in p/s) viene usato nella tecnica, quale unità di misura per la frequenza, l'hertz (abbr. Hz).

bili da istante ad istante : precisamente all' istante t_0 essa risulterà nulla, all' istante t_1 il suo valore sarà rappresentato, in opportuna scala, dal segmento 1, all' istante successivo t_2 (nella stessa scala) dal segmento 2 e così via. Si noti però che per gli istanti t_5, t_6, t_7 i corrispondenti segmenti 5, 6, 7 sono da considerarsi negativi, cioè di segno opposto ai primi : ciò significa che fra i punti P e Q la tensione ha invertito polarità. Dopodiché (fig. 5.12-1) la tensione riprenderà a variare nello stesso modo. Ora, con le convenzioni usuali, nell' intervallo di tempo compreso fra t_0 e t_4 il punto P è da considerarsi positivo rispetto a Q, mentre in quello successivo da t_4 a t_8 il punto P risulterà negativo rispetto a Q.

Per una corrente variabile secondo la legge rappresentata in fig. 5.12-1, si può dire invece che nell' intervallo di tempo compreso fra t_0 e t_4 la corrente fluirà nel circuito sempre nello stesso verso (se non altrimenti specificato, in quello convenzionale) pur presentando intensità diverse : così ad esempio nell' istante t_2 detta corrente avrà intensità maggiore che non nell' istante t_1. D'altronde nell' intervallo di tempo $t_4 \div t_8$ la corrente invertirà senso di percorrenza rispetto al verso precedente, poiché ora le ordinate del diagramma sono diventate negative, cioè di segno opposto a quelle dell' intervallo precedente ($t_0 \div t_4$). Si noti che negli istanti t_0, t_4, t_8 .... la corrente è nulla, cioè nel circuito non fluirà corrente.

È necessario soffermarsi ancora per dare qualche utile definizione in merito alle funzioni periodiche.

Si definisce valor massimo, o valore di cresta positivo, di una funzione periodica (si indicherà con lettera maiuscola avente una M per indice) il valore massimo positivo presentato dalla grandezza (ad esempio Y_M di fig. 5.12-1). Qualora la curva rappresentante la funzione data tagli l'asse dei tempi, come è nel caso di fig. 5.12-1, si ha anche un valore di cresta negativo, che coincide con il minimo della funzione stessa. In quest' ultimo caso la somma aritmetica dei due valori di cresta dà il cosiddetto valore da picco a picco ($Y_{p.p.}$).

Si definisce valor medio (precisamente valor medio nel periodo e si indicherà con lettera maiuscola avente una m come indice) la quantità :

5.12-3
$$Y_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} y dt \, .$$

Come è noto dall' Analisi Matematica, l' integrale $\int_t^{t+T} y dt$ esprime l'area totale (risultante) che la curva rappresentante la funzione y data determina con l'asse orizzontale entro l' intervallo di tempo T, e ciò a partire da un qualsiasi istante t. Perciò il valore medio Y_m rappresenta quel particolare valore di ordinata che, moltiplicata per il

segmento T, determina un rettangolo la cui area ($Y_m T$) eguaglia appunto il valore dell'area individuata dalla funzione in tale stesso intervallo di tempo (infatti dalla 5.12-3 risulta $Y_m T = \int_t^{t+T} y\, dt$).

In fig. 5.12-2 l'area del rettangolo tratteggiato rappresenta dunque il termine $\int_t^{t+T} y\, dt$, cioè l'area determinata dall'asse delle ascisse

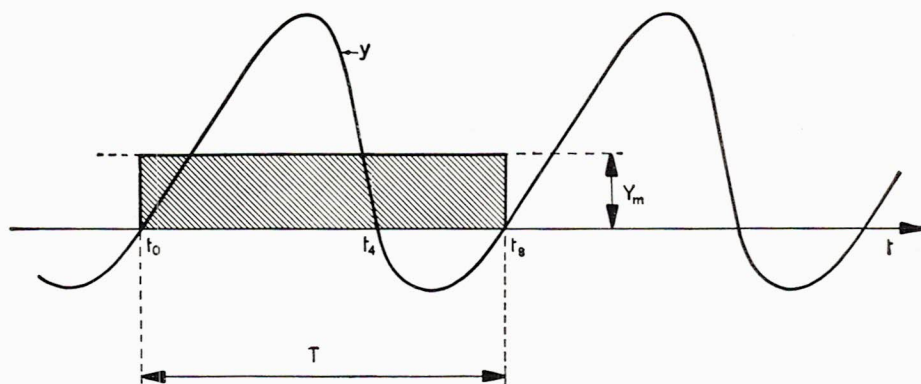



Fig. 5.12-2

con il ramo positivo della curva fra gli istanti t_0 e t_4 meno quella determinata dall'asse delle ascisse con il ramo negativo della curva fra gli istanti t_4 e t_8. Poiché fra t_0 e t_8 si ha il periodo T, l'altezza di questo rettangolo sarà appunto Y_m (2).

Si definisce invece valore efficace di una grandezza periodica (indicato con lettera maiuscola senza indice) la quantità:

5.12-4
$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} y^2\, dt} \quad ,$$

---

(2) In sostanza il valor medio è quel particolare valore che occorre assegnare all'altezza del rettangolo avente per base il periodo T affinché l'area di questo sia eguale a quella della grandezza data nello stesso periodo T. Si veda anche la fig. 5.12-3

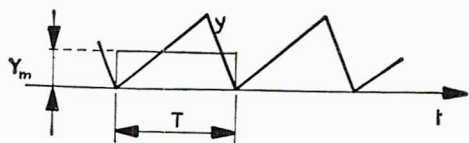



Fig. 5.12-3

cioè la radice quadrata del valor medio in un periodo dei quadrati dei valori istantanei. Il valore efficace sarà sempre maggiore del valor medio in un periodo.

5.13 Grandezze alternative

Le grandezze alternative sono quelle particolari grandezze periodiche che presentano nel periodo T valor medio nullo ($Y_m = 0$). Una funzione alternativa dovrà quindi essere rappresentata da una curva la quale, in un intervallo di tempo eguale al periodo T, determina rispetto all'asse dei tempi aree positive eguali a quelle negative. Due esempi di queste grandezze sono stati riportati nelle figg. 5.13-1 e 2*a*, ove le aree

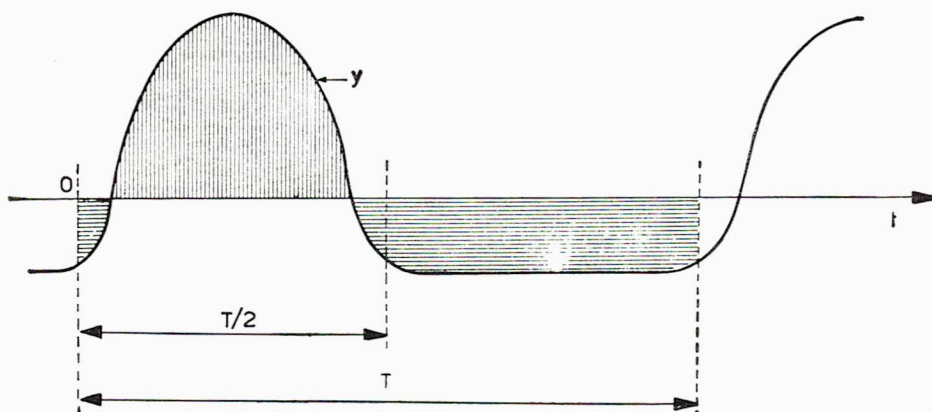



Fig. 5.13-1

indicate con tratteggio orizzontale nell' insieme risultano eguali a quelle indicate con tratteggio verticale.

Tali grandezze dunque hanno sempre valor medio nullo. Tuttavia molte volte per queste si considera un altro *valore medio*, precisamente il valor medio in un semiperiodo, per il quale verrà usato il simbolo Y'_m. La sua espressione analitica è la seguente:

5.13-1 $$Y'_m = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y \, dt .$$

Si noti che per il calcolo dell' integrale l'origine del tempo non è più qualsiasi, ma quel particolare valore ($t = 0$, vedi ad esempio figg. 5.13-1 e 2*a*) che rende massimo il valore dell' integrale stesso.

Nel caso che la grandezza alternativa data presenti i due semiperiodi

sovrapponibili, come avviene nel tipo rappresentato in fig. 5.13-2*a*, allora il valor medio in un semiperiodo è utile ad esempio per definire il cosiddetto *fattore di forma*. Esso infatti risulta eguale al rapporto fra il valore efficace Y e il valor medio nel semiperiodo Y'_m.

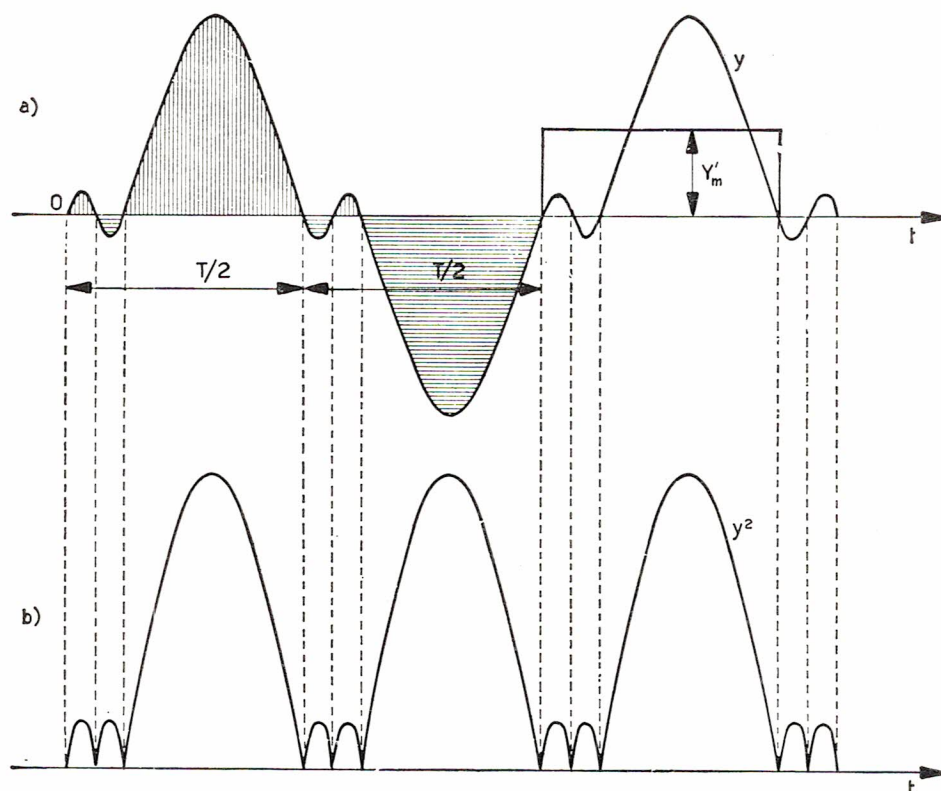



Fig. 5.13-2

Si noti da ultimo che il valore efficace di una grandezza alternativa qualsiasi è sempre diverso da zero, poiché è la radice quadrata del valor medio nel periodo T della curva y^2 che risulta tutta positiva (diagramma *b* di fig. 5.13-2 che è stato ottenuto elevando al quadrato le ordinate del diagramma *a* della stessa figura).

5.14 Grandezze sinusoidali

Una grandezza si dice sinusoidale quando la curva che ne visualizza l'andamento presenta la forma di una sinusoide (vedi fig. 5.14-1). Trattasi ovviamente di una grandezza alternativa assai particolare, che tuttavia ha grandissima importanza nell' Elettrotecnica, poiché essa rappresenta la grandezza variabile nel tempo più semplice possibile.

Come si può osservare dalla fig. 5.14-1, una funzione sinusoidale è tale da presentare i due semiperiodi, quello positivo e quello negativo, rigorosamente eguali, così le due semionde risultano eguali, salvo il

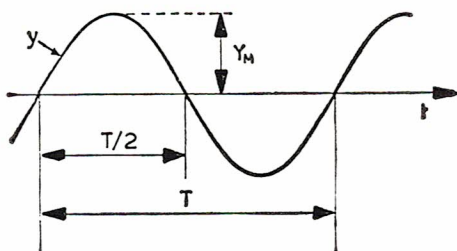



Fig. 5.14-1

segno si intende. Il valore di cresta positivo (valore massimo) coincide con quello negativo e il valore da picco a picco è doppio del valore massimo.

Data la grande importanza, come si è detto, di questo tipo di grandezza alternativa, essa verrà studiata assai estesamente tanto che il presente capitolo vi sarà dedicato per intero. D'altronde nei prossimi tre paragrafi si esaminerà come è possibile rappresentare una grandezza sinusoidale ai fini del calcolo elettrotecnico.

5.15 Problemi di applicazione al § 5.1

Esercizio 5.151

Si calcoli graficamente il valor medio della grandezza riportata in fig. 5.151-1*a*, costituita da archi di mezze sinusoidi.

Soluzione

Come origine (che è del tutto arbitraria) del periodo T, entro il quale calcolare l'area della curva, si sceglierà ad esempio il punto A di fig. 5.151-1*a*, che è molto comodo. Si tratterà allora di trovare il valore dell'area della mezza sinusoide. Ciò verrà eseguito per via grafica dopo aver riportata la curva su un reticolo millimetrato, come è stato fatto in fig. 5.151-1*b*. Quest'area vale approssimativamente 748 millimetri quadrati. Poiché d'altronde al periodo T (segmento AC) corrispondono 40 millimetri, il valor medio Y_m varrà:

$$Y_m = \frac{748}{40} = 18{,}7 \text{ millimetri} .$$

Si noti che il valor medio Y_m può esser trovato, in pratica, tracciando un segmento orizzontale di *compenso* della curva entro il

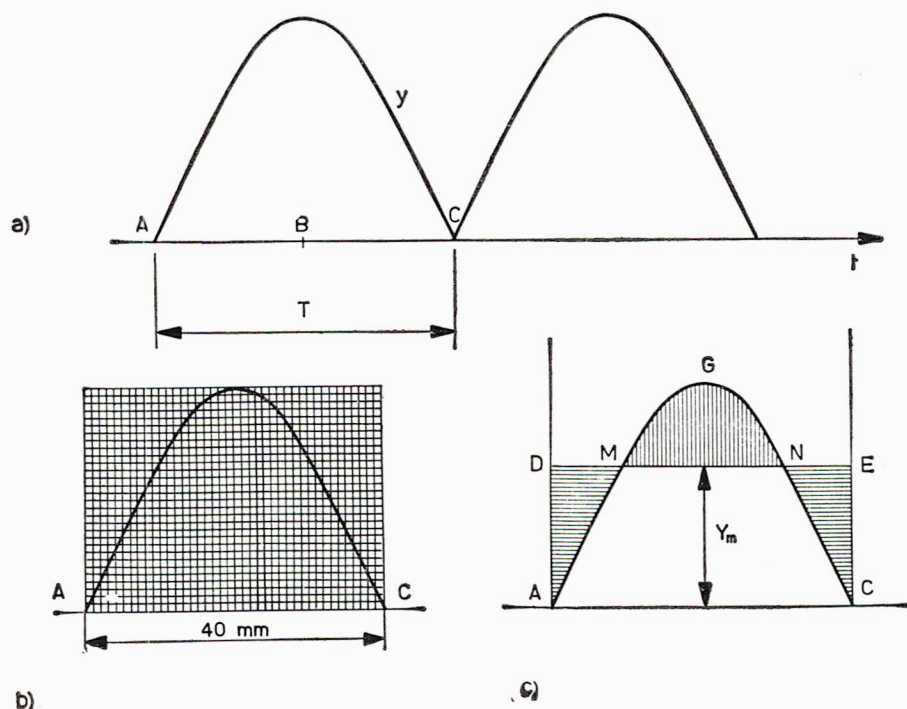



Fig. 5.151-1

periodo T, come è il segmento DE di fig. 5.151-1*c*, il quale risulta tale cioè da determinare l' uguaglianza fra la somma delle aree ADM e CNE con l'area MNG.

Esercizio 5.152

Si calcoli graficamente il valore efficace della grandezza riportata in fig. 5.152-1*a* (onda triangolare), ove $Y_M = 8$ millimetri e al periodo T corrispondono 32 millimetri.

Soluzione

Si incominci a tracciare la curva che ha per ordinate il quadrato delle corrispondenti ordinate della grandezza data. Si otterrà così la

curva che appare in fig. 5.152-1*b*, formata ovviamente da tanti archi di parabola. Di questa grandezza, che risulta di periodo metà rispetto a quello di partenza (1), è sufficiente calcolare il valore medio nel *suo* periodo (quindi $T/2$). Il procedimento potrà essere lo stesso di quello visto nel-

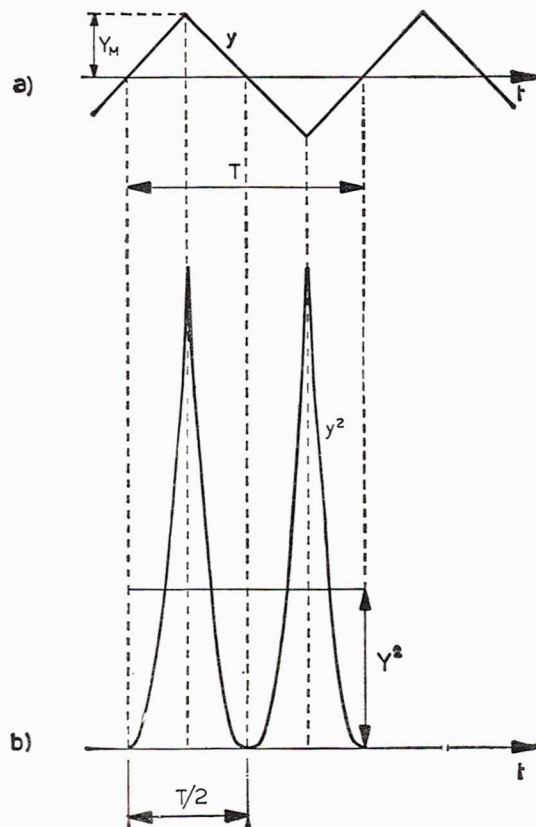



Fig. 5.152-1

l'esercizio precedente. Naturalmente di questo valor medio verrà estratta poi la radice quadrata, al fine di ottenere il valore efficace richiesto. In definitiva si trova che $Y \cong 4{,}6$ millimetri (2).

Esercizio 5.153

Si calcoli il fattore di forma dell'onda triangolare trattata nell'esercizio precedente.

---

(1) Ciò avviene perché il semiperiodo negativo della grandezza data (onda triangolare) ha lo stesso andamento di quello positivo (salvo il segno).

(2) L'espressione analitica del valore efficace in questo caso è $\frac{Y_M}{\sqrt{3}}$ (vedi tabella 7.8 riportata nel capitolo 7).

Soluzione

È necessaria la conoscenza del valor medio Y'_m in un semiperiodo (vedi fig. 5.153-1). Il suo calcolo procederà nel seguente modo. Si incominci

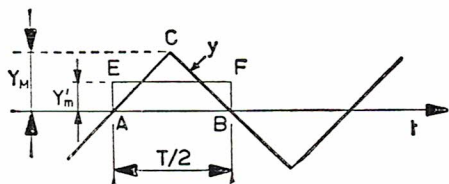



Fig. 5.153-1

a trovare l'espressione analitica dell'area del triangolo ABC (semiperiodo positivo). Essa è data da:

$$\frac{1}{2}\,\frac{T}{2}\,Y_M\,;$$

mentre quella dell'area del rettangolo $AEFB$ ammonta a:

$$Y'_m\,\frac{T}{2}.$$

Dall'eguaglianza delle espressioni di queste due aree, che devono appunto essere eguali per definizione di valor medio nel semiperiodo, si otterrà in definitiva che:

$$Y'_m = \frac{1}{2}\,Y_M = 4 \text{ millimetri}.$$

Pertanto il fattore di forma di quest'onda triangolare varrà:

$$f.d.f = \frac{Y}{Y'_m} = \frac{4{,}6}{4} = 1{,}15\,,$$

in ottima coincidenza con i risultati che si ottengono risolvendo il problema completamente per via analitica.

5.2 Rappresentazione trigonometrica

5.21 Generalità

La rappresentazione trigonometrica di una grandezza sinusoidale può essere fatta per via grafica, ed allora si avrà la curva di fig. 5.21-1*b*, oppure per via analitica ed allora si avrà l'espressione:

5.21-1 $$y = Y_M \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \; (^1).$$

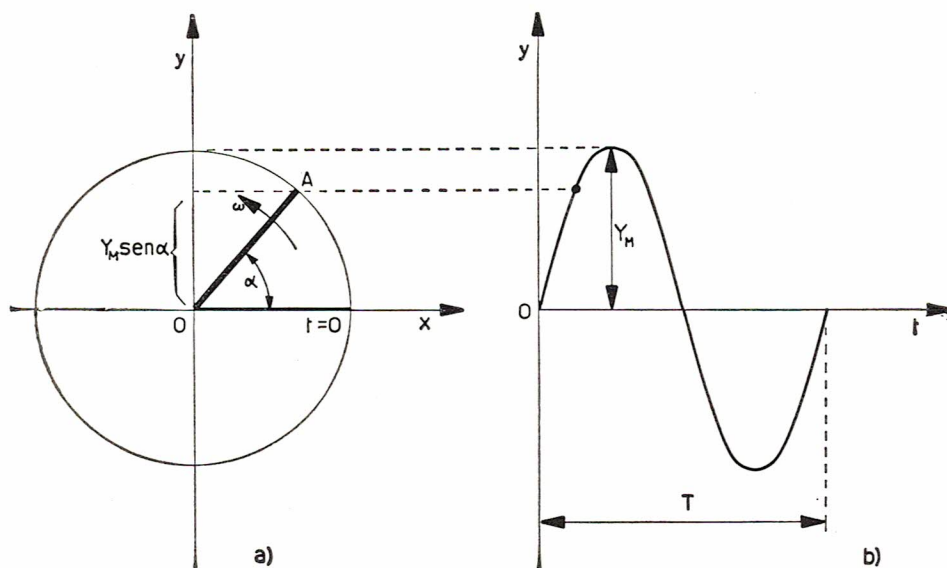



Fig. 5.21-1

Si userà l' una o l'altra rappresentazione a seconda della convenienza. Si noti che nell'espressione 5.21-1 il termine $\frac{2\pi}{T}$ rappresenta la cosiddetta *pulsazione* della grandezza sinusoidale. Questa viene indicata

---

(1) È noto dalla Trigonometria che $y = Y_M \operatorname{sen} \alpha$ rappresenta una funzione sinusoidale la cui origine è posta nel punto di zero crescente (poiché appunto deve essere $y = 0$ per $\alpha = 0$ ed $y > 0$ per $\alpha > 0$). La funzione è periodica di 2π radianti. In Elettrotecnica la sinusoide invece deve essere funzione del tempo e quindi periodica del periodo T. La 5.21-1 soddisfa quindi sia la condizione trigonometrica che quella fisica.

con la lettera greca ω (dunque $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$) e si misurerà in radianti/secondo (abbr. rad/sec). La giustificazione della sua introduzione nello studio delle correnti alternate, oltre che dalla formula 5.21-1, è dovuta al modo molto comodo secondo il quale si può pensare originata una sinusoide.

Si abbia infatti un segmento OA di ampiezza Y_M, il cui estremo O sia collocato nel centro di un sistema di assi cartesiani ortogonali (vedi fig. 5.21-1a), e ruotante nel piano in senso antiorario (sinistrogiro) con velocità angolare costante eguale per l'appunto ad ω. Ora, se all' istante $t = 0$, origine del tempo, il segmento Y_M si trova sull'asse x, origine degli angoli, all' istante t generico esso avrà descritto l'angolo $\alpha = \omega t$. D'altronde la proiezione di tale segmento $OA = Y_M$ sull'asse verticale vale (fig. 5.21-1a) :

5.21-2 $$y = Y_M \operatorname{sen} \alpha = Y_M \operatorname{sen} \omega t .$$

È così possibile asserire che i valori assunti istante per istante da una grandezza sinusoidale corrispondono ai valori risultanti come proiezioni sull'asse verticale di un segmento di ampiezza Y_M ruotante uni-

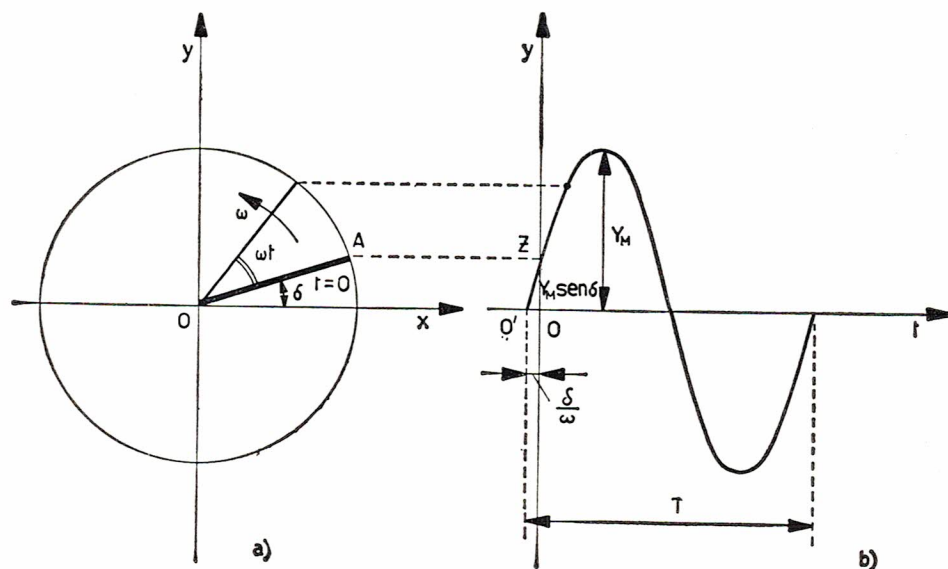



Fig. 5.21-2

formemente con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T}$, cioè con velocità angolare eguale alla pulsazione della grandezza sinusoidale data.

A dire il vero, quanto qui è stato esposto, riguarda il caso particolare di una grandezza sinusoidale avente fase zero, il che si presenta quando l'origine cade nel particolare punto di ordinata zero (crescente).

Non sempre però l'origine del tempo può essere posta in tale istante poiché in pratica per molte grandezze sinusoidali l'origine non è arbitraria.

Il caso generale dunque si ha quando l'istante posto come inizio del fenomeno risulta qualsiasi. Graficamente la grandezza sinusoidale sarà allora rappresentata, ad esempio, come in figura 5.21-2*b*, per la quale analiticamente si ha l'espressione:

5.21-3 $$y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \delta),$$

che differisce dall'espressione precedentemente vista in 5.21-2 poiché nell'argomento del seno compare l'angolo δ necessario per tener conto del fatto che ora, per $t = 0$, il valore presentato dalla grandezza sinusoidale non è più zero, bensì quello corrispondente al segmento intercettato sull'asse verticale (segmento OZ di fig. 5.21-2*b*). L'angolo δ, misurato anch'esso in radianti [2], viene denominato *angolo di fase* o anche, semplicemente, *fase* della grandezza sinusoidale data.

Naturalmente pure in questo caso sarà possibile considerare che i valori istantanei assunti via via dalla sinusoide risultino eguali alle proiezioni sopra l'asse verticale di un segmento di ampiezza Y_M ruotante con la velocità angolare ω nel verso antiorario (fig. 5.21-2*a*); solamente che ora per $t = 0$ questo segmento non si verrà a trovare più sull'asse x bensì formerà con questo l'angolo δ (positivo se δ è positivo, come risulta in fig. 5.21-2*b*, negativo se δ si presenta negativo).

Si noti ancora che il segmento $O'O$ di fig. 5.21-2*b* rappresenta un particolare intervallo di tempo, precisamente quella frazione del periodo T $\left(\frac{\delta}{2\pi} T = \frac{\delta}{\omega}\right)$ necessario affinché la grandezza sinusoidale si porti dal valore nullo (punto O') al valore che essa deve realmente avere nell'istante in cui inizia il fenomeno (punto O).

Si conclude osservando come, in base ad esempio all'espressione analitica 5.21-3, una grandezza sinusoidale sia completamente definita quando risultino note l'ampiezza Y_M (valore massimo), la pulsazione ω (oppure la frequenza f o il periodo T) e la fase δ. Tre sono dunque gli elementi o i dati necessari per definire completamente una grandezza sinusoidale.

5.22 Relazioni fra grandezze trigonometriche

Nello studio delle correnti alternate si presenta sovente il caso in cui si deve trattare contemporaneamente con più grandezze sinusoidali.

---

[2] Molte volte, nell'uso corrente, viene dato in gradi sessagesimali, anziché in radianti.

A tale proposito, sia qui, come del resto in tutti i paragrafi di questo capitolo, si considererà sempre che le varie grandezze sinusoidali siano isofrequenziali fra di loro, cioè tali da presentare la stessa frequenza f o pulsazione ω.

Si abbiano dunque due grandezze sinusoidali isofrequenziali a e b. Queste graficamente saranno rappresentate ad esempio come in fig. 5.22-1b,

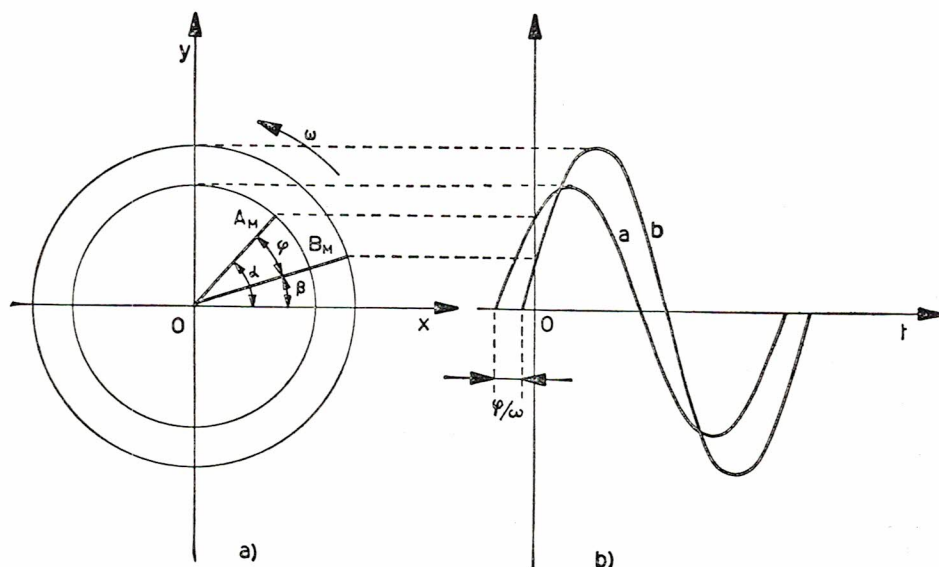



Fig. 5.22-1

mentre analiticamente esse saranno individuate dalle seguenti espressioni :

5.22-1 $$a = A_M \operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$$

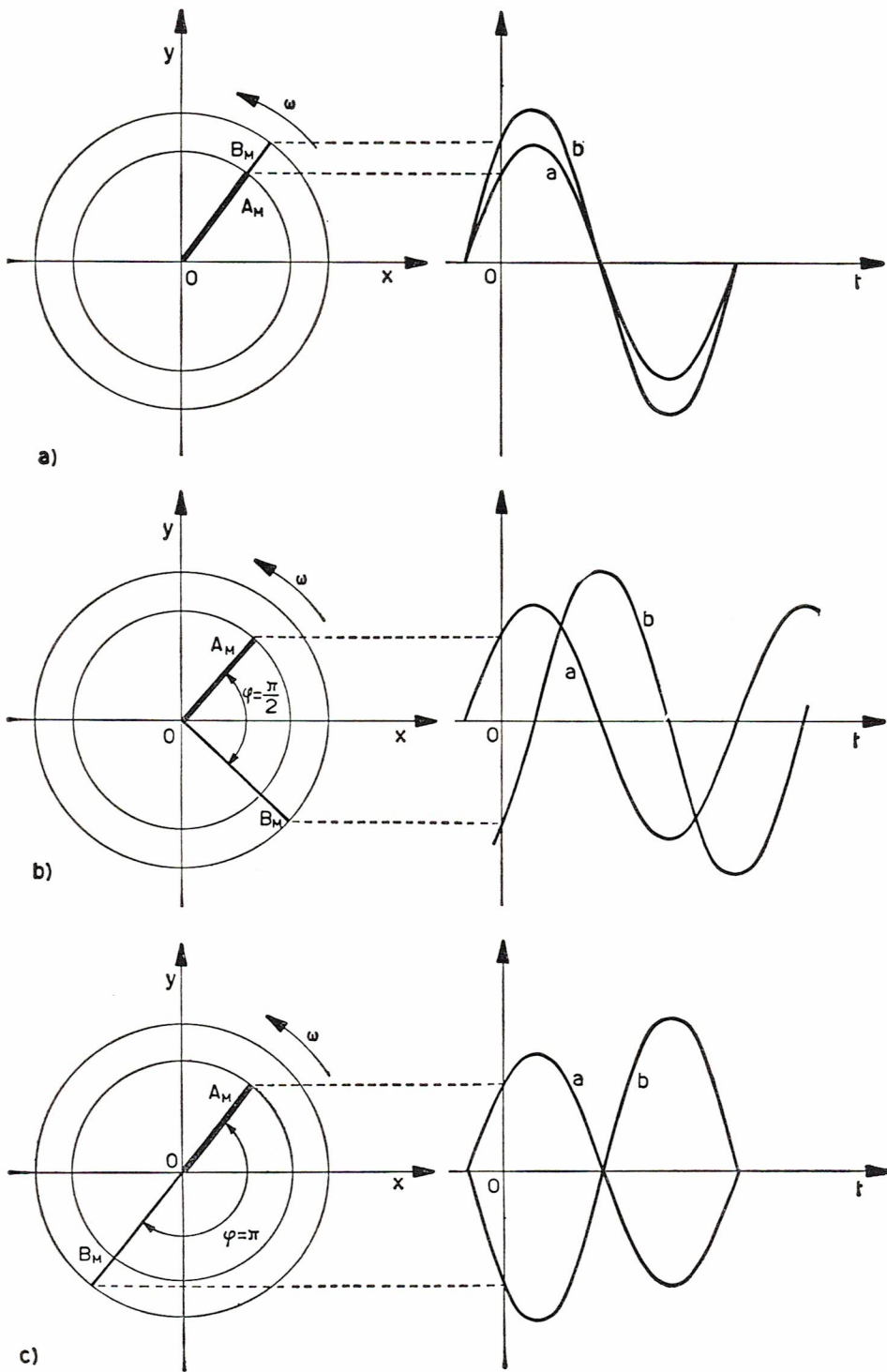
5.22-2 $$b = B_M \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \, ,$$

dove A_M e B_M sono le rispettive ampiezze, α e β le rispettive fasi.

Si sarà notato che fra le due grandezze sinusoidali in oggetto esiste una certa differenza anche se esse hanno, per ipotesi, la stessa pulsazione ω. Infatti, oltre ad avere ampiezze diverse, le due sinusoidi a e b si presentano con fasi differenti : nel caso del diagramma di fig. 5.22-1 è certamente $\alpha > \beta$. Si dice allora che la grandezza a anticipa su quella b, precisamente dell'angolo $\alpha - \beta$, poiché è la grandezza a che raggiunge prima della b, il valore massimo. Naturalmente in questo caso si può anche affermare che la grandezza b è in ritardo su quella a.

Ora, l'anticipo che la grandezza a presenta su quella b è quantitativamente espresso, come già detto, dall'angolo :

y
ω
B_M
A_M
0
x
b
a
0
t
a)
y
ω
A_M
$\varphi=\frac{\pi}{2}$
0
x
B_M
b
a
0
t
b)
y
ω
A_M
0
x
B_M
$\varphi=\pi$
a
b
0
t
c)

Fig. 5.22-2

5.22-3 $$\alpha - \beta = \varphi,$$

il quale viene denominato angolo di sfasamento fra le due grandezze date. In generale, esso risulterà positivo se $\alpha > \beta$ (la grandezza a anticipa su quella b), negativo se $\alpha < \beta$ (la grandezza a ritarda allora su quella b). Ovviamente, quando $\alpha = \beta$, sarà $\varphi = 0$ e le due grandezze risulteranno in fase (fig. 5.22-2a), quando invece $\varphi = \pi/2$ si presenteranno in quadratura (fig. 5.22-2b), quando $\varphi = \pi$ esse si diranno in opposizione (fig. 5.22-2c).

5.23 Operazioni sulle grandezze trigonometriche

Ai fini della risoluzione dei problemi che si presentano nello studio delle correnti alternate, le operazioni più importanti che si possono compiere sulle grandezze sinusoidali, poste in forma trigonometrica, sono le seguenti:

1) *Somma e sottrazione*

Definizione: La somma o la differenza di due grandezze a e b sinusoidali isofrequenziali [$a = A_M$ sen $(\omega t + \alpha)$, $b = B_M$ sen $(\omega t + \beta)$] determina una grandezza sinusoidale c della stessa frequenza (nel diagramma di fig. 5.23-1 compare la grandezza somma), precisamente:

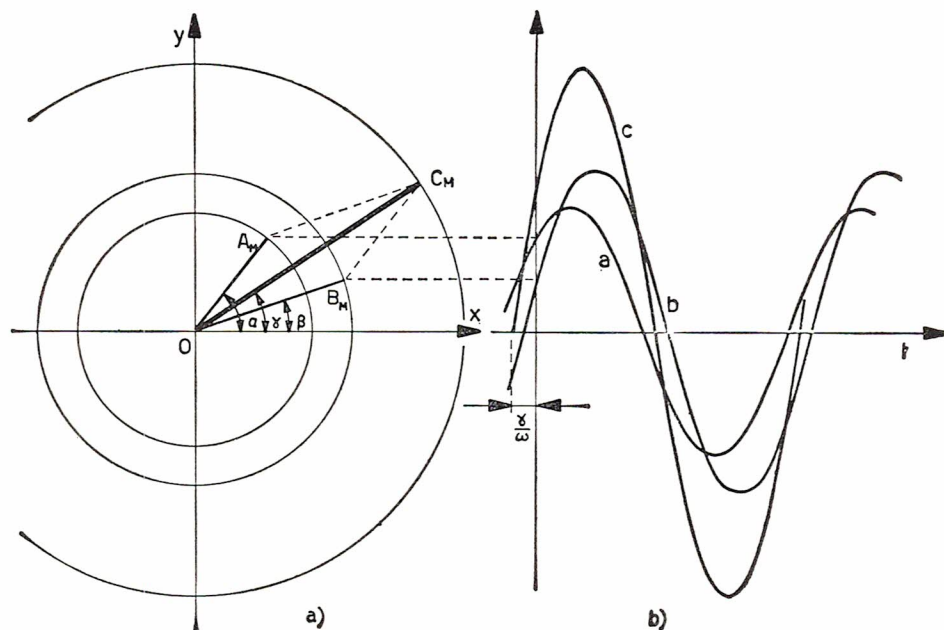



Fig. 5.23-1

5.23-1 $$c = a \pm b = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma),$$

ove:

5.23-2 $$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 \pm 2\, A_M\, B_M \cos(\alpha - \beta)}$$

5.23-3 $$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A_M \operatorname{sen} \alpha \pm B_M \operatorname{sen} \beta}{A_M \cos \alpha \pm B_M \cos \beta}.$$

La dimostrazione delle due formule ora scritte è assai semplice operando con le grandezze vettoriali: per questo motivo essa verrà data nel prossimo paragrafo.

2) *Prodotto per una costante*

Definizione: Il prodotto di una grandezza sinusoidale $a = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ per una quantità costante K porta ancora ad una grandezza sinusoidale isofrequenziale ed avente la stessa fase α, mentre l'ampiezza risulta essere K volte più grande.

Si ha quindi che:

5.23-4 $$c = Ka = KA_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

3) *Prodotto di due grandezze sinusoidali*

Definizione: Il prodotto di due grandezze a e b sinusoidali isofrequenziali non conduce ad una grandezza sinusoidale bensì solamente ad una grandezza periodica di frequenza doppia rispetto alla frequenza presentata dalle due grandezze di partenza.

Precisamente la grandezza prodotto c risulta espressa nel seguente modo:

5.23-5 $$c = a \cdot b = \frac{A_M B_M}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{A_M B_M}{2} \cos(2\,\omega\, t + \alpha + \beta),$$

cioè risulta costituita da due termini di cui il primo è costante nel tempo [1]

---

[1] Una grandezza costante nel tempo equivale ad una grandezza sinusoidale di frequenza zero (cioè di periodo infinito). Questo modo di considerare le grandezze costanti è talvolta comodo.

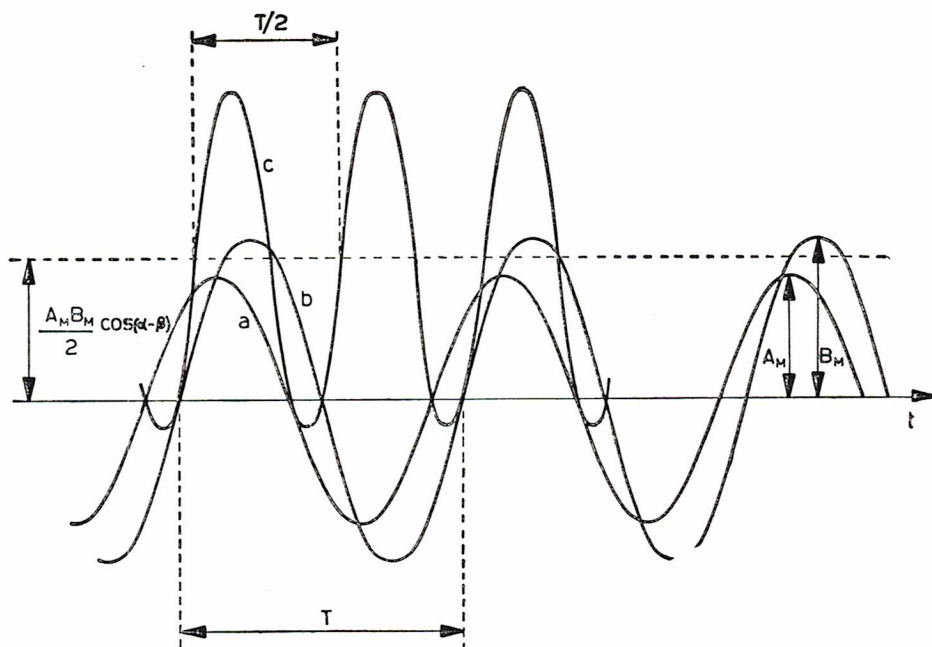



Fig. 5.23-2

e il secondo è cosinusoidale di frequenza doppia (si veda il diagramma di fig. 5.23-2).

È importante notare che l'ampiezza del termine costante dipende non solo dalle ampiezze delle due sinusoidi di partenza bensì anche dal coseno dell'angolo di sfasamento $\varphi = \alpha - \beta$ esistente fra le due sinusoidi stesse.

4) *Derivata* [2]

Definizione: La derivata di una grandezza sinusoidale avente pulsazione ω è ancora una grandezza sinusoidale della stessa pulsazione, la cui ampiezza risulta però ω volte più grande e la cui fase differisce per $\frac{\pi}{2}$ in anticipo (diagramma di fig. 5.23-3).

La derivata della grandezza $a = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ è perciò una grandezza c $[c = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)]$ tale che:

---

[2] La derivata esprime un'operazione analitica. Se ad esempio la funzione y è variabile nel tempo, coll'espressione dy/dt si indica la sua derivata.

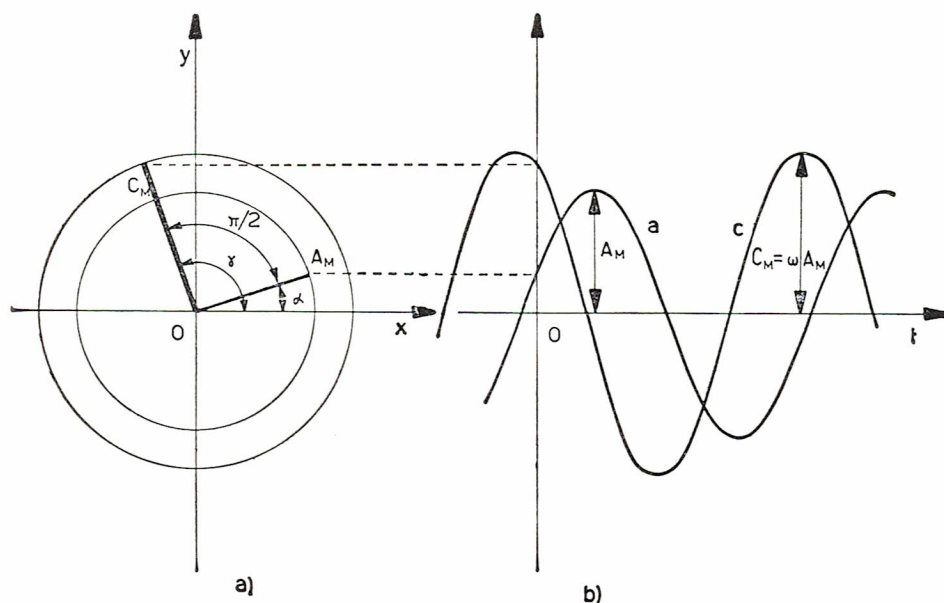



Fig. 5.23-3

5.23-6 $$c = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)\right] = \omega A_M \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

per cui quindi $C_M = \omega A_M$ e $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

È importante notare dunque che l'operazione di derivata determina uno sfasamento in anticipo di $\frac{T}{4}$. Questo corrisponde infatti ad uno sfasamento angolare di $\frac{\pi}{2}$ radianti in anticipo.

5) *Integrale* (³).

Definizione: L'operazione di integrazione di una grandezza sinusoidale di pulsazione ω porta ancora ad una grandezza sinusoidale avente la stessa pulsazione, ma la cui ampiezza è ω volte minore e la cui fase differisce di $\pi/2$ in ritardo.

(³) L'integrale esprime un'operazione analitica. Se ad esempio la funzione y è variabile nel tempo, l'espressione $\int y\, dt$ indica il suo integrale.

L'operazione di integrazione sulla grandezza $a = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ conduce dunque alla grandezza $c\,[c = C_M \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)]$ tale che:

$$c = \int a\,dt = \int A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)\,dt = \frac{A_M}{\omega} \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right), \tag{5.23-7}$$

dove quindi $\quad C_M = A_M/\omega$ e $\gamma = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$.

L'operazione di integrazione determina dunque, tra l'altro, uno sfasamento in ritardo di un quarto di periodo. Si veda a questo proposito il diagramma di fig. 5.23-4.

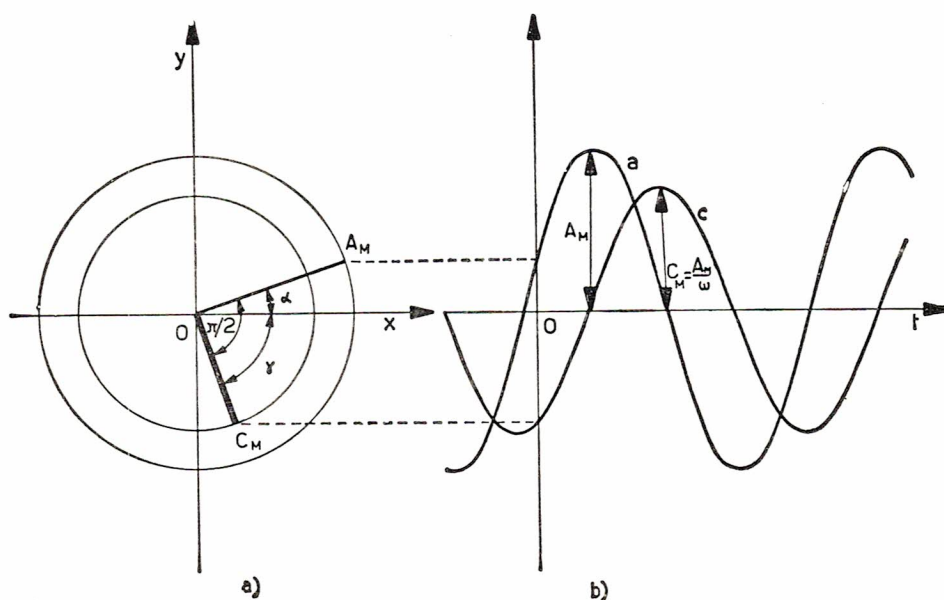



Fig. 5.23-4

5.24 Problemi di applicazione al § 5.2

Esercizio 5.241

Si trasformino in grandezze cosinusoidali le due seguenti grandezze sinusoidali $a = A_M \operatorname{sen} \omega t$, $b = B_M \operatorname{sen}(\omega t - \beta)$.

Soluzione

Si osservino i diagrammi di fig. 5.241-1, ove la curva y_a rappresenta una funzione sinusoidale avente fase zero e la curva y_c rappresenta

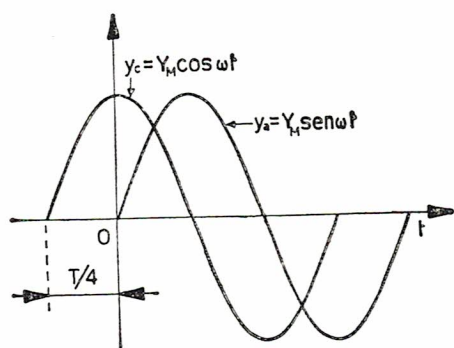



Fig. 5.241-1

una funzione cosinusoidale avente anch'essa fase zero. È chiaro che si tratta di due grandezze la cui differenza di fase vale $\pi/2$, cioè di due grandezze fra di loro in quadratura. Precisamente il coseno risulta in anticipo sul seno di un quarto di periodo, viceversa quindi il seno risulta in ritardo di un quarto di periodo sul coseno.

Per trasformare quindi la grandezza sinusoidale $a = A_M \operatorname{sen} \omega t$ in cosinusoidale sarà sufficiente osservare che la grandezza $A_M \cos \omega t$ deve ritardare di $T/4$ per interpretare effettivamente la grandezza $a = A_M \operatorname{sen} \omega t$. Si avrà quindi:

$$a = A_M \operatorname{sen} \omega t = A_M \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (1)}.$$

La stessa cosa si potrà ripetere per la seconda grandezza data dal problema. Sarà perciò:

$$b = B_M \operatorname{sen}(\omega t - \beta) = B_M \cos\left(\omega t - \beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Si veda anche quanto è stato riportato in fig. 5.241-2.

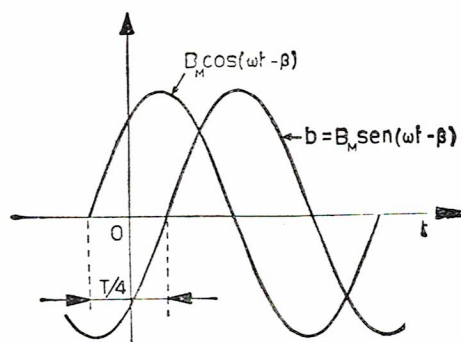



Fig. 5.241-2

---

(1) La Trigonometria insegna infatti che $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$.

Esercizio 5.242

Si scomponga la grandezza sinusoidale $y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$, avente fase δ, in componenti sinusoidali e cosinusoidali di fase zero.

Soluzione

Si sviluppi il termine $\operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ mediante la nota formula trigonometrica dell'addizione. Si ha allora:

$$y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \delta) = Y_M \cos\delta \operatorname{sen}\omega t + Y_M \operatorname{sen}\delta \cos\omega t.$$

Ponendo $Y'_M = Y_M \cos\delta$ e $Y''_M = Y_M \operatorname{sen}\delta$, si otterrà l'espressione:

$$y = Y'_M \operatorname{sen}\omega t + Y''_M \cos\omega t,$$

cioè appunto la grandezza data funzione solamente di componenti sinusoidali e cosinusoidali di fase zero, come richiesto dal problema.

Esercizio 5.243

Si trovi la grandezza somma delle due grandezze sinusoidali isofrequenziali:

$$a = 80 \operatorname{sen}(1000\,t + 0{,}20)\ ,\ b = 120 \operatorname{sen}(1000\,t - 0{,}30)\,,$$

ponendo il risultato in forma trigonometrica.

Soluzione

Ci si avvalga delle formule 5.23-2 e 3. Occorrerà però trasformare i valori degli angoli di fase delle due grandezze date da radianti in gradi sessagesimali, poiché le tavole trigonometriche contemplano solo le funzioni circolari di angoli espressi in gradi sessagesimali.

Sarà perciò:

grandezza a $\quad A_M = 80\,;\ \alpha = 0{,}20 \text{ rad} = 11^0\,27' \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0{,}198 \\ \cos\alpha = 0{,}980 \end{cases}$

grandezza b $\quad B_M = 120\,;\ \beta = -0{,}30 \text{ rad} = -17^0\,11' \begin{cases} \operatorname{sen}\beta = -0{,}295 \\ \cos\beta = 0{,}955 \end{cases}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos 28^0\,38' = 0{,}878\,.$

L'ampiezza C_M della grandezza somma varrà pertanto:

$$C_M = \sqrt{80^2 + 120^2 + 2 \cdot 80 \cdot 120 \cdot 0{,}878} = 194\,;$$

mentre l'argomento γ si calcolerà tramite la tangente come segue:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{80 \cdot 0{,}198 + 120\,(-\,0{,}295)}{80 \cdot 0{,}980 + 120 \cdot 0{,}955} = -\,0{,}101\,,$$

dalla quale si ricava che $\gamma = -\,5^0\,46'$, cui corrispondono 0,101 radianti.

In definitiva la grandezza somma delle due grandezze assegnate risulta avere la seguente espressione:

$$c = 194 \text{ sen } (1000\,t - 0{,}101)\,.$$

5.3 Rappresentazione vettoriale

5.31 Generalità

Le grandezze fisiche elettriche variabili nel tempo con legge sinusoidale, che si incontreranno nello studio delle correnti alternate, non sono grandezze vettoriali (1), tuttavia esse vengono rappresentate molte volte in modo vettoriale. Come mai ciò può avvenire?

Si è visto nel precedente § 5.21 che i valori istantanei di una grandezza sinusoidale possono essere ottenuti come proiezione, sopra un asse verticale, di un segmento la cui lunghezza è eguale al valore massimo (ampiezza) della grandezza sinusoidale e che ruota nel verso antiorario con velocità angolare ω. Nulla toglie però alle conclusioni già viste se quel segmento rotante viene sostituito con un vettore (segmento cioè orientato) di modulo eguale al valor massimo, pure esso rotante con la stessa velocità angolare ω. La medesima cosa dicasi se le grandezze sinusoidali saranno più di una: ciascuna di esse risulterà rappresentata da un vettore rotante con la propria velocità ω nel verso antiorario, avente un estremo posto nel punto comune O (centro del sistema), di modulo

(1) Le tensioni e le correnti sono infatti grandezze scalari, così come del resto lo è la potenza.

eguale all'ampiezza della propria sinusoide e formante con l'asse orizzontale un angolo tale da rappresentare nell' istante $t = 0$ il *proprio angolo di fase* (vedi fig. 5.31-1).

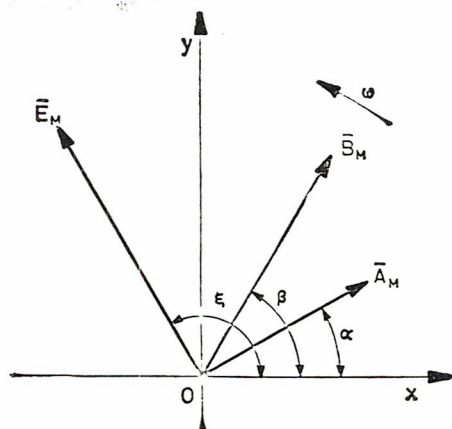



Fig. 5.31-1

È importante osservare ora che, quando le grandezze sinusoidali in gioco sono tutte isofrequenziali, i loro vettori rappresentativi ruotano tutti nello stesso verso, con la stessa velocità angolare, conservando quindi fra di loro le stesse differenze di fase. Poiché dunque le relative posizioni dei diversi vettori che rappresentano le grandezze sinusoidali date sono costanti nel tempo, si potrà pensare di considerare i suddetti vettori fermi nel piano, in una posizione corrispondente ad un tempo qualsiasi ([2]), *tutte le volte che fra le varie grandezze sinusoidali interessino esclusivamente relazioni di ampiezza e di fase.* Ciò, come si vedrà, torna di grandissima utilità nello studio dei circuiti elettrici in regime sinusoidale.

In particolare, con la rappresentazione vettoriale delle grandezze sinusoidali, sono maggiormente *visibili* le relazioni che interessano le fasi. Così una grandezza sinusoidale, che debba anticipare o ritardare di una certa frazione di periodo $\left(\frac{T}{n}\right)$ rispetto ad un'altra, non farà altro che ruotare in anticipo ([3]) o in ritardo del corrispondente angolo di sfasamento $\left(\varphi = \frac{2\pi}{n}\right)$.

([2]) Di solito si assume la posizione corrispondente a $t = 0$ (fig. 5.31-1).

([3]) Si ricordi che il senso degli anticipi è quello antiorario, cioè quello scelto come positivo per la rotazione dei vettori.

5.32 Operazioni sulle grandezze vettoriali

Sulle grandezze vettoriali associate alle grandezze sinusoidali si possono compiere quasi tutte le operazioni viste nel § 5.23 a proposito delle grandezze sinusoidali espresse in forma trigonometrica. È così possibile definire:

1) *Somma e differenza*

La grandezza somma si rappresenta con un vettore che è la risultante dei vettori rappresentanti le grandezze date.

Con riferimento alla costruzione vettoriale di fig. 5.32-1, ove i vet-

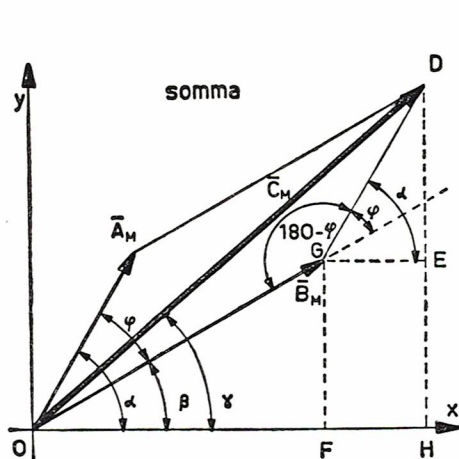
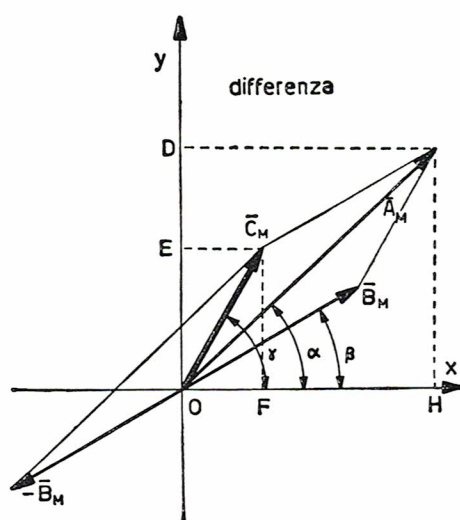



Fig. 5.32-1 *Fig. 5.32-2*

tori $\bar{A}_M$ e $\bar{B}_M$ rappresentano due grandezze sinusoidali da sommare e $\bar{C}_M$ il vettore rappresentante la loro somma, cioè quindi la loro risultante, si vede che:

— l'ampiezza del vettore $\bar{C}_M$ può essere calcolata facilmente tramite il teorema di Carnot (triangolo *ODG* di fig. 5.32-1):

5.32-1
$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 - 2\,A_M B_M \cos(180 - \varphi)} =$$
$$= \sqrt{A_M^2 + B_M^2 + 2\,A_M B_M \cos(\alpha - \beta)}$$

— la fase γ del vettore $\bar{C}_M$ può essere calcolata assai facilmente come tangente di quest'angolo, cioè quindi (fig. 5.32-1):

5.32-2
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{DH}{OH} = \frac{DE + EH}{OF + FH} = \frac{A_M \operatorname{sen}\alpha + B_M \operatorname{sen}\beta}{B_M \cos\beta + A_M \cos\alpha}.$$

La grandezza differenza è rappresentabile anch'essa con un vettore che risulterà essere la differenza dei vettori rappresentanti le grandezze date.

Con riferimento alla costruzione vettoriale di fig. 5.32-2 si ha, per il modulo, che:

5.32-3 $$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 - 2\, A_M\, B_M \cos(\alpha - \beta)}$$

e per la fase, che:

5.32-4 $$\operatorname{tg} \gamma = \frac{OE}{OF} = \frac{OD - ED}{OH - FH} = \frac{A_M \operatorname{sen}\alpha - B_M \operatorname{sen}\beta}{A_M \cos\alpha - B_M \cos\beta}.$$

Con ciò restano dimostrate le formule 5.23-2 e 5.23-3 del paragrafo 5.23.

2) *Prodotto per una costante*

Moltiplicando un vettore per una quantità costante K si ottiene, come è noto, un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso se $K > 0$, la stessa direzione ma verso opposto se $K < 0$. Il modulo d'altronde risulterà K volte quello di partenza. Si veda la fig. 5.32-3*a*, ove $K = 2{,}7$.

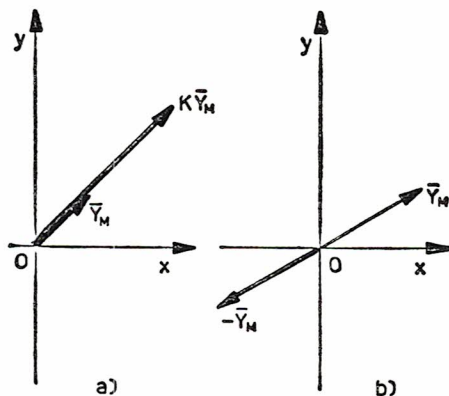



Fig. 5.32-3

Si osservi in particolare che moltiplicare per $K = -1$ (vedi fig. 5.32-3*b*) significa in pratica far ruotare di 180° il vettore stesso, cioè quindi fare anticipare (o ritardare che è la medesima cosa in questo caso particolare) la grandezza sinusoidale di mezzo periodo [1].

---

[1] Di ciò si ha conferma anche ricorrendo alla forma trigonometrica, poiché data la grandezza $a = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, se deve essere $c = -a$, risulterà, per una proprietà di trigonometria, che:

$$c = -A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha + \pi).$$

3) *Derivata*

Per proprietà già enunciate al punto 4 del § 5.23, il vettore che rappresenta la derivata di una grandezza sinusoidale avrà modulo di valore ω volte quello del vettore rappresentante la grandezza da derivare e sarà sfasato in anticipo di $\pi/2$ (vedi fig. 5.32-4).

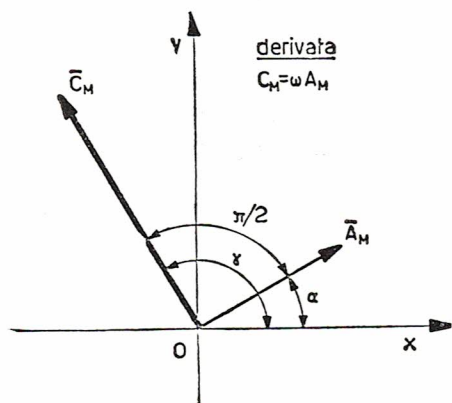
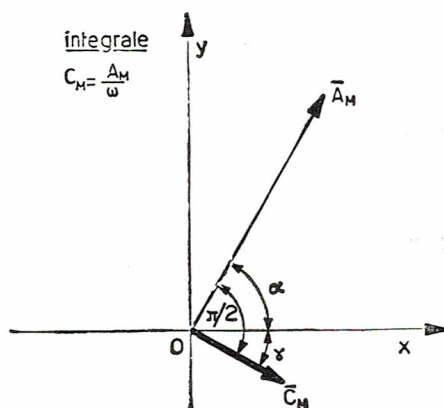



Fig. 5.32-4 *Fig. 5.32-5*

4) *Integrale*

Per proprietà già enunciate al punto 5 del § 5.23, il vettore che rappresenta l' integrale di una grandezza sinusoidale ha per modulo $1/\omega$ volte il valore del modulo del vettore rappresentante la grandezza sinusoidale da integrare e sarà sfasato in ritardo di $\pi/2$ (vedi fig. 5.32-5).

Si noti la impossibilità di rappresentare vettorialmente il prodotto di due grandezze sinusoidali sullo stesso piano sul quale sono stati riportati i vettori rappresentativi le grandezze di partenza. Non è quindi possibile eseguire l'operazione prodotto fra grandezze sinusoidali, se queste sono in forma vettoriale. Ciò discende dal fatto che la grandezza prodotto è costituita da un termine di pulsazione doppia rispetto a quella di partenza e da uno avente pulsazione nulla. Manca cioè per la rappresentazione vettoriale la condizione di isofrequenzialità.

5.33 Problemi di applicazione al § 5.3

Esercizio 5.331

Si rappresentino vettorialmente le due grandezze:

$$a = -40 \operatorname{sen} 314\, t \quad , \quad b = 30 \cos 314\, t \,.$$

Nel caso poi che queste siano le componenti ortogonali di una grandezza sinusoidale, se ne trovi la sua espressione trigonometrica.

Soluzione

Le due grandezze date sono isofrequenziali ($f = 50$ per/sec). Tracciato allora un riferimento cartesiano ortogonale (vedi fig. 5.331-1),

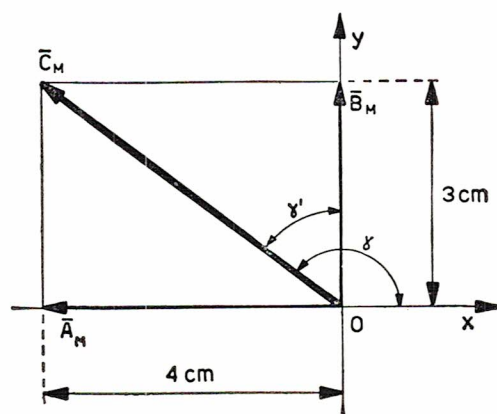



Fig. 5.331-1

scelta la scala per i moduli (1 cm = 10), il vettore rappresentante la grandezza a si troverà sull'asse x negativo [infatti $a = -40 \text{ sen } 314\, t = 40 \text{ sen } (314\, t + \pi)$, onde la fase vale π]; mentre il vettore rappresentante la grandezza b sarà disteso sull'asse y positivo [infatti $b = 30 \cos 314\, t = 30 \text{ sen} \left(314\, t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, onde la fase vale $\dfrac{\pi}{2}$ (1)].

Se ora le due grandezze date sono le componenti ortogonali di una grandezza sinusoidale, il modulo C_M di questa varrà:

$$C_M = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\,;$$

mentre l'argomento γ ammonta a $\pi/2 + \gamma'$ (vedi fig. 5.331-1), ove l'angolo γ' è definito da:

$$\text{tg}\, \gamma' = \frac{A_M}{B_M} = \frac{40}{30} = 1{,}333\ ;\ \gamma' = 53^0\, 7'\,.$$

(1) La grandezza coseno è in anticipo di un quarto di periodo $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ sul seno. Infatti $\cos \alpha = \text{sen}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Vedere anche fig. 5.241-1.

Pertanto la grandezza sinusoidale cercata ha l'espressione:

$$c = 50 \text{ sen } (314\, t + 143^0\, 7')\,.$$

Esercizio 5.332

Si esegua con operazione vettoriale la somma delle due seguenti grandezze sinusoidali isofrequenziali:

$$a = 50 \text{ sen } \left(314\, t + \frac{\pi}{6}\right),\quad b = 40 \cos \left(314\, t - \frac{\pi}{6}\right).$$

La grandezza risultante sia posta poi in forma trigonometrica.

Soluzione

Tracciato un riferimento cartesiano ortogonale (vedi fig. 5.332-1)

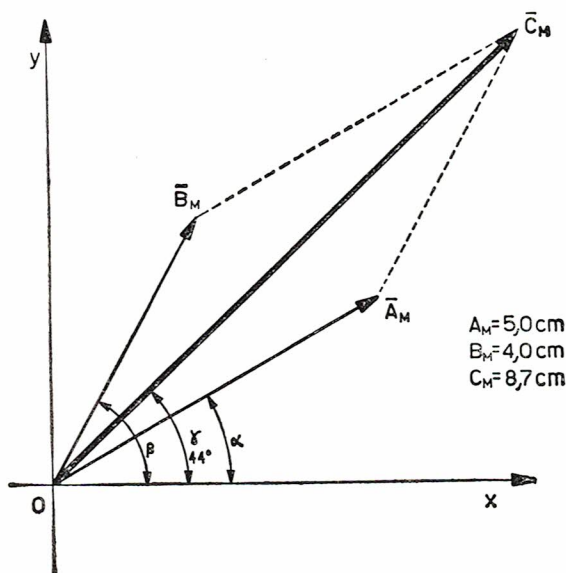



Fig. 5.332-1

e scelta la scala per i moduli (1 cm = 10), si porta il vettore $\bar{A}_M$, lungo 5 cm e facente con l'asse delle x un angolo $\alpha = 30^0$, e il vettore $\bar{B}_M$, di lunghezza 4 cm e facente con l'asse x un angolo $\beta = 60^0$ (infatti $b = 40 \text{ sen } \left(314\, t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Si esegue quindi l'operazione vettoriale di somma. Il vettore risultante $\overline{C}_M$ è così individuato dai seguenti dati ricavati per via grafica dal diagramma vettoriale di fig. 5.332-1: modulo corrispondente ad una lunghezza di circa 8,7 cm, per cui $C_M = 87$; angolo con l'asse x positivo corrispondente a circa 44^0, quindi la fase $\gamma = 44^0$. Questi dati possono essere ricavati con più precisione naturalmente applicando le formule 5.32-1 e 2.

La grandezza risultante c, in forma trigonometrica, avrà perciò la seguente espressione:

$$c = 87 \operatorname{sen}(314\,t + 44^0)\,.$$

Esercizio 5.333

Si trovi quella grandezza sinusoidale c, di pulsazione eguale a 314 rad/sec, che, aggiunta alla $b = -100 \cos 314\,t$, dia per risultante la grandezza $a = 30 \operatorname{sen}\left(314\,t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluzione

Poiché le grandezze in gioco sono tutte isofrequenziali, potrà essere usato il metodo vettoriale. Si porti così nel riferimento cartesiano di fig. 5.333-1 (scala 1 cm = 20) il vettore $\overline{B}_M$ e il vettore $\overline{A}_M$. Dato che il vettore $\overline{C}_M$ deve essere la differenza fra $\overline{A}_M$ e $\overline{B}_M$ (il problema impone infatti che $c + b = a$), dalla costruzione vettoriale di fig. 5.333-1 si deduce facilmente che $C_M = 130$ e $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Pertanto la grandezza c in forma trigonometrica avrà l'espressione:

$$c = a - b = 130 \operatorname{sen}\left(314\,t - \frac{\pi}{2}\right).$$

I risultati trovati naturalmente si possono controllare con le formule date nel testo a proposito della differenza fra due grandezze. Poiché nel nostro caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = -\frac{\pi}{2}$ (1), si ottiene:

$$C_M = \sqrt{A_M^2 + B_M^2 - 2\,A_M\,B_M \cos\pi} = A_M + B_M = 130\,;$$

(1) Infatti $b = -100 \cos 314\,t = 100 \operatorname{sen}\left(314\,t - \frac{\pi}{2}\right)$. La Trigonometria insegna appunto che $-\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

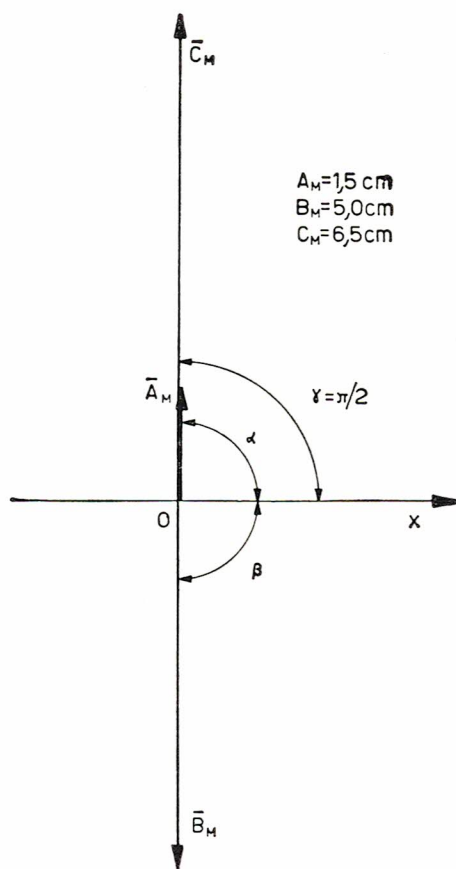



Fig. 5.333-1

$$tg\,\gamma = \frac{A_M \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - B_M \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{A_M \cos\frac{\pi}{2} - B_M \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{A_M + B_M}{0} = \infty\,,$$

per cui la fase vale:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\,.$$

5.4 Rappresentazione simbolica

5.41 Introduzione

Le rappresentazioni trigonometrica e vettoriale delle grandezze sinusoidali permettono la trattazione completa (qualitativa e quantitativa)

dei problemi relativi alle correnti alternate. Tuttavia va rilevato che con i relativi metodi analitici la soluzione numerica dei problemi, salvo qualche caso particolare, è molto lunga e laboriosa, con i relativi metodi grafici vi si introduce invece una notevole imprecisione, dovendo prima tracciare sulla carta, e quindi valutare, lunghezze di segmenti e aperture di angoli.

Per poter ovviare agli inconvenienti di cui sopra si è cercato un terzo metodo per rappresentare le grandezze sinusoidali e in generale le *grandezze vettoriali* (1), allo scopo naturalmente di operare poi facilmente su di esse. A ciò risponde molto bene per l' Elettrotecnica la cosiddetta rappresentazione simbolica delle *grandezze vettoriali* : queste grandezze vengono trattate allora come entità numeriche per mezzo di quella parte di matematica che va sotto il nome di studio delle grandezze complesse (numeri complessi).

È stato così possibile impostare un metodo di risoluzione dei problemi in regime sinusoidale di grande efficacia e relativa semplicità come calcolo ; solamente che questo nuovo metodo toglie al fenomeno in studio qualsiasi realtà fisica per cui si può determinare, in chi si accinge per la prima volta allo studio delle correnti alternate, qualche interpretazione errata.

5.42 Vettori e numeri complessi

Se si considera in un piano un sistema di coordinate, ad esempio cartesiane ortogonali o polari, e nel piano stesso un vettore $\overline{A}$ avente un estremo nel centro del sistema di coordinate, questo vettore potrà essere sempre individuato univocamente nei modi insegnati dalla Geometria analitica. Tuttavia ai fini del calcolo, cioè allo scopo di poter impostare un'algebra vettoriale, vi è un sistema assai più comodo, ed è quello che fa ricorso ad un riferimento di assi coordinati, ancora ortogonali, di cui l'asse orizzontale risulta graduato in unità reali (soliti numeri reali 1, 2, 3, ...) : per questo motivo esso si chiama asse reale (indicato con $+1$ anziché con x) ; mentre l'asse verticale è graduato invece in unità immaginarie (numeri immaginari $j1$, $j2$, $j3$, ...) : per questo motivo esso si chiama asse immaginario (indicato con $+j$ anziché con y).

In tale riferimento, si veda la fig. 5.42-1, un vettore $\overline{A}$ (1) viene per definizione univocamente determinato dall'espressione :

$$\overline{A} = a_1 + ja_2 , \qquad (5.42\text{-}1)$$

essendo (fig. 5.42-1) a_1 la sua componente lungo l'asse reale, detta perciò anche parte reale del vettore, ja_2 la sua componente lungo l'asse immaginario, detta anche parte immaginaria del vettore. Il vettore $\overline{A}$ viene così

---

(1) Cioè grandezze scalari ma che possono essere rappresentate in un piano come vettori.

(1) I numeri complessi, come le *grandezze vettoriali,* verranno indicati con una lettera maiuscola sormontata da una lineetta.

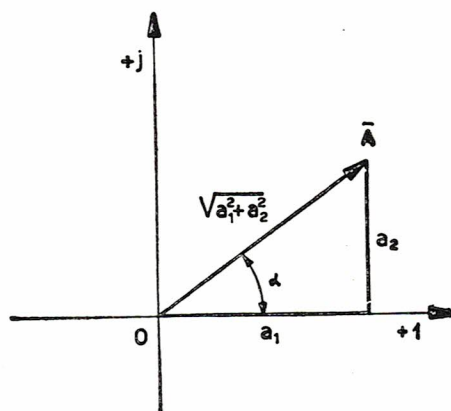



Fig. 5.42-1

individuato dalla seguente entità $a_1 + ja_2$, che la matematica definisce numero complesso.

D'altronde all'espressione matematica $\overline{A} = a_1 + ja_2$ si potrà fare sempre corrispondere nel piano complesso un vettore $\overline{A}$, avente per componenti a_1 ed ja_2. Un numero complesso può quindi essere rappresentato graficamente con un vettore (vedi fig. 5.42-1), precisamente con un vettore il cui modulo (2) varrà naturalmente:

5.42-2 $$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

che diviene quindi anche il modulo del numero complesso $\overline{A}$, e con un angolo α, la cui tangente sarà individuata da:

5.42-3 $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_2}{a_1}\ (^3),$$

(2) Il modulo di un numero complesso viene indicato generalmente con la stessa lettera maiuscola che indica il numero complesso stesso, però senza sopra la lineetta, oppure col graficismo solito: $|\overline{A}|$.

(3) È necessario osservare che il rapporto a_2/a_1 dà la possibilità di conoscere il valore dell'angolo α a meno di π. Si veda la fig. 5.42-1', ove i due vettori determinano lo stesso valore numerico del rapporto a_2/a_1, ma hanno in realtà valori numerici dell'argomento differenti (per π appunto). Per questo motivo in pratica, una volta calcolato α con la 5.42-3, si verificherà se sia necessario aggiungervi π, oppure no.

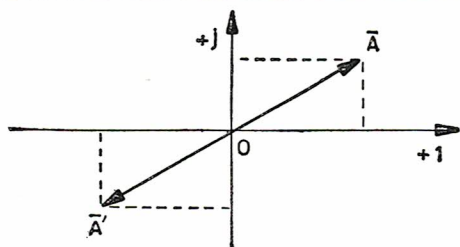



Fig. 5.42-1'

il quale diventa l'argomento del numero complesso.

È importante notare che in un numero complesso a_1 e a_2 sono quantità reali e che il simbolo j è per definizione la radice quadrata dell'unità negativa, cioè:

5.42-4 $$j = \sqrt{-1},$$

denominata unità immaginaria (o anche *immaginario*), la quale gode della proprietà di trasformare in un numero immaginario un qualsiasi numero reale (positivo e negativo) al quale essa venga preposta.

Ci si può chiedere a questo punto quale sia il significato pratico del simbolo j. Si noti anzitutto che una stessa quantità reale, ad esempio m, se scritta come tale è ovviamente reale per ipotesi, e quindi starà sull'asse reale del sistema di assi ortogonali riportati in fig. 5.42-2, se scritta invece come jm diventerà, come già detto, quantità immaginaria, e quindi starà sull'asse immaginario del sistema di assi ortogonali dati (fig. 5.42-2). Poiché d'altronde m può essere riguardato come un vet-

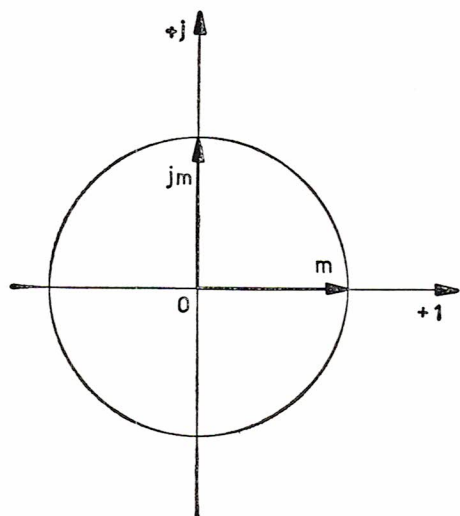
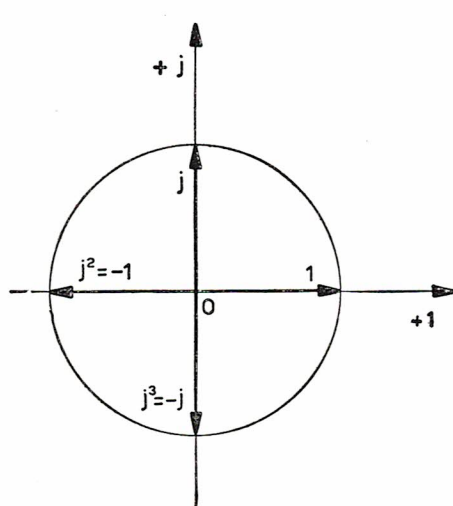



Fig. 5.42-2 *Fig. 5.42-3*

tore (di ampiezza m e fase zero, cioè posto sull'asse orizzontale) è chiaro che il simbolo j rappresenta pure un operatore che ha la proprietà di far ruotare il vettore al quale esso è stato applicato dell'angolo del valore di $\pi/2$ nel senso antiorario, che anche nel calcolo simbolico viene assunto come verso positivo delle rotazioni.

Si noti ancora che elevando al quadrato l'unità immaginaria si ha:

5.42-5 $$j^2 = j \cdot j = -1,$$

il cui effetto, come operatore, è quello di fare ruotare di π (cioè successivamente $\pi/2$ per due volte) nel senso positivo delle rotazioni (vedi fig. 5.42-3). Così elevando al cubo l'unità immaginaria si ottiene:

$$j^3 = j \cdot j \cdot j = -j \,, \tag{5.42-6}$$

il cui significato, come operatore, è quello di determinare una rotazione di $\frac{3}{2}\pi$ (cioè successivamente $\frac{\pi}{2}$ per tre volte) nel verso degli anticipi (vedi fig. 5.42-3).

Ma un numero complesso può essere posto in forma differente da quella cosiddetta *binomia* $\overline{A} = a_1 + ja_2$ [forma abbreviata (a_1, a_2)]. Infatti le componenti a_1 e ja_2 possono essere poste, indicati con A il modulo e con α l'argomento, nella seguente forma:

$$a_1 = A \cos \alpha \qquad\qquad ja_2 = jA \operatorname{sen} \alpha \,, \tag{5.42-7}$$

per cui si otterrà:

$$\overline{A} = a_1 + ja_2 = A \cos \alpha + jA \operatorname{sen} \alpha = A\,(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha)\,, \tag{5.42-8}$$

la quale esprime il numero complesso $\overline{A}$ in forma *trigonometrica*.

Ricordando però la nota formula di Eulero:

$$\varepsilon^{\pm j\alpha} = \cos \alpha \pm j \operatorname{sen} \alpha \,, \tag{5.42-9}$$

ad $\overline{A}$ potrà essere data la seguente espressione:

$$\overline{A} = A\,(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) = A\,\varepsilon^{j\alpha}, \tag{5.42-10}$$

denominata forma *esponenziale* del numero complesso dato [abbreviazione $A\,|\underline{\alpha}$ (4)].

Naturalmente un numero complesso potrà essere posto in una qualsiasi delle tre forme viste e cioè binomia, trigonometrica (5), esponenziale. Il passaggio dall' una all'altra forma è sempre possibile, poiché una grandezza complessa risulta individuata, qualunque sia la sua espressione, da due parametri (precisamente dalla parte reale a_1 e dal coefficiente a_2 della parte immaginaria nella forma binomia; dal modulo A e dall'argomento α nella forma trigonometrica ed esponenziale) che soddisfano le condizioni date in 5.42-2, 5.42-3, 5.42-7.

Ai fini del calcolo simbolico che si impiegherà è importante introdurre il cosiddetto *coniugato* di un numero complesso. Ora, assegnato

---

(4) Detta anche forma vettoriale semplificata di Kennelly.

(5) A dire il vero la forma trigonometrica serve di passaggio fra quella binomia e quella esponenziale, per cui sostanzialmente due sono le espressioni differenti di un numero complesso: la binomia e la esponenziale.

un numero complesso $\overline{A} = a_1 + ja_2 = A\varepsilon^{j\alpha}$ (fig. 5.42-4), per coniugato si intende un numero complesso il quale ha la stessa parte reale (a_1) mentre presenta il coefficiente dell' immaginario eguale in valore ma di segno opposto ($- a_2$). Il coniugato del numero complesso $\overline{A}$, che

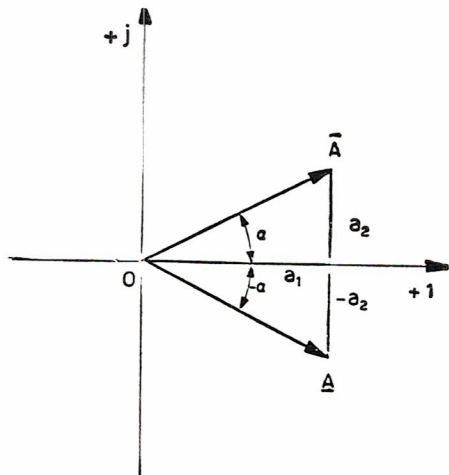



Fig. 5.42-4

viene indicato con $\underline{A}$, risulta dunque per definizione:

5.42-11 $$\underline{A} = a_1 - ja_2 = A\varepsilon^{-j\alpha}.$$

Si noti che il modulo di $\underline{A}$ è ancora A (infatti $|\underline{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\overline{A}|$); mentre l'argomento è $\alpha' = -\alpha$ (infatti $\operatorname{tg}\alpha' = \dfrac{-a_2}{a_1} = -\operatorname{tg}\alpha$).

Il coniugato di un numero complesso viene rappresentato quindi nel piano, si veda la fig. 5.42-4, da un vettore che risulta l' immagine speculare, rispetto all'asse reale, del vettore dato.

5.43 Rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali

Una grandezza sinusoidale, ad esempio del tipo $a = A_M \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, è rappresentabile, come si è visto, con un vettore, di modulo A_M e fase α, ruotante con velocità angolare ω nel senso antiorario, il quale, all' istante generico t, si troverà pertanto nella posizione individuata, rispetto all'asse x, dall'angolo $\alpha + \omega t$ (vedi fig. 5.43-1).

Ora il suddetto vettore all' istante t potrà essere rappresentato, col metodo simbolico e, ad esempio, con notazione esponenziale, nel seguente modo:

$$\overline{A}_M = A_M \varepsilon^{j(\alpha + \omega t)} = A_M \varepsilon^{j\alpha} \varepsilon^{j\omega t} \text{ (1)}, \tag{5.43-1}$$

poiché ovviamente si tratta di un vettore di modulo A_M e fase $\alpha + \omega t$.

Osservando la seconda espressione di $\overline{A}_M$ riportata in 5.43-1, si comprende come, col metodo simbolico, una grandezza sinusoidale si differenzi da altre grandezze *vettoriali* (2) (si confronti ad esempio con

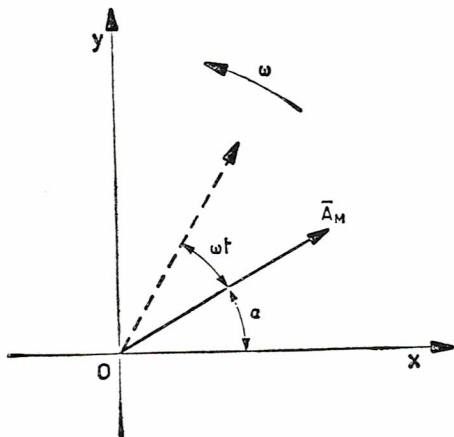



Fig. 5.43-1

la 5.42-10) semplicemente per avere in più il termine moltiplicativo $\varepsilon^{j\omega t}$, il quale sta ad indicare quindi solamente la proprietà che il vettore è rotante, cioè che in sostanza la grandezza in oggetto è funzione del tempo. Ma se per determinati calcoli, come si è già accennato nel § 5.31, i vettori rappresentativi delle grandezze sinusoidali isofrequenziali si possono considerare fermi (istante $t = 0$), allora tali grandezze sinusoidali potranno essere rappresentate con notazione simbolica semplicemente in una delle tre semplici forme già viste, cioè $\overline{A}_M = a_1 + ja_2 = A_M (\cos\alpha + j \operatorname{sen} \alpha) = A_M\, \varepsilon^{j\alpha}$, essendo il termine $\varepsilon^{j\omega t}$ non necessario.

5.44 Operatori vettoriali

Ad un numero complesso, che rappresenta un vettore fisso (1) nel piano, si dà in generale nell' Elettrotecnica il nome di operatore vettoriale. La ragione di questo vocabolo sarà presto chiara se si considera che gli operatori vettoriali vengono sempre a comparire come fattori di moltiplicazione di altri numeri complessi rappresentanti nel metodo simbolico delle grandezze sinusoidali.

---

(1) Trattandosi di grandezze esplicitamente sinusoidali, il modulo del vettore che le rappresenta è il valore massimo, quindi A_M.

(2) Alle grandezze *vettoriali* che non sono funzioni del tempo appartengono ad esempio gli operatori vettoriali dei quali si dirà nel prossimo paragrafo.

(1) Cioè che non ruota, quindi che non rappresenta grandezze variabili nel tempo

Si abbia dunque l'operatore vettoriale $\overline{Z}$, di modulo Z ed argomento θ, che verrà posto in forma esponenziale:

5.44-1 $$\overline{Z} = Z\,\varepsilon^{j\theta}$$

per comodità di eseguire poi l'operazione di prodotto ([2]), ed una generica grandezza sinusoidale $\overline{A}_M = A_M \varepsilon^{j\alpha}$ (per dimostrare le proprietà degli operatori vettoriali il fattore $\varepsilon^{j\omega t}$ non è strettamente necessario). Se ora si esegue il prodotto $\overline{Z}\,\overline{A}_M$:

5.44-2 $$\overline{Z}\,\overline{A}_M = Z\,A_M \varepsilon^{j\alpha} . \varepsilon^{j\theta} = Z\,A_M \varepsilon^{j(\alpha + \theta)} ,$$

si arguisce che l'operatore $\overline{Z}$ ha modificato la grandezza vettoriale data $\overline{A}_M$ e nel suo modulo e nella sua fase. Precisamente, per quanto riguarda il modulo, esso si presenterà infatti Z volte più grande ($Z A_M$); per quanto riguarda la fase, essa ammonterà ad $\alpha + \theta$, per cui il vettore dato $\overline{A}_M$ risulterà ruotato dell'angolo θ (angolo θ che esprime l'argomento dell'operatore vettoriale) in anticipo (verso positivo) se detto angolo è positivo, in ritardo (verso negativo) se negativo (vedi fig. 5.44-1, ove θ ha

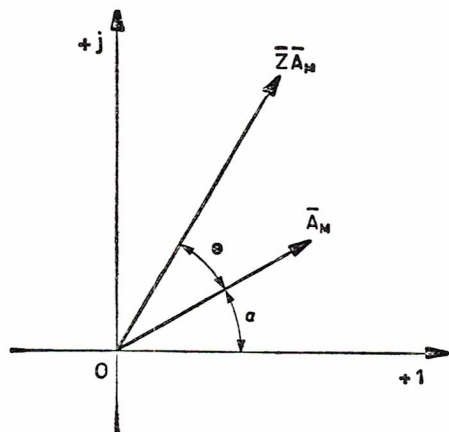



Fig 5.44-1

valore positivo). La conclusione è che un qualunque operatore vettoriale opererà dunque, nel modo visto sopra, sul modulo e sulla fase di un qualsiasi vettore al quale esso venga associato come fattore moltiplicativo.

In particolare si possono considerare gli operatori vettoriali a modulo unitario, del tipo perciò:

5.44-3 $$\varepsilon^{\pm j\theta} ,$$

([2]) L'operazione prodotto verrà trattata, con altre operazioni, nel prossimo paragrafo. Tuttavia si fa osservare che queste operazioni vengono compiute secondo le normali regole algebriche, che quindi si suppongono già note.

i quali hanno quindi la proprietà di far ruotare dell'angolo $\pm\ \theta$, senza però modificarne il modulo, quelle grandezze vettoriali per le quali essi risultino fattori di moltiplicazione.

Fra gli operatori vettoriali di uso corrente aventi modulo unitario si ricordano i seguenti:

5.44-4 $\quad \varepsilon^{j\frac{\pi}{2}} = j$ [3] $\quad$ opera una rotazione di 90° in anticipo,

5.44-5 $\quad \varepsilon^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \quad$ opera una rotazione di 90° in ritardo,

5.44-6 $\quad \varepsilon^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1 \quad$ opera una rotazione di 180°,

5.44-7 $\quad \varepsilon^{jo} = 1 \quad$ non opera alcuna rotazione.

5.45 Operazioni fondamentali col metodo simbolico

Sulle grandezze vettoriali espresse mediante numeri complessi si possono compiere tutte quelle operazioni che già si sono viste nei precedenti paragrafi e in più assai facilmente altre operazioni, come la divisione, l'elevazione a potenza, l'estrazione di radice. Si tenga presente che le operazioni sui numeri complessi sono soggette in pieno alle regole dell'algebra elementare, regole quindi che si suppongono note.

1) *Somma*

Definizione: La somma di numeri complessi è un numero complesso che ha rispettivamente per parte reale la somma delle parti reali e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie.

Si abbiano ad esempio due numeri complessi $\overline{A} = a_1 + ja_2 = A\varepsilon^{j\alpha}$, $\overline{B} = b_1 + jb_2 = B\varepsilon^{j\beta}$. La loro somma sarà espressa in forma binomia appunto dal numero complesso $\overline{C}$ tale che:

5.45-1 $$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2),$$

per cui modulo e fase avranno le seguenti espressioni:

5.45-2 $$C = \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2}\ ,\ tg\gamma = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}.$$

Si veda anche la costruzione grafica di fig. 5.45-1.

---

(3) La dimostrazione per la quale $\varepsilon^{j\frac{\pi}{2}} = j$ può essere facilmente condotta ricorrendo ad es. alla formula di Eulero. Infatti $\varepsilon^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 0 + j1 = j$.

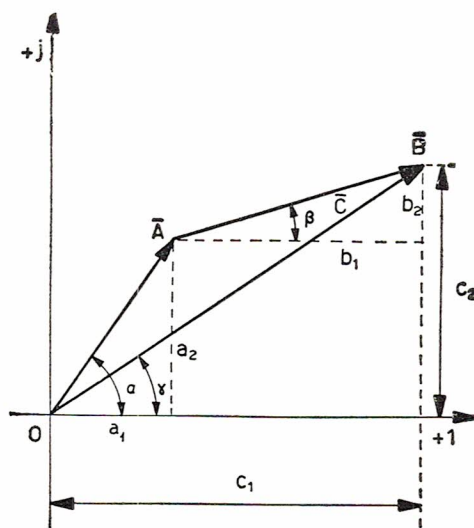



Fig. 5.45-1

È opportuno notare che la forma esponenziale dei numeri complessi non consente di esprimere direttamente l'operazione di somma. Infatti questa per le grandezze $\overline{A}$ e $\overline{B}$, poste in forma esponenziale, assume la seguente ovvia relazione:

5.45-3 $$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} = A\varepsilon^{j\alpha} + B\,\varepsilon^{j\beta},$$

che non dà luogo a nessuna possibilità diretta di calcolo [1].

Per eseguire il calcolo di una somma è quindi necessario che le grandezze compaiano in forma binomia.

2) *Sottrazione*

Definizione: La differenza fra numeri complessi è un numero complesso che ha rispettivamente per parte reale la differenza delle parti reali e per parte immaginaria la differenza delle parti immaginarie.

La differenza fra le grandezze $\overline{A}$ e $\overline{B}$ porta dunque al numero complesso $\overline{C}$ tale che:

5.45-4 $$\overline{C} = \overline{A} - \overline{B} = a_1 - b_1 + j(a_2 - b_2)$$

e per il quale modulo e fase avranno le seguenti espressioni:

5.45-5 $$C = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad ; \quad \mathrm{tg}\gamma = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}.$$

---

[1] Per il calcolo infatti occorrerà trasformarle in forma trigonometrica tramite la formula di Eulero (5.42-9).

Si noti che tutte le proprietà enumerate a proposito della somma valgono anche per l'operazione di sottrazione.

3) *Prodotto per una quantità costante*

Definizione: Il prodotto di un numero complesso $\bar{A} = a_1 + ja_2 = A\varepsilon^{j\alpha}$ per una quantità costante K (grandezza qualsiasi rappresentabile con un numero reale) porta ad un numero complesso $\bar{C}$ che ha il modulo di valore K volte quello del numero complesso dato, mentre presenta lo stesso argomento.

Sarà quindi:

5.45-6 $$\bar{C} = K \cdot \bar{A} = K(a_1 + ja_2) = K\,A\,\varepsilon^{j\alpha}\,.$$

Si veda anche la costruzione grafica di fig. 5.45-2.

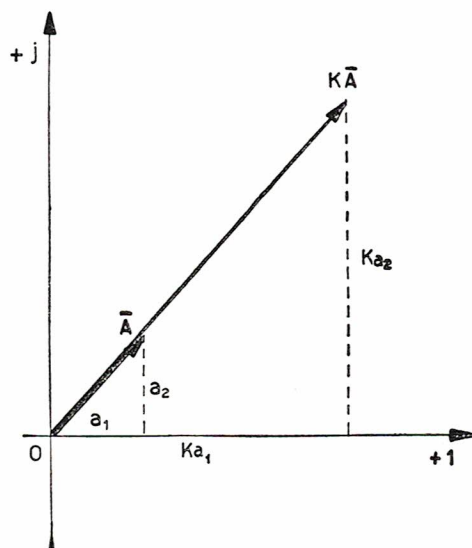



Fig. 5.45-2

4) *Prodotto di due grandezze complesse*

Definizione: Il prodotto di due numeri complessi porta ad un numero complesso il quale ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

Se i numeri complessi sono in forma esponenziale l'operazione prodotto è assai semplice da eseguire, poiché, per le note regole aritmetiche sulle potenze, si ha facilmente che:

5.45-7 $$\bar{C} = A\varepsilon^{j\alpha} \cdot B\varepsilon^{j\beta} = AB\varepsilon^{j(\alpha+\beta)}\,,$$

espressione che dimostra appunto quanto asserito nella definizione.

Se invece i numeri complessi $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono in forma binomia, basterà sempre, con le normali regole algebriche, svilupparne il prodotto:

5.45-8 $\quad \bar{C} = (a_1 + ja_2)(b_1 + jb_2) = a_1b_1 + ja_2b_1 + ja_1b_2 + j^2a_2b_2 .$

Ricordando che $j^2 = -1$ e raccogliendo le parti reali e quelle immaginarie fra loro, si ha in definitiva:

5.45-9 $$\bar{C} = a_1b_1 - a_2b_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1) ;$$

e quindi che:

5.45-10 $\quad C = \sqrt{(a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2};\ tg\gamma = (a_1b_2 + a_2b_1)/(a_1b_1 - a_2b_2).$

Per il prodotto la forma più conveniente ai fini del calcolo è senz'altro dunque quella esponenziale.

Nota: Quando si opera con grandezze sinusoidali, il prodotto ha significato solo se una sola delle grandezze che compongono il prodotto è sinusoidale (2). Gli altri termini dovranno essere cioè degli operatori vettoriali.

Date dunque ad esempio le due grandezze sinusoidali isofrequenziali:

5.45-11 $$\bar{E}_M = E_M \varepsilon^{j\xi} \cdot \varepsilon^{j\omega t} \qquad \bar{I}_M = I_M \varepsilon^{j\psi} \cdot \varepsilon^{j\omega t} ,$$

non è possibile dare un significato (fisico, cioè dal punto di vista elettrico) al loro prodotto (3). Dati però gli operatori vettoriali:

5.45-12 $$\bar{Z} = Z\varepsilon^{j\theta} \qquad \bar{Y} = Y\varepsilon^{j\delta} ,$$

hanno invece pienamente significato, ai fini del calcolo elettrico, ad esempio, i seguenti prodotti fra grandezze sinusoidali ed operatori vettoriali:

5.45-13 $$\bar{Z}\,\bar{I}_M = Z I_M \varepsilon^{j(\theta + \psi)} \cdot \varepsilon^{j\omega t} ,$$

oppure:

5.45-14 $$\bar{Y}\,\bar{E}_M = Y E_M \varepsilon^{j(\delta + \xi)} \cdot \varepsilon^{j\omega t} ,$$

---

(2) Infatti se entrambe le grandezze sono sinusoidali, il loro prodotto porta ad una grandezza *non* sinusoidale (costituita precisamente da un termine costante e da uno sinusoidale di frequenza doppia).

(3) Si veda la nota precedente.

o il prodotto fra operatori vettoriali:

5.45-15 $$\bar{Z}\,\bar{Y} = ZY\varepsilon^{j(\theta+\delta)}\,.$$

5) *Rapporto fra due grandezze complesse*

Definizione: Il rapporto fra due numeri complessi porta ad un numero complesso il cui modulo risulta come rapporto dei moduli e il cui argomento è la differenza degli argomenti dei due numeri complessi dati.

Se i numeri complessi sono in forma esponenziale, applicando le note regole di algebra sulle potenze, si ottiene:

5.45-16 $$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A\varepsilon^{j\alpha}}{B\varepsilon^{j\beta}} = \frac{A}{B}\,\varepsilon^{j(\alpha-\beta)}\,,$$

espressione che dimostra quanto asserito nella definizione.

Se invece i numeri complessi sono dati in forma binomia, per cui:

5.45-17 $$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2}\,,$$

si rende necessario allora razionalizzare il denominatore (4), il che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore della 5.45-17 per la quantità complessa coniugata del denominatore. Sarà dunque:

5.45-17′ $$\bar{C} = \frac{(a_1 + ja_2)(b_1 - jb_2)}{(b_1 + jb_2)(b_1 - jb_2)} = \frac{a_1b_1 + ja_2b_1 - ja_1b_2 - j^2a_2b_2}{b_1^2 + jb_1b_2 - jb_1b_2 - j^2b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} - j\,\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1^2 + b_2^2}\,.$$

Nota: nella rappresentazione simbolica delle grandezze sinusoidali, il loro rapporto è perfettamente lecito e può avere un significato fisico.

6) *Elevazione di potenza*

Definizione: Un numero complesso elevato alla n-esima potenza è ancora un numero complesso che ha rispettivamente per modulo il

---

(4) L'espressione $\frac{a_1 + ja_2}{b_1 + jb_2}$ è indubbiamente un numero complesso. Però, affinché appaia in definitiva come tale, esso dovrà essere del tipo $c_1 + jc_2$, cioè dovrà presentare una parte reale distinta dalla parte immaginaria. Per arrivare a questo occorre in pratica che il denominatore del rapporto sia una quantità reale. A ciò si arriva mediante la cosiddetta *razionalizzazione*.

modulo della grandezza data elevato ad n e per argomento n volte l'argomento del numero complesso dato.

In forma esponenziale sarà dunque, per note regole algebriche:

5.45-18 $$\bar{C} = (\bar{A})^n = (A\varepsilon^{j\alpha})^n = A^n \varepsilon^{jn\alpha},$$

il che dimostra quanto è stato asserito nella definizione. Il calcolo è d'altronde assai facile da eseguire; non così se la forma risulta quella binomia:

5.45-19 $$\bar{C} = (\bar{A})^n = (a_1 + ja_2)^n,$$

poiché occorre eseguire l' innalzamento a potenza di un binomio.

Si noti che nella rappresentazione simbolica l'elevazione di potenza non ha significato per le grandezze sinusoidali.

7) *Estrazione di radice*

Definizione: La radice n-esima di un numero complesso è ancora una grandezza complessa che ha rispettivamente per modulo la radice n-esima del modulo del numero complesso dato e per argomento $\frac{1}{n}$ volte il valore dell'argomento di quest' ultimo.

Operando in forma esponenziale, sarà dunque, per note regole algebriche:

5.45-20 $$\bar{C} = \sqrt[n]{\bar{A}} = (\bar{A})^{\frac{1}{n}} = (A\varepsilon^{j\alpha})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}\,\varepsilon^{j\frac{\alpha}{n}}.$$

Anche per l'estrazione di radice valgono le osservazioni fatte per la precedente operazione di elevazione a potenza.

8) *Derivata*

Ha significato derivare naturalmente solo quelle grandezze complesse che rappresentano funzioni sinusoidali [5], cioè del tipo $\bar{A}_M = A_M \varepsilon^{j\alpha} \cdot \varepsilon^{j\omega t}$. Per queste, ricordando quanto è stato detto al punto 3 del § 5.32, si potrà scrivere direttamente:

5.45-21 $$\bar{C} = \frac{d\bar{A}_M}{dt} = \omega A_M \varepsilon^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \varepsilon^{j\omega t},$$

---

(5) Perché sono funzioni del tempo.

TABELLA 5.45

Tavola riassuntiva delle operazioni sulle grandezze complesse.

Operazioni di	Moduli	Argomenti
Somma Sottrazione $\bar{A} \pm \bar{B}$	non si sommano non si sottraggono $\sqrt{(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2}$	non si sommano non si sottraggono $\text{arc tg}\ \frac{a_2 \pm b_2}{a_1 \pm b_1}$
Prodotto (per una costante) $K \cdot \bar{A}$	si moltiplicano $K \cdot A$	invariati α
Prodotto $\bar{A} \cdot \bar{B}$	si moltiplicano $A \cdot B$	si sommano $\alpha + \beta$
Quoziente $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$	si dividono $\frac{A}{B}$	si sottraggono $\alpha - \beta$
Elevazione potenza $\bar{A}^n$	si elevano all'esponente n A^n	si moltiplicano per l'esponente n $n\alpha$
Estrazione radice $\sqrt[n]{\bar{A}}$	si elevano all'esponente $1/n$ $A^{\frac{1}{n}}$	si dividono per l'esponente n $\frac{\alpha}{n}$
Derivazione $\frac{d\bar{A}_M}{dt} = j\omega\bar{A}_M$	si moltiplicano per ω ωA_M	aumentano di $\pi/2$ $\alpha + \frac{\pi}{2}$
Integrazione $\int \bar{A}_M\, dt = \frac{-j}{\omega} \bar{A}_M$	si dividono per ω A_M/ω	diminuiscono di $\pi/2$ $\alpha - \frac{\pi}{2}$

poiché la grandezza $\bar{C}$ deve avere modulo ω volte quello della grandezza da derivare e, rispetto a quest' ultima, deve essere sfasata in anticipo di $\pi/2$.

Ma è possibile scrivere la 5.45-21 in altra forma. Infatti, osservando che $\varepsilon^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \varepsilon^{j\alpha}.\varepsilon^{j\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{j\alpha}.j$, si ha subito:

5.45-22 $$\bar{C} = \frac{d\bar{A}_M}{dt} = j\omega A_M \varepsilon^{j\alpha}.\varepsilon^{j\omega t} = j\omega \bar{A}_M,$$

ottenendo così l' importante

definizione: la derivata di una funzione sinusoidale $\bar{A}_M$ risulta una grandezza $j\omega$ volte quella da derivare. Si passerà quindi dalla grandezza data alla sua derivata semplicemente moltiplicando per l'operatore vettoriale $j\omega$ $\left(\text{cioè } \omega\varepsilon^{j\frac{\pi}{2}}\right)$.

9) *Integrale*

Ha significato integrare ovviamente solo quelle grandezze complesse che rappresentano funzioni sinusoidali ([6]), cioè del tipo $\bar{A}_M = A_M\,\varepsilon^{j\alpha}.\varepsilon^{j\omega t}$. Per queste, ricordando quanto è stato detto al punto 4 del § 5.32, si potrà scrivere direttamente che:

5.45-23 $$\bar{C} = \int \bar{A}_M\,dt = \frac{1}{\omega} A_M \varepsilon^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}.\varepsilon^{j\omega t},$$

poiché $\bar{C}$ è una grandezza il cui modulo risulta $\frac{1}{\omega}$ volte quello della grandezza da integrare e, rispetto a quest' ultima, è sfasata in ritardo di $\frac{\pi}{2}$.

Ma è possibile scrivere la 5.45-23 in altra forma. Infatti osservando che $\varepsilon^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \varepsilon^{j\alpha}.\varepsilon^{-j\frac{\pi}{2}} = \varepsilon^{j\alpha}(-j)$, si ha subito:

5.45-24 $$\bar{C} = \int \bar{A}_M\,dt = -\frac{j}{\omega} A_M \varepsilon^{j\alpha} \varepsilon^{j\omega t} = \frac{-j}{\omega} \bar{A}_M,$$

ottenendo così l' importante

([6]) Si veda quanto esposto nella nota precedente.

definizione: l'integrale di una funzione sinusoidale $\overline{A}_M$ è una grandezza $-j\dfrac{1}{\omega}$ volte quella da integrare. Si passerà quindi dalla grandezza data al suo integrale moltiplicando semplicemente per l'operatore vettoriale $-j\dfrac{1}{\omega}\left(\text{cioè } \dfrac{1}{\omega}\,\varepsilon^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$.

5.46 Problemi di applicazione al § 5.4

Esercizio 5.461

Si esegua la somma e la differenza dei due numeri complessi:

$$\overline{A} = 3 - j\,4\,, \qquad \overline{B} = 4 + j\,3\,;$$

ponendo poi i risultati nella forma abbreviata di Kennelly.

Soluzione

Somma

Operando necessariamente in forma binomia si ha:

$$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} = 3 - j\,4 + 4 + j\,3 = (3 + 4) + j(3 - 4) = 7 - j\,1\,,$$

da cui si ricaverà per il modulo il valore:

$$C = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = 7{,}07$$

e per l'argomento il valore (vedi fig. 5.461-1):

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-1}{7} \cong -0{,}143\,; \quad \gamma = -8^0\,8'\,.$$

Nella forma abbreviata di Kennelly la grandezza $\overline{C}$ risulterà quindi espressa da: $7{,}07 \,\underline{|-8^0\,8'}$.

Differenza

Operando ancora in forma binomia si ha:

$$\overline{C} = \overline{A} - \overline{B} = 3 - j\,4 - (4 + j3) = (3 - 4) - j(4 + 3) = -1 - j\,7\,,$$

da cui si ricaverà per il modulo il valore:

$$C = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = 7{,}07$$

e per l'argomento il valore (a meno di π):

$$tg\,\gamma' = \frac{-7}{-1} = 7 \quad , \quad \gamma' = 81^0\,52'.$$

Osservando però la costruzione riportata in fig. 5.461-2 si comprende

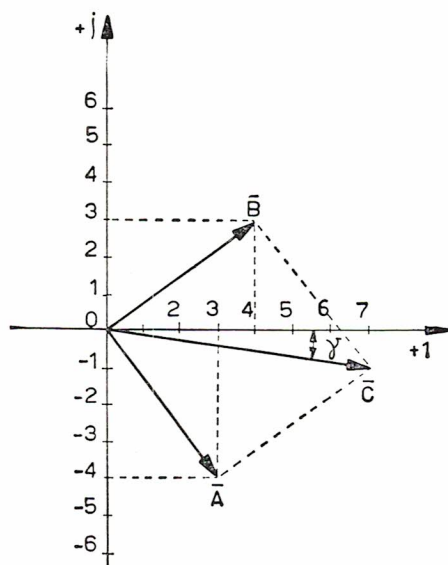



Fig. 5.461-1

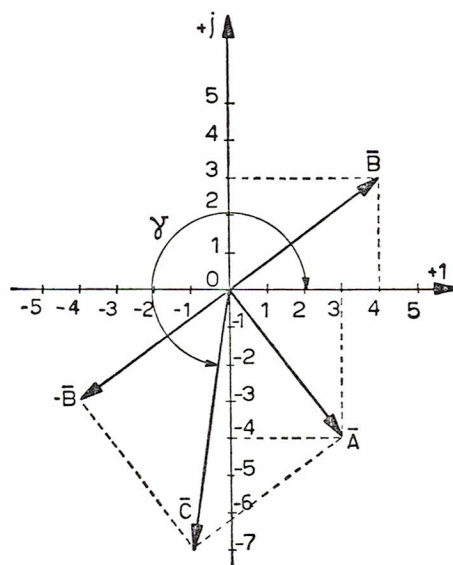



Fig. 5.461-2

che l'argomento γ del vettore differenza ammonta effettivamente a $81^0\,52' + 180^0 = 261^0\,52'$.

Nella forma abbreviata di Kennelly la grandezza C risulterà quindi espressa da $7{,}07\ \underline{|261^0\,52'}$.

Esercizio 5.462

Si esegua il prodotto e il rapporto dei due numeri complessi:

$$\bar{A} = 12 + j\,7\ , \qquad \bar{B} = 7 - j\,5\ ;$$

rappresentando i risultati in forma esponenziale e geometrica nel piano.

Soluzione

Prodotto

Poiché i numeri complessi sono espressi in forma binomia, si eseguirà il prodotto in tale forma. Risulta così:

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} = (12 + j\,7)(7 - j\,5) = 84 + j\,49 - j\,60 + 35 = 119 - j\,11.$$

Questo prodotto ha per modulo:

$$C = \sqrt{119^2 + 11^2} = \sqrt{14282} = 119{,}4$$

e per argomento:

$$tg\,\gamma = \frac{-11}{119} = -0{,}0925\,, \qquad \gamma = -5^0\,17'\,.$$

Pertanto in forma esponenziale avrà la seguente espressione:

$$\bar{C} = 119{,}4\ \varepsilon^{-j\,5^0\,17'}\,.$$

Allo stesso risultato si perviene se i due numeri complessi vengono subito trasformati dalla forma binomia in quella esponenziale.
Si ha allora:

$$A = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{193} = 13{,}89$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{7}{12} = 0{,}583\,, \qquad \alpha = 30^0\,15'\,;$$

$$B = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} = 8{,}60$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{-5}{7} = -0{,}714\,, \qquad \beta = -35^0\,32'\,;$$

quindi:

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} = 13{,}89\ \varepsilon^{j\,30^0\,15'} \cdot 8{,}60\ \varepsilon^{-j\,35^0\,32'} = 13{,}89 \cdot 8{,}60\ \varepsilon^{j(30^0\,15' - 35^0\,32')} =$$

$$= 119{,}4\ \varepsilon^{-j\,5^0\,17'}\,.$$

Per la rappresentazione grafica si veda il diagramma di fig. 5.462-1.

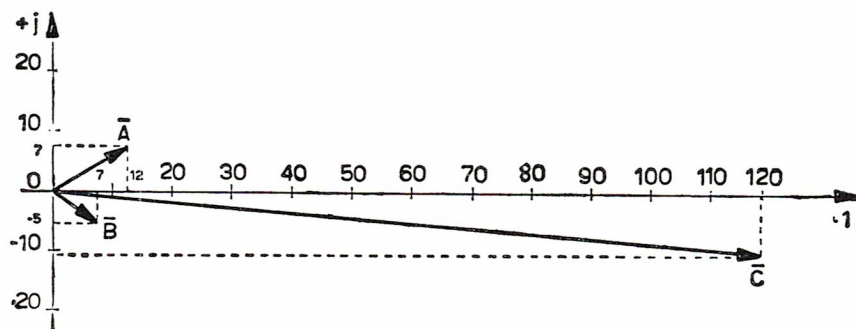



Fig. 5.462-1

Rapporto

Poiché i numeri complessi sono dati in forma binomia, si eseguirà il rapporto in tale forma. Si otterrà:

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{12 + j\,7}{7 - j\,5} = \frac{(12 + j\,7)(7 + j\,5)}{(7 - j\,5)(7 + j\,5)\,(^1)} =$$

$$= \frac{84 + j\,49 + j\,60 - 35}{7^2 + 5^2} = \frac{49 + j\,109}{74} = 0{,}662 + j\,1{,}473\,.$$

Questo rapporto ha per modulo:

$$C = \sqrt{0{,}662^2 + 1{,}473^2} = \sqrt{2{,}61} = 1{,}615$$

e per argomento:

$$tg\,\gamma = \frac{1{,}473}{0{,}662} = 2{,}223\,, \qquad \gamma = 65^0\,47'\,;$$

per cui in forma esponenziale avrà la seguente espressione:

$$\bar{C} = 1{,}615\ \varepsilon^{j\,65^0\,47'}\,.$$

Allo stesso risultato si dovrà pervenire impiegando i numeri complessi dati in forma esponenziale. Infatti si ha:

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{13{,}89\ \varepsilon^{j\,30^0\,15'}}{8{,}60\ \varepsilon^{-j\,35^0\,32'}} = \frac{13{,}89}{8{,}60}\ \varepsilon^{j\,[30^0\,15' - (-35^0\,32')]} = 1{,}615\ \varepsilon^{j\,65^0\,47'}\,.$$

---

(1) Ai fini dei calcoli successivi, è importante ricordare (a memoria) che il prodotto fra un numero complesso $b_1 + jb_2$ e il suo coniugato $b_1 - jb_2$ porta alla seguente quantità reale: $b_1^2 + b_2^2$.

Per la rappresentazione grafica si veda il diagramma di fig. 5.462-2.

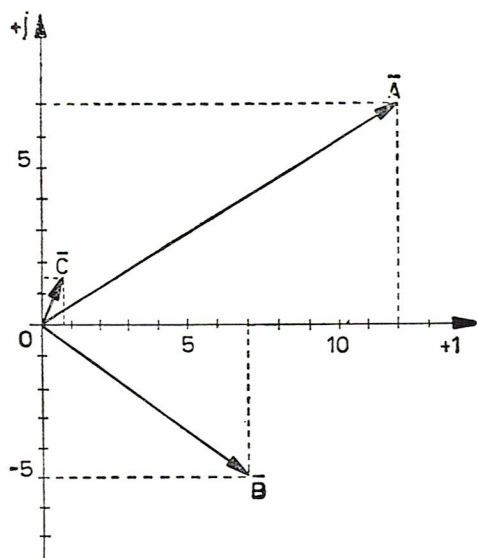



Fig. 5.462-z

Esercizio 5.463

Si esegua il prodotto, e quindi il rapporto, dei due numeri complessi :

$$\bar{A}\,(12\,\underline{|\,45^0})\ ,\ \ \bar{B}\,(5\,\underline{|\,-7^0})\ ;$$

fornendo i risultati in forma binomia.

Soluzione

Prodotto

Conviene eseguire il prodotto in forma esponenziale. Si ha così :

$$\bar{C} = \bar{A}\cdot\bar{B} = 12\ \varepsilon^{j\ 45^0}\cdot 5\ \varepsilon^{-j\ 7^0} = 60\ \varepsilon^{j\ 38^0}\ .$$

Mediante la formula di Eulero si trasformi poi il risultato ottenuto nella forma trigonometrica e quindi in forma binomia, come richiesto. Risulta allora :

$$\bar{C} = 60\ \varepsilon^{j\ 38^0} = 60\,(\cos 38^0 + j\,\mathrm{sen}\,38^0) = 60\,(0{,}788 + j\,0{,}616) = 47{,}3 + j\,36{,}9\ .$$

Rapporto

È conveniente eseguire il rapporto in forma esponenziale. Si ha su-

bito in tale modo il risultato cercato:

$$\bar{C} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{12\ \varepsilon^{j\,45^0}}{5\ \varepsilon^{-j\,7^0}} = 2{,}4\ \varepsilon^{j\,52^0}.$$

Mediante la formula di Eulero si trasformi poi il risultato ottenuto nella forma trigonometrica e quindi in quella binomia. Si ottiene allora:

$$\bar{C} = 2{,}4\ \varepsilon^{j\,52^0} = 2{,}4\,(\cos\ 52^0 + j\ \mathrm{sen}\ 52^0) = 2{,}4\,(0{,}616 + j\ 0{,}788) =$$

$$= 1{,}478 + j\ 1{,}89\ .$$

5.5 Proprietà dei circuiti elettrici in regime sinusoidale

5.51 Tensioni e correnti sinusoidali

I circuiti elettrici si dicono in regime sinusoidale quando presentano, ai capi di ciascun elemento, tensioni sinusoidali e sono percorsi da correnti esse pure sinusoidali della stessa frequenza. Queste condizioni risultano nella pratica molte volte verificate; d'altronde esse sono le più semplici possibili cui si possa pensare assoggettato un circuito in regime elettrico periodico.

Affinché però si verifichi quanto detto sopra, cioè di poter considerare effettivamente il circuito in regime sinusoidale, il quale è, come noto, anche *permanente*, occorre che la tensione al circuito sia stata applicata un certo tempo prima dell' istante in cui, per noi, inizia l'osservazione e lo studio del fenomeno. Questo tempo è necessario per permettere alle correnti di assumere nel circuito quei valori caratteristici del regime sinusoidale. Tale intervallo di tempo, indispensabile per portare dunque il circuito in regime permanente, viene chiamato transitorio (o anche periodo transitorio). Il suo valore non supera in pratica qualche secondo, potendo però durare anche assai meno [1], (micro o milli-secondi). Dei circuiti in regime transitorio tratterà il capitolo 8.

---

[1] Ciò dipende dalle caratteristiche degli elementi passivi che compongono il circuito.

Concludendo, dunque, nel presente capitolo si studieranno i circuiti elettrici basandosi sull' ipotesi che le tensioni e quindi le correnti siano rigorosamente sinusoidali, la qual cosa implicitamente esige che gli elementi che compongono il circuito siano lineari (²) e che il periodo transitorio sia da tempo esaurito.

Si desidera ricordare inoltre che per le tensioni sinusoidali si farà uso nel testo del seguente simbolismo. Precisamente, si indicherà con lettera minuscola e il valore istantaneo :

5.51-1 $$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi)\,;$$

quindi con E_M il valore massimo ; con E'_m il valore medio di una semionda, legato a quello massimo dalla seguente relazione (³) :

5.51-2 $$E'_m = \frac{2}{\pi} E_M = 0{,}636\, E_M\,;$$

con E il valore efficace, legato a quello massimo dalla seguente relazione (⁴) :

5.51-3 $$E = \frac{E_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot E_M\,.$$

Il fattore di forma varrà pertanto :

5.51-4 $$f.d.f. = \frac{E}{E'_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11\,.$$

Le correnti sinusoidali verranno indicate con la lettera minuscola i per i valori istantanei :

5.51-5 $$i = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi)\,;$$

quindi con I_M il valore massimo ; con I'_m il valore medio di una semionda, legato a quello massimo dalla stessa relazione vista in 5.51-2 per le tensioni e cioè :

(²) La definizione di elemento lineare verrà data nel § 7.1.

(³) Questa si ottiene calcolando con le regole dell'Analisi matematica l'espressione : $E'_m = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} E_M \operatorname{sen}\omega t\, dt$, di cui si è parlato nel § 5.13.

(⁴) Questa si ottiene calcolando con le regole dell'Analisi matematica l'espressione :

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_M^2\, sen^2\, \omega t\, dt}\,,$$

di cui si è trattato nel § 5.12.

$$5.51\text{-}6 \qquad I'_m = \frac{2}{\pi} I_M = 0{,}636 \cdot I_M \; ;$$

con I il valore efficace, legato a quello massimo dalla relazione:

$$5.51\text{-}7 \qquad I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \cdot I_M \; ,$$

del tutto analoga, ovviamente, a quella data in 5.51-3 per le tensioni. Anche per una corrente sinusoidale il fattore di forma varrà perciò 1,11.

5.52 Resistenze, induttanze e capacità percorse da correnti sinusoidali

Si esaminerà in questo paragrafo il comportamento di una resistenza, di un' induttanza, di una capacità, che sono i tre parametri fondamentali con cui si possa considerare caratterizzato in generale un circuito elettrico, quando esse sono sottoposte ad una tensione sinusoidale e quindi risultano percorse da corrente pure sinusoidale. L'esame verrà svolto in maniera completa, cioè prendendo in considerazione le relazioni che tali parametri vengono a determinare fra tensione e corrente, e viceversa fra corrente e tensione, tanto per i valori istantanei che *vettoriali*. Questi ultimi, come si dirà ancora nella nota 1, compariranno con i loro valori efficaci, anziché massimi, come è d' uso nell' Elettrotecnica.

Si incomincerà ad esaminare il caso più semplice, cioè la resistenza, quindi l' induttanza, e per ultimo la capacità.

Resistenza

Data una resistenza di valore R, od una conduttanza di valore $G = \frac{1}{R}$ (vedi fig. 5.52-1*a*), ai cui capi venga applicata una tensione sinusoidale:

$$5.52\text{-}1 \qquad e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi) \, ,$$

vi circolerà una corrente il cui valore, istante per istante, è dato dal valore istantaneo della tensione applicata diviso per quello della resistenza R o moltiplicato per quello della conduttanza G (legge di Ohm):

$$5.52\text{-}2 \qquad i_R = \frac{e}{R} = G\,e = GE_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi) = I_{RM} \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \, ,$$

da cui si ricava quindi:

5.52-3 $$I_{RM} = GE_M = \frac{1}{R} E_M ,$$

5.52-4 $$\psi = \xi .$$

La corrente risulta perciò in fase con la tensione (fig. 5.52-1*b*). Infatti $G = \frac{1}{R}$ rappresenta una costante (la costante K del § 5.23), precisamente un numero reale positivo. Si potrà pertanto affermare che il *vettore corrente* risulterà in fase con il corrispondente *vettore tensione*.

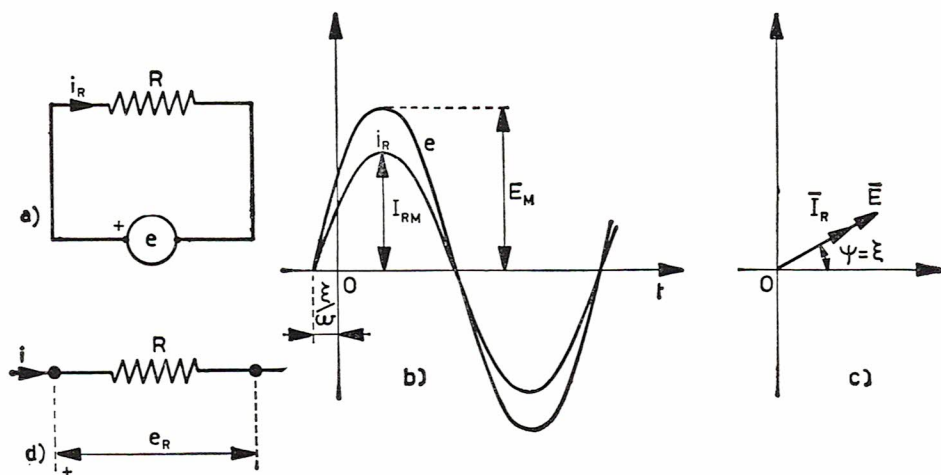



Fig. 5.52-1

Dalle 5.52-3 e 4 discende quindi che:

— nella rappresentazione vettoriale, il vettore $\bar{I}_R$ (¹), che rappresenta la corrente che circola nella resistenza data, sarà sovrapposto al vettore $\bar{E}$ (¹), che rappresenta la tensione applicata (fig. 5.52-1*c*), e la sua ampiezza risulterà G volte $\left(\text{o } \frac{1}{R} \text{ volte}\right)$ quella del vettore tensione. Sarà cioè:

5.52-5 $$I_R = GE = \frac{E}{R} ;$$

— con la rappresentazione simbolica, $G\left(\text{o } \frac{1}{R}\right)$ costituisce un

---

(¹) Si noti che nell' Elettrotecnica, per ragioni pratiche, le grandezze alternative vengono indicate con il loro valore efficace anziché con quello massimo. In questo caso è facile vedere però che sia le relazioni fra moduli che quelle fra gli argomenti rimangono ancora le stesse. Moltiplicando ad esempio per $\sqrt{2}$ l'espressione 5.52-5 si riottiene infatti la 5.52-3.

operatore vettoriale (costante moltiplicativa) che modifica il modulo ma non l'argomento della tensione sinusoidale. Precisamente si scriverà:

5.52-6 $$\bar{I}_R = G\bar{E} = \frac{1}{R}\,\bar{E}\,.$$

Viceversa, data una resistenza di valore R percorsa da corrente sinusoidale:

5.52-7 $$i = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi)\,,$$

ai suoi capi si manifesterà una caduta di tensione (fig. 5.52-1d) avente la seguente espressione (legge di Ohm):

5.52-8 $$e_R = Ri = RI_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi) = E_{RM} \operatorname{sen}(\omega t + \xi)\,,$$

da cui si ricava:

5.52-9 $$E_{RM} = RI_M\,,$$

5.52-10 $$\xi = \psi\,.$$

Naturalmente la caduta di tensione è ancora in fase con la corrente che la determina.

Nella rappresentazione vettoriale la situazione rimarrà perciò la stessa di quella riportata in fig. 5.52-1c; con la rappresentazione simbolica si scriverà invece:

5.52-11 $$\bar{E}_R = R\bar{I}\,,$$

o anche:

5.52-12 $$\bar{E}_R = \frac{1}{G}\,\bar{I}\,.$$

INDUTTANZA

Data un' induttanza di valore L (fig. 5.52-2a), ai cui capi venga applicata la tensione sinusoidale:

5.52-13 $$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi)\,,$$

vi scorrerà una corrente il cui valore istantaneo i_L è legato a quello della tensione applicata dalla ben nota relazione:

5.52-14 $$e = L\,\frac{di_L}{dt}\ (^2)\,.$$

---

(2) Con $L \cdot di_L/dt$ si intende la caduta di tensione e non la forza controelettromotrice di autoinduzione. Per questo motivo nella 5.52-14 non compare il segno meno.

Da questa relazione si deduce, per le proprietà viste sulla derivata, che:

— la corrente i_L deve essere sinusoidale ed avere la stessa frequenza della tensione applicata;

— la corrente i_L deve ritardare di $\frac{T}{4}$ [3], cioè deve essere sfasata in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione $\left(\text{differenza di fase quindi } \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$, poiché così la derivata della corrente $\frac{di_L}{dt}$ (l'operazione di derivata fa appunto anticipare di $\frac{T}{4}$) ritorna in fase con la tensione, come esige la espressione data in 5.52-14.

Avvalendosi della 5.52-14, o di quanto detto nella nota 3, si può verificare facilmente che la corrente i_L ha la seguente espressione [4]:

5.52-15 $$i_L = \frac{E_M}{\omega L} \operatorname{sen}\left(\omega t + \xi - \frac{\pi}{2}\right) = I_{LM} \operatorname{sen}(\omega t + \psi),$$

dalla quale appare evidente dunque che l'ampiezza della sinusoide che rappresenta la corrente (fig. 5.52-2*b*) ammonta a:

5.52-16 $$I_{LM} = \frac{E_M}{\omega L},$$

mentre la fase vale:

5.52-17 $$\psi = \xi - \frac{\pi}{2}.$$

Risulta quindi che:

— nella rappresentazione vettoriale (fig. 5.52-2*c*), la corrente è individuata da un vettore $\overline{I}_L$ sfasato in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla tensione

---

[3] Infatti la 5.52-14 si può scrivere come $di_L = \frac{1}{L} e\, dt$, che integrata diventa $i_L = \frac{1}{L}\int e\, dt = \frac{1}{L}\int E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi)\, dt$. È facile allora affermare, per quanto riportato al punto 5 del paragrafo 5.23, che la corrente è sinusoidale, isofrequenziale, di ampiezza $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{L} E_M$ e in ritardo di $\frac{T}{4}$.

[4] Infatti, derivando la 5.52-15 e moltiplicando poi il risultato per L, si ottiene l'espressione della tensione di partenza data in 5.52-13.

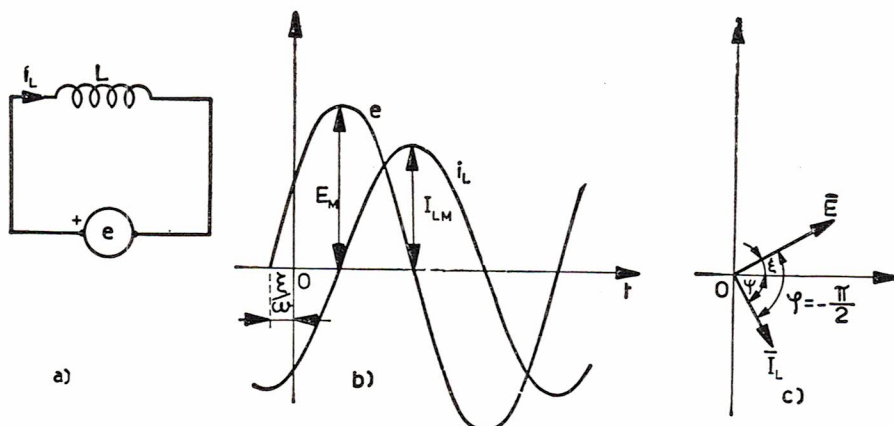



Fig. 5.52-2

$\bar{E}$ $\left(\text{angolo di sfasamento } \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$ [5] e la cui ampiezza è legata a quella della tensione applicata dalla relazione:

5.52-18
$$I_L = \frac{1}{\omega L} E;$$

— con la notazione simbolica, poichè $\bar{I}_L$ deve risultare di modulo $\frac{1}{\omega L}$ volte quello della tensione applicata $\bar{E}$ ed in ritardo sulla stessa di $\frac{\pi}{2}$, si scriverà, anche per quanto detto al punto 9 del § 5.45:

5.52-19
$$\bar{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \bar{E}.$$

Si noti che il termine $\frac{1}{\omega L}$ viene denominato nella Elettrotecnica *suscettanza induttiva* (o suscettanza magnetica) ed indicato col simbolo B_L, cioè:

5.52-20
$$B_L = \frac{1}{\omega \mathrm{L}}.$$

Essa si misurerà in siemens qualora ω venga misurata in rad/sec ed L in henry. Dimensionalmente la suscettanza è omogenea quindi con una conduttanza (si veda ad esempio la formula 5.52-18 ove B_L risulta come rapporto fra una corrente e una tensione).

---

[5] Per angolo di sfasamento φ (talvolta detto differenza di fase) si intende l'angolo col quale anticipa o ritarda la corrente sulla tensione (e non viceversa).

In base quindi alla 5.52-19 il termine $-j\frac{1}{\omega L} = -jB_L$ rappresenta un operatore vettoriale, cioè l'operatore suscettanza induttiva dovuto all' induttanza, che trasforma la tensione in corrente.

Viceversa, una corrente sinusoidale (fig. 5.52-3*b*):

5.52-21 $$i = I_M \text{sen}\,(\omega t + \psi)\,,$$

la quale attraversa un' induttanza di valore L, determinerà ai capi di questa una caduta di tensione e_L il cui valore è legato alla corrente i ancora dalla ben nota relazione:

5.52-22 $$e_L = L\frac{di}{dt}\,.$$

Questa caduta di tensione sarà dunque:

— sinusoidale e della stessa frequenza della corrente i;

— rappresentata da una sinusoide (fig. 5.52-3*b*) di ampiezza ωL

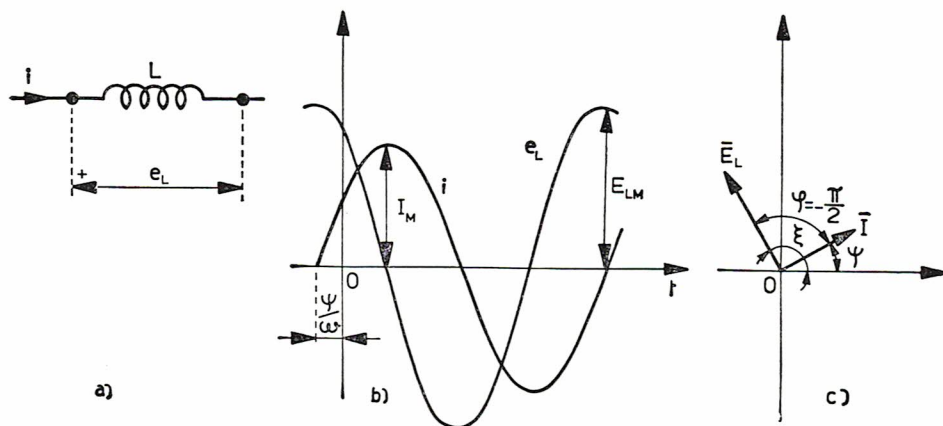



Fig. 5.52-3

volte quella della corrente e, rispetto a questa, sfasata in anticipo di $\pi/2$.
Si potrà pertanto scrivere che:

5.52-23 $$e_L = \omega L I_M \text{sen}\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = E_{LM}\text{sen}(\omega t + \xi)\,,$$

espressione dalla quale appare evidente perciò la seguente relazione fra le ampiezze:

5.52-24 $$E_{LM} = \omega L \cdot I_M ,$$

e fra le fasi:

5.52-25 $$\xi = \psi + \frac{\pi}{2} .$$

Risulta quindi che:

— nella rappresentazione vettoriale (fig. 5.52-3*c*), la caduta di tensione è individuata da un vettore avente ampiezza ωL volte quello della corrente, cioè:

5.52-26 $$E_L = \omega L \cdot I ,$$

e in anticipo sulla corrente dell'angolo $\frac{\pi}{2}$ (angolo di sfasamento $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, si ricordi quanto è stato esposto nella nota 5).

— con la rappresentazione simbolica, poiché $\overline{E}_L$ deve risultare di modulo ωL volte quello della corrente $\overline{I}$ e in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ si potrà scrivere:

5.52-27 $$\overline{E}_L = j\,\omega L \overline{I} .$$

Si noti che il prodotto fra la pulsazione ω e l' induttanza L viene denominato nell' Elettrotecnica con il nome di *reattanza induttiva* (o magnetica) ed indicato con X_L. Un' induttanza di valore L (henry) in regime sinusoidale di pulsazione ω (radianti/secondo) presenterà pertanto una reattanza di valore:

5.52-28 $$X_L = \omega L ,$$

misurata in ohm. Le sue dimensioni sono omogenee dunque con quelle di una resistenza, cioè di un rapporto fra una tensione e una corrente; come infatti la 5.52-26 mostra chiaramente. D'altronde in base alla 5.52-27 il termine $j\,\omega L = j\,X_L$ rappresenta un operatore vettoriale, precisamente l'operatore vettoriale reattanza induttiva dovuto all' induttanza, che trasforma la corrente in tensione.

Naturalmente la reattanza induttiva X_L di un' induttanza L alla pulsazione ω risulta numericamente (e dimensionalmente) l' inverso della corrispondente suscettanza. Si ha cioè:

5.52-29 $$X_L \cdot B_L = 1 .$$

Si noti ancora che l'espressione della corrente $\overline{I}_L$ data in 5.52-19,

avvalendosi del concetto di reattanza, potrà essere scritta nella seguente forma, assai comoda in pratica:

5.52-30 $$\bar{I}_L = \frac{1}{j\,\omega L}\,\bar{E} = \frac{1}{j\,X_L}\,\bar{E}.$$

CAPACITÀ

Data una capacità di valore C, ai cui capi venga applicata la tensione sinusoidale (fig. 5.52-4b):

5.52-31 $$e = E_M\,\text{sen}(\omega t + \xi)\,,$$

vi scorrerà una corrente il cui valore istantaneo i_C è legato a quello della tensione applicata dalla relazione:

5.52-32 $$i_C = C\frac{de}{dt}\ (^6)\,,$$

dalla quale, per le proprietà viste a proposito dell'operazione di derivata sulle grandezze sinusoidali, si può dedurre immediatamente che:

— la corrente i_C risulta anch'essa sinusoidale e della stessa frequenza della tensione applicata;

— la sinusoide che rappresenta la corrente i_C ha ampiezza ωC volte quella della tensione applicata e su questa anticipa di $T/4$.

Pertanto si potrà scrivere che:

5.52-33 $$i_C = \omega C\cdot E_M\text{sen}\left(\omega t + \xi + \frac{\pi}{2}\right) = I_{CM}\text{sen}\,(\omega t + \psi)\,,$$

espressione dalla quale appare evidente dunque la seguente relazione fra le ampiezze:

5.52-34 $$I_{CM} = \omega C\cdot E_M\,,$$

e fra le fasi:

5.52-35 $$\psi = \xi + \frac{\pi}{2}.$$

---

(6) Infatti una capacità C, quando è sottoposta ad una qualsiasi variazione di tensione dv, dovendo modificare la carica della quantità $dq = Cdv$, dà luogo alla seguente corrente $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$. Naturalmente nel nostro caso la tensione v in variazione è quella e applicata alla capacità C (fig. 5.52-4a).

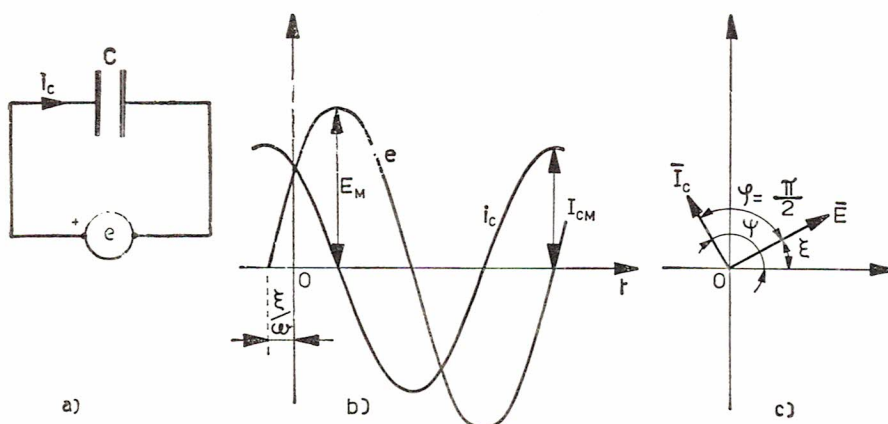



Fig. 5.52-4

Risulta quindi che:

— nella rappresentazione vettoriale (fig. 5.52-4*c*), la corrente è individuata da un vettore $\bar{I}_c$ avente ampiezza ωC volte quello della tensione $\bar{E}$, cioè:

5.52-36 $$I_c = \omega C \cdot E\,,$$

e in anticipo sulla tensione dell'angolo $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{angolo di sfasamento } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

— con la rappresentazione simbolica, la relazione fra $\bar{I}_c$ ed $\bar{E}$ verrà interpretata dalla seguente relazione:

5.52-37 $$\bar{I}_c = j\,\omega C \bar{E}\,.$$

Si noti che al prodotto ωC nell' Elettrotecnica viene dato il nome di *suscettanza capacitiva* e viene indicata con il simbolo B_c, cioè quindi:

5.52-38 $$B_c = \omega C\,.$$

Essa risulta misurata in siemens, qualora si misuri ω in rad/sec e C in farad. Come si può controllare facilmente anche la suscettanza capacitiva, come quella induttiva, è omogenea quindi con una conduttanza.

D'altronde, in base alla 5.52-37, il termine $j\,\omega C = jB_c$ rappresenta un altro operatore vettoriale, cioè l'operatore suscettanza capacitiva, dovuto questa volta alla capacità. Si noti che esso fa ruotare le grandezze vettoriali sinusoidali dello stesso angolo $(\pi/2)$ ma in senso opposto di come opera la suscettanza induttiva.

Le due suscettanze induttiva e capacitiva, è importante ricordarlo, agiranno quindi nel circuito in maniera discorde.

Viceversa, una corrente elettrica sinusoidale (fig. 5.52-5*b*):

5.52-39 $$i = I_M \text{sen}\,(\omega t + \psi)\,,$$

la quale attraversi una capacità C (7), determinerà ai suoi capi una caduta di tensione il cui valore istantaneo e_c sarà legato a quello della corrente i ancora ovviamente dalla relazione data in 5.52-32 (8). Questa caduta di tensione sarà dunque:

— sinusoidale e della stessa frequenza della corrente,

— sfasata in ritardo di $\frac{\pi}{2}$.

Avvalendosi della 5.52-32, o meglio di quanto detto nella nota 8, si potrà giustificare per la caduta di tensione e_c la seguente espressione:

5.52-40 $$e_c = \frac{1}{\omega C} I_M \text{sen}\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) (^9) = E_{cM} \text{sen}(\omega t + \xi)\,,$$

espressione dalla quale appare evidente quindi la seguente relazione fra le ampiezze:

5.52-41 $$E_{cM} = \frac{1}{\omega C} I_M\,,$$

e fra le fasi:

5.52-42 $$\xi = \psi - \frac{\pi}{2}.$$

---

(7) Una capacità, sottoposta all'azione di una tensione alternata, è costretta a caricarsi e scaricarsi alternativamente con la stessa periodicità, determinando perciò nel circuito un flusso alterno di cariche, cioè una corrente alternata. A differenza della corrente continua, che non può passare attraverso una capacità, quella alternata è come se vi *passasse*.

(8) Questa può esser scritta come $de_c = \frac{1}{C} idt$, la quale, integrata, diventa $e_c = \frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{C}\int I_M \text{sen}\,(\omega t + \psi)\,dt$. È facile allora affermare, in base a quanto è stato detto al punto 5 del paragrafo 5.23, che la tensione è sinusoidale, isofrequenziale, di ampiezza $\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{C} E_M$ e in ritardo di $\frac{T}{4}$.

(9) Si può verificare facilmente quanto ora scritto poiché, derivando la stessa 5.52-40 e moltiplicando poi il risultato per $\frac{1}{C}$, si ottiene l'espressione della corrente data in 5.52-39.

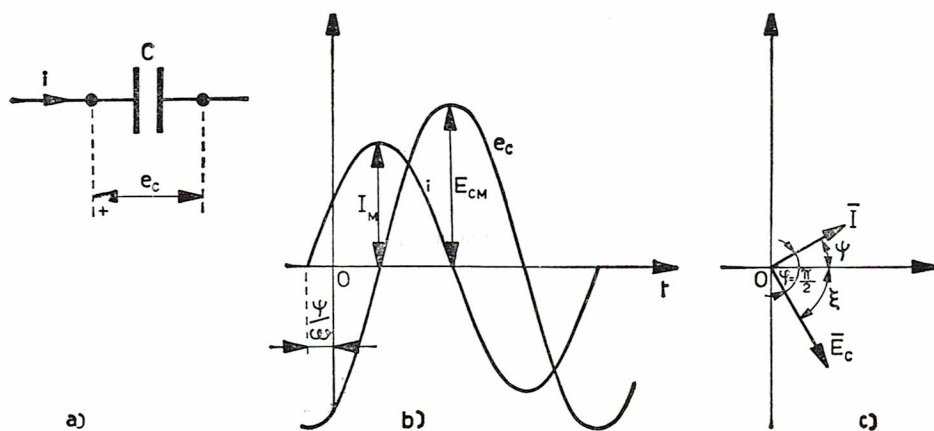



Fig. 5.52-5

Pertanto si potrà affermare che:

— nella rappresentazione vettoriale (fig. 5.52-5*c*), il vettore $\bar{E}_c$, il cui modulo è legato a quello della corrente $\bar{I}$ dalla relazione:

5.52-43
$$E_c = \frac{1}{\omega C} I ,$$

è sfasato in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente $\left(\text{angolo di sfasamento } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

— con la rappresentazione simbolica si potrà scrivere invece che:

5.52-44
$$\bar{E}_c = -j \frac{1}{\omega C} \bar{I} .$$

Si noti come al termine $\frac{1}{\omega C}$ venga dato nell' Elettrotecnica il nome di *reattanza capacitiva* e venga indicato col simbolo X_c, cioè quindi risulti:

5.52-45
$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{B_c} \text{ (10)} .$$

(10) Anche per la capacità si verifica perciò la condizione $X_C \cdot B_C = 1$, analoga a quella vista in 5.52-29 per l' induttanza.

La reattanza verrà misurata in ohm qualora si misuri ω in radianti/secondo e C in farad. Le sue dimensioni sono omogenee naturalmente con quelle di una resistenza, cioè di un rapporto tensione/corrente, come infatti la 5.52-43 mostra chiaramente.

In base alla 5-52-44, il termine $-j\dfrac{1}{\omega C} = -jX_c$ rappresenta un altro operatore vettoriale, cioè l'operatore reattanza capacitiva dovuto alla capacità. Esso fa ruotare le grandezze vettoriali sinusoidali dello stesso angolo $(\pi/2)$ ma in senso opposto di come opera la reattanza induttiva. Per questo motivo quindi le due reattanze, capacitiva ed induttiva, agiscono nel circuito in modo opposto.

Si noti ancora come l'espressione della corrente $\bar{I}_c$ data in 5.52-37, avvalendosi del concetto di reattanza, possa essere scritto nella seguente forma, molte volte usata in pratica:

5.52-46
$$\bar{I}_c = \frac{\bar{E}}{\dfrac{-j}{\omega C}} = \frac{\bar{E}}{-jX_c}.$$

Esercizio 5.521

Si trovi quale valore deve avere un' induttanza, funzionante alla frequenza $f = 50$ per/sec, affinché la corrente in essa assuma il valore di 2 ampere quando la tensione applicata è di 200 volt.

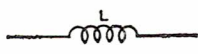
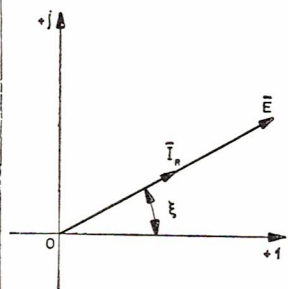
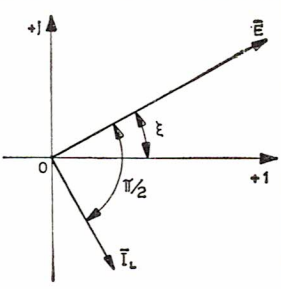
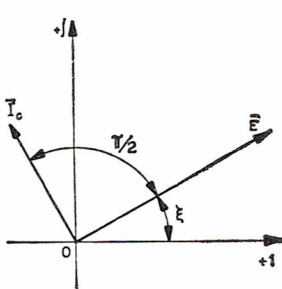
Soluzione

Dalla seguente espressione, che lega i valori della tensione e della corrente in un' induttanza:

$$E_L = \omega L I_L\,,$$

è possibile ricavare facilmente quello dell' induttanza stessa. Quindi:

$$L = \frac{E_L}{2\pi f I_L} = \frac{200}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 2} = 0{,}318 \text{ henry}\,.$$

Si noti che, alla frequenza data, la reattanza X_L dell' induttanza ora trovata deve valere 100 ohm. Infatti $X_L = E_L/I_L = 200/2 = 100$ ohm.

Esercizio 5.522

Quale valore deve presentare la capacità C di un condensatore

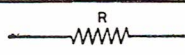
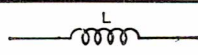
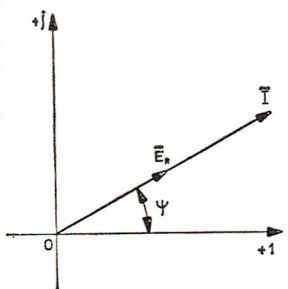
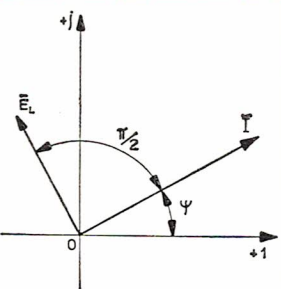
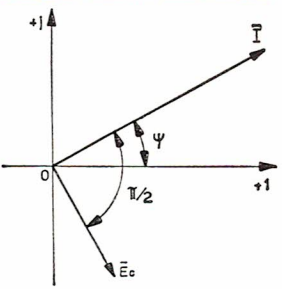



Tabella 5.52

QUADRO RIASSUNTIVO DELLE RELAZIONI ESISTENTI IN REGIME SINUSOIDALE FRA TENSIONI E CORRENTI RELATIVAMENTE A RESISTENZE, INDUTTANZE, CAPACITÀ.

a) Corrente in funzione della tensione applicata $e = E_M \mathrm{sen}(\omega t + \xi)$

	R	L	C
valore istantaneo	$i_R = \dfrac{e}{R}$ $i_R = \dfrac{E_M}{R} \mathrm{sen}\,(\omega t + \xi)$	$i_L = \dfrac{1}{L}\int e dt$ $i_L = \dfrac{E_M}{\omega L} \mathrm{sen}\left(\omega t + \xi - \dfrac{\pi}{2}\right)$	$i_C = C \dfrac{de}{dt}$ $i_C = \omega C E_M \mathrm{sen}\left(\omega t + \xi + \dfrac{\pi}{2}\right)$
valore efficace (modulo)	$I_R = G \cdot E\ ,\ I_R = \dfrac{E}{R}$	$I_L = B_L \cdot E\ ,\ I_L = \dfrac{E}{\omega L}$	$I_C = B_C \cdot E\ ,\ I_C = \omega C E$
rappresentazione vettoriale	+j, $\bar{E}$, $\bar{I}_R$, ξ, 0, +1	+j, $\bar{E}$, ξ, 0, +1, $\pi/2$, $\bar{I}_L$	+j, $\bar{I}_C$, $\pi/2$, $\bar{E}$, ξ, 0, +1
relazione simbolica	$\bar{I}_R = G \cdot \bar{E}\ ,\ \bar{I}_R = \dfrac{\bar{E}}{R}$	$\bar{I}_L = \dfrac{-j}{\omega L}\bar{E}\ ,\ \bar{I}_L = \dfrac{\bar{E}}{j \omega L}$	$\bar{I}_C = j\omega C \cdot \bar{E}\ ,\ \bar{I}_C = \dfrac{\bar{E}}{\dfrac{-j}{\omega C}}$

b) Caduta di tensione in funzione della corrente assorbita $i = I_M \mathrm{sen}\,(\omega t + \psi)$

	R	L	C
valore istantaneo	$e_R = R i$ $e_R = R I_M \mathrm{sen}\,(\omega t + \psi)$	$e_L = L \dfrac{di}{dt}$ $e_L = \omega L I_M \mathrm{sen}\left(\omega t + \psi + \dfrac{\pi}{2}\right)$	$e_C = \dfrac{1}{C}\int i dt$ $e_C = \dfrac{1}{\omega C} I_M \mathrm{sen}\left(\omega t + \psi - \dfrac{\pi}{2}\right)$
valore efficace (modulo)	$E_R = R \cdot I\ ,\ E_R = \dfrac{I}{G}$	$E_L = X_L I\ ,\ E_L = \omega L \cdot I$	$E_C = X_C I\ ,\ E_C = \dfrac{1}{\omega C} I$
rappresentazione vettoriale	+j, $\bar{I}$, $\bar{E}_R$, ψ, 0, +1	+j, $\bar{E}_L$, $\pi/2$, $\bar{I}$, ψ, 0, +1	+j, $\bar{I}$, ψ, 0, +1, $\pi/2$, $\bar{E}_C$
relazione simbolica	$\bar{E}_R = R \cdot \bar{I}\ ,\ \bar{E}_R = \dfrac{\bar{I}}{G}$	$\bar{E}_L = j \omega L \cdot \bar{I}$	$\bar{E}_C = \dfrac{-j}{\omega C} \bar{I}$

affinché a 100 per/sec la sua suscettanza sia eguale a quella di un' induttanza $L = 0{,}2$ henry alla stessa frequenza?

Soluzione

Il problema impone che:

$$B_C = B_L\,,$$

cioè che:

$$\omega\, C = \frac{1}{\omega\, L}\,.$$

Dalla surriportata condizione si ricava perciò subito:

$$C = \frac{1}{\omega^2\, L} = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2\, L} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}87 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2} = 12{,}65\ \mu\text{F}\,.$$

Esercizio 5.523

A quale frequenza la reattanza di un' induttanza del valore di 1 henry è eguale alla reattanza di una capacità del valore di 1 μF?

Soluzione

Dalla seguente condizione, imposta dal problema:

$$X_L = X_C\,,$$

cioè anche:

$$2\,\pi\, f L = \frac{1}{2\,\pi\, f C}\,,$$

si potrà ricavare il particolare valore della frequenza f richiesta. Sarà perciò, risolvendo rispetto ad f l'equazione sopra scritta,

$$f = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{L\, C}} = 0{,}159\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-6}}} = 159\ \text{per/sec}\,.$$

5.53 Legge di Ohm

La parte passiva di un circuito elettrico può essere talvolta schematizzata con uno solo di quei tre parametri fondamentali esaminati nel

paragrafo precedente, talvolta invece no: pertanto si renderà necessario affrontare lo studio di quei circuiti in cui compaiono contemporaneamente più parametri differenti. Resistenze, induttanze, capacità si potranno infatti presentare combinate o tutte in serie, o tutte in parallelo, o anche in gruppi di serie e parallelo.

In questo paragrafo si incomincerà a trattare il caso in cui il circuito elettrico risulta schematizzabile con soli parametri in serie, come appare in fig. 5.53-1. Naturalmente sarà alimentato con tensione sinusoidale il cui

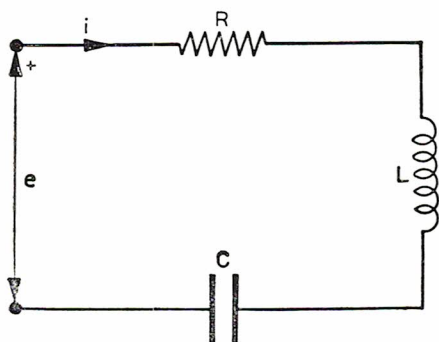



Fig. 5.53-1

valore istantaneo è individuato dall'espressione:

5.53-1 $$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi),$$

nella quale E_M, ω, ξ si supporranno noti. Il problema sarà allora risolto quando, noti i parametri R, L, C, risulteranno pure note l'ampiezza e la fase della corrente i che scorre nel circuito dato.

La soluzione di questo problema si baserà naturalmente sulla legge di Ohm, poiché lo studio interessa un circuito elettrico.

A tale scopo si impiegherà la legge di Ohm per i valori istantanei (non conoscendo ancora altra forma di questa legge), la quale stabilisce che, alla tensione applicata al circuito, devono fare equilibrio, istante per istante, le varie cadute di tensione che si hanno nel circuito stesso. Detta perciò e_R, e_L, e_C rispettivamente la caduta di tensione nella resistenza R, nell' induttanza L, nella capacità C, si potrà scrivere:

5.53-2 $$e = e_R + e_L + e_C \text{ (legge di Ohm)},$$

espressione valida in ogni istante. D'altronde, poichè il circuito è percorso dalla corrente i, la 5.53-2 potrà anche essere scritta nella seguente forma:

5.53-3 $$e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi),$$

come risulterà facilmente ricordando quanto esposto nel paragrafo precedente [1].

La 5.53-3 rappresenta un'equazione integro-differenziale della quale si darà, senza alcuna dimostrazione, la soluzione che qui interessa e cioè:

5.53-4 $$i = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \text{sen}\,(\omega t + \xi + \varphi) = I_M \,\text{sen}\,(\omega t + \psi)\,,$$

ove l'angolo φ è determinato dall'espressione:

5.53-5 $$\text{tg}\,\varphi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Il risultato cui si è pervenuti è il seguente:

— la corrente i è ancora sinusoidale e della stessa frequenza della tensione applicata;

— la sinusoide che rappresenta la corrente (vedi fig. 5.53-2) ha ampiezza:

5.53-6 $$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

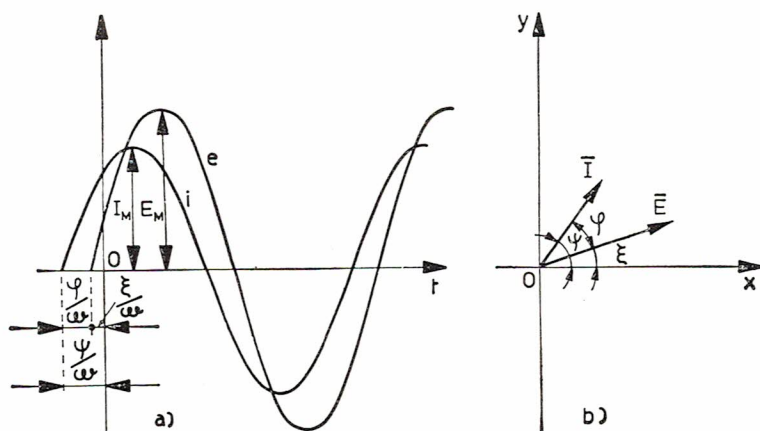



Fig. 5.53-2

---

(1) Per l'espressione di e_L si veda la 5.52-22, per quella di e_C invece quanto appare in principio della nota 8 del precedente § 5.52

e differisce in fase dalla tensione applicata per l'angolo φ il cui valore è ricavabile dalla 5.53-5. Ad esempio, in fig. 5.53-2 la corrente *anticipa* sulla tensione appunto dell'angolo φ; la sua fase vale invece $\psi = \xi + \varphi$.

Ma il problema di trovare la corrente del circuito dato può essere impostato in altro modo. Allo scopo però di poter spiegare meglio il metodo che si sta per descrivere, è conveniente supporre momentaneamente nota la corrente e quindi incognita la tensione da applicare al circuito affinché esso diventi sede della corrente fissata.

Precisamente, si incominci a far uso del metodo vettoriale per rappresentare la tensione applicata al circuito, la corrente che vi scorre e quindi le relative cadute nella resistenza, nell' induttanza e nella capacità: ciò è lecito poiché queste sono tutte grandezze sinusoidali della stessa frequenza e pertanto rappresentabili appunto con vettori fermi nel piano. Siccome il vettore corrente $\overline{I}$ è supposto noto, esso verrà posto (arbitrariamente, ma per comodità) sull'asse orizzontale (vedi fig. 5.53-3).

Ora, questa corrente determinerà, come si è detto, una caduta di tensione nella resistenza R, il cui vettore indicheremo con $\overline{E}_R$, in fase con la corrente $\overline{I}$ e di ampiezza RI (segmento OA di fig. 5.53-3), una caduta di tensione nell'induttanza L, il cui vettore indicheremo con $\overline{E}_L$, in quadratura in anticipo sulla corrente $\overline{I}$ e di ampiezza ωLI (segmento OB di fig. 5.53-3), una caduta di tensione nella capacità C, il cui vettore indicheremo con $\overline{E}_C$, in quadratura in ritardo sulla corrente $\overline{I}$ e di ampiezza $\dfrac{1}{\omega C} I$ (segmento OC di fig. 5.53-3). D'altronde la somma di questi tre vettori $\overline{E}_R, \overline{E}_L, \overline{E}_C$ dovrà dare per risultante la tensione $\overline{E}$ applicata al circuito, poiché nel circuito non agiscono altre cadute di tensione od altre *f.e.m.*

Ma è appunto questa costruzione vettoriale che suggerisce di impostare la risoluzione del problema in altro modo, ricorrendo precisamente alla rappresentazione simbolica delle grandezze vettoriali, poiché infatti quanto è stato rappresentato vettorialmente nella fig. 5.53-3, e ciò indi-

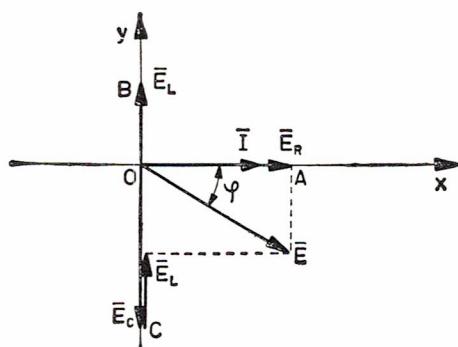
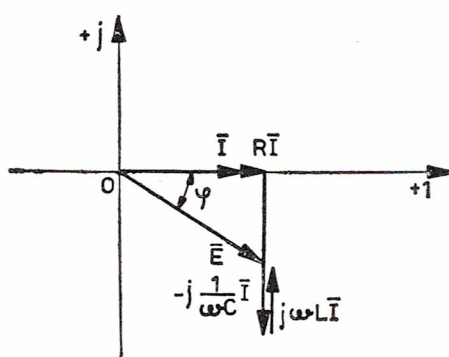



Fig. 5.53-3 *Fig. 5.53-4*

pendentemente dalla reale fase che avrà il vettore $\bar{E}$, può essere tradotto nella seguente equazione:

5.53-7 $$\bar{E} = \bar{E}_R + \bar{E}_L + \bar{E}_C \quad \text{(legge di Ohm in forma simbolica).}$$

È possibile affermare allora che la quantità complessa $\bar{E}$ risulta come somma delle tre quantità complesse $\bar{E}_R$, $\bar{E}_L$, $\bar{E}_C$, cosicché, ricordando quanto è stato trovato nel precedente paragrafo, e cioè che:

5.53-8 $$\bar{E}_R = R\bar{I} \qquad \bar{E}_L = j\,\omega L\bar{I} \qquad \bar{E}_C = -j\,\frac{1}{\omega C}\,\bar{I},$$

la 5.53-7 diverrà di conseguenza:

5.53-9 $$\bar{E} = R\bar{I} + j\,\omega L\bar{I} - j\,\frac{1}{\omega C}\,\bar{I} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\bar{I}.$$

Si noti la costruzione grafica di fig. 5.53-4, ove la corrente $\bar{I}$ ha ancora fase zero (come nella fig. 5.53-3). In realtà la corrente $\bar{I}$ avrà generalmente un certo angolo di fase ψ, per cui il diagramma risulterà come quello riportato in fig. 5.53-5.

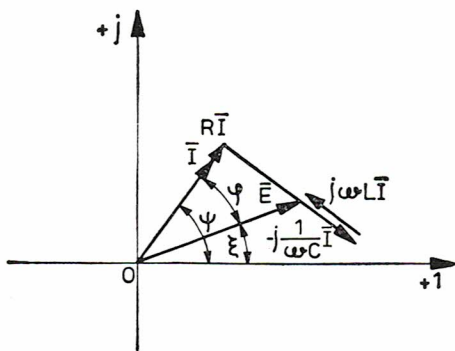



Fig. 5.53-5

A questo punto il calcolo della corrente, cioè della quantità complessa $\bar{I}$ il cui modulo e il cui argomento saranno appunto rispettivamente il valore efficace I della corrente e la sua fase ψ, verrà condotto con la tecnica dei numeri complessi, risolvendo, naturalmente l'equazione 5.53-9 e quindi il seguente rapporto:

5.53-10 $$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\bar{E}}{R + j\,(X_L - X_C)}.$$

È importante concludere che, come l'espressione 5.53-2 rappresenta per il circuito dato la legge di Ohm per i valori istantanei, così l'espressione 5.53-7 rappresenta la legge di Ohm per i valori vettoriali, la quale altro non è che un'estensione della legge di Ohm alle grandezze sinusoidali in rappresentazione vettoriale. Di questo importante argomento si tratterà ancora nel § 5.55.

Esercizio 5.531

Un circuito, costituito da una resistenza $R = 5$ ohm avente in serie una capacità $C = 1000$ μF, è percorso da una corrente dell' intensità di 2 ampere (efficaci) e della frequenza di 50 per/sec.
Si trovi il valore della tensione ai capi del circuito.

Soluzione

Per il circuito dato, si veda la fig. 5.531-1, è possibile scrivere che:

$$\overline{E} = \overline{E}_R + \overline{E}_C = \left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\overline{I} \cdot$$

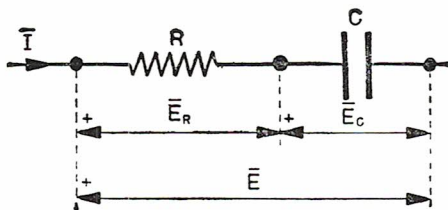



Fig. 5.531-1

Poiché dunque la tensione $\overline{E}$ risulta come prodotto di due grandezze complesse (cioè $R - j\dfrac{1}{\omega C}$ ed $\overline{I}$), il suo modulo si calcolerà allora come prodotto dei moduli delle due grandezze complesse citate. Quindi:

$$E = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 2\sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{314 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = 11{,}86 \quad \text{volt.}$$

5.54 Impedenza

Si riprenda l'espressione 5.53-9 del paragrafo precedente che lega, per il circuito tipo serie (vedi fig. 5.53-1), la tensione e la corrente ai parametri del circuito stesso:

5.54-1 $$\overline{E} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\overline{I} \cdot$$

Ora, il termine $R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ che moltiplica la corrente è indubbiamente un operatore vettoriale: esso nell'Elettrotecnica prende il nome di *impedenza* e viene indicato col simbolo $\overline{Z}$. Questo è dunque la quantità complessa:

5.54-2 $$\overline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\,(X_L - X_c) = Z\varepsilon^{j\theta}\,,$$

la quale pertanto ha per parte reale il valore presentato dalla resistenza R e per parte immaginaria la somma algebrica delle reattanze $X_L - X_C$. A questa somma di reattanze si dà il nome di *reattanza totale*, o anche semplicemente *reattanza* del circuito, ed è indicata col simbolo X. Sarà quindi:

5.54-3 $$j\,X = j\,(X_L - X_c)\,,$$

cioè anche:

5.54-4 $$X = \omega\,L - \frac{1}{\omega C}\,.$$

L'impedenza $\overline{Z}$ potrà essere scritta allora nel seguente modo più semplice e conciso (forma binomia):

5.54-5 $$\overline{Z} = R + j\,X$$ (1),

per cui la 5.54-1 assumerà così la semplice espressione:

5.54-6 $$\overline{E} = (R + j\,X)\,\overline{I} = \overline{Z}\,\overline{I}\,,$$

dalla quale si ricava anche che:

5.54-7 $$\overline{Z} = \frac{\overline{E}}{\overline{I}}\,.$$

Questa formula definisce in altro modo il concetto di impedenza di un circuito, o di una qualsiasi parte di esso, dandola precisamente

(1) Nella schematizzazione grafica dei circuiti elettrici, l'impedenza viene indicata con il simbolo riportato in fig. 5.54-1*a*; mentre quando si desidera mettere in evidenza sia la parte reale che quella immaginaria si usa il simbolo che appare in fig. 5.54-1*b*.

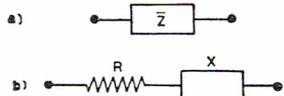



Fig. 5.54-1

come rapporto fra la tensione agente ai capi del circuito, o parte di esso, e la corrispondente corrente assorbita. Si veda la fig. 5.54-2.

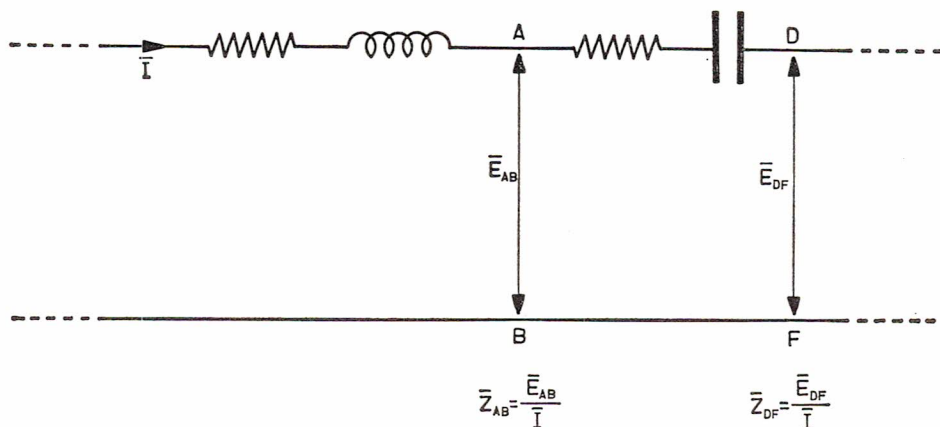



Fig. 5.54-2

Si ritorni ancora al circuito di fig. 5-53-1, del quale si suppongano note le caratteristiche elettriche (parametri R, L, C). L'impedenza risulterà individuata e nel suo modulo Z e nel suo argomento θ, poiché:

5.54-8
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

5.54-9
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

D'altronde la conoscenza dei suddetti valori permetterà di calcolare completamente la corrente del circuito dato poiché il valore efficace di questa corrente ammonterà a:

5.54-10
$$I = \frac{|\overline{E}|}{|\overline{Z}|} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \; (^2);$$

mentre il suo sfasamento φ (3) rispetto alla tensione E si ricaverà tramite l'espressione:

5.54-11
$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\theta = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \; (^4).$$

(2) Si noti che questa espressione coincide (salvo una $\sqrt{2}$) con quella trovata in 5.53-6

(3) Poiché per angolo di sfasamento φ si intende l'angolo di cui deve ruotare il vettore tensione per sovrapporsi al vettore corrente, si hanno angoli φ positivi quando la corrente è in anticipo sulla tensione, angoli φ negativi quando la corrente è in ritardo sulla tensione. Si veda anche quanto è stato riportato nella nota 5 del § 5.52.

(4) Formula ovviamente coincidente con quella data in 5.53-5

È necessario avvertire che molte volte il circuito, pur essendo di tipo *serie*, potrà essere caratterizzato solamente da due qualsiasi dei tre parametri fondamentali R, L, C. In tal caso, le formule e le relazioni trovate in questo e nel precedente paragrafo hanno ancora validità, essendo sufficiente farvi apparire gli effettivi parametri. Con questo procedimento si è compilata la tabella 5.54, ove sono stati riuniti i tre casi possibili.

È altresì importante osservare che il circuito potrebbe risultare composto da più impedenze $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$, ... in serie fra di loro, come appare in fig. 5.54-3*a*. Indicata allora con $\bar{E}_{z1}, \bar{E}_{z2}, \bar{E}_{z3}$, ... la caduta

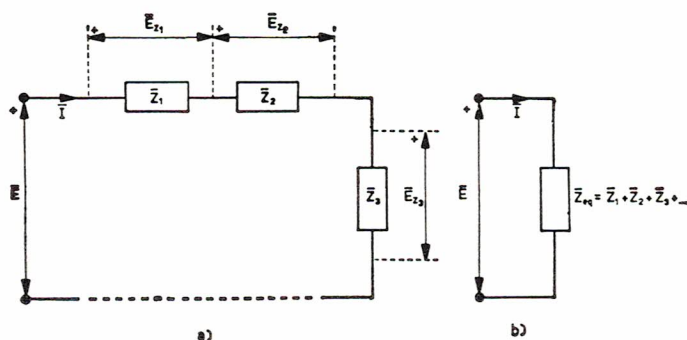
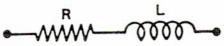
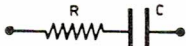
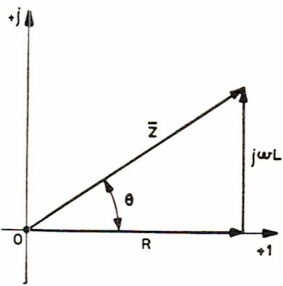
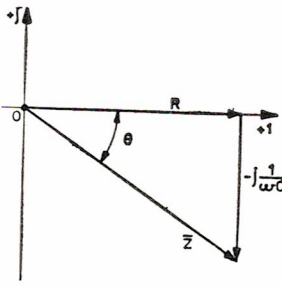
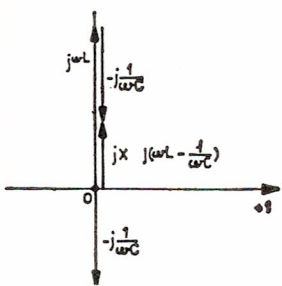



Fig. 5.54-3

di tensione ai capi di ciascuna impedenza, si potrà scrivere con notazione simbolica (legge di Ohm)

5.54-12 $$\bar{E} = \bar{E}_{z1} + \bar{E}_{z2} + \bar{E}_{z3} + \ldots .$$

D'altronde ogni caduta di tensione potrà essere scritta esplicitamente come prodotto fra la relativa impedenza e la corrente che l'attraversa, per cui la 5.54-12 diverrà:

5-54-13 $$\bar{E} = \bar{Z}_1\bar{I} + \bar{Z}_2\bar{I} + \bar{Z}_3\bar{I} + \ldots = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \ldots)\bar{I} ,$$

cioè scritta con notazione più concisa, anche:

5. 54-14 $$\bar{E} = \bar{I}\,\Sigma\,\bar{Z} .$$

L'importanza delle 5.54-13 e 14 è notevole, poiché dimostra come più impedenze collegate in serie, cioè percorse tutte dalla *stessa* corrente, si possano sommare fra di loro, naturalmente con le regole della somma viste per le grandezze vettoriali o complesse. Il circuito è come se fosse costituito quindi da un'unica impedenza, detta impedenza equivalente (o totale), del valore:

5.54-15 $$\bar{Z}_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + j\,(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots).$$

TABELLA 5.54

Impedenza	R L	R C	L C
Forma binomia	$R + j\,\omega\,L$ $R + j\,X_L$	$R - j\,\dfrac{1}{\omega\,C}$ $R - j\,X_c$	$0 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega\,C}\right)$ $0 + j\,X$
Rappresentazione nel piano complesso	+j, $\bar{Z}$, θ, $j\omega L$, O, R, +1	+j, O, R, θ, +1, $-j\frac{1}{\omega C}$, $\bar{Z}$	$j\omega L$, $-j\frac{1}{\omega C}$, jX, $j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$, O, +1, $-j\frac{1}{\omega C}$
Modulo	$\sqrt{R^2 + (\omega\,L)^2}$	$\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega\,C}\right)^2}$	$\omega\,L - \dfrac{1}{\omega\,C}$
Argomento	$tg\,\theta = \dfrac{\omega\,L}{R}$	$tg\,\theta = -\dfrac{\frac{1}{\omega\,C}}{R} = -\dfrac{1}{\omega\,C\,R}$	$tg\,\theta = \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega\,C}}{0} = \pm\,\infty$ $\theta = \pm\,\pi/2$
Valore istantaneo corrente [riferito alla tensione E_M sen $(\omega\,t + \xi)$]	ritardo $(\varphi < 0)$ $i = \dfrac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\,\text{sen}(\omega t + \xi + \varphi)$	anticipo $(\varphi > 0)$ $i = \dfrac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,\text{sen}(\omega t + \xi + \varphi)$	quadratura $i = \dfrac{E_M}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}\,\text{sen}\,(\omega t + \xi + \varphi)$
Valore efficace corrente	$I = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$	$I = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega\,C}\right)^2}}$	$I = \dfrac{E}{\omega\,L - \dfrac{1}{\omega\,C}}$
Sfasamento φ	$\varphi = -\,\theta$	$\varphi = -\theta$	$\varphi = -\,\theta$

Al circuito di fig. 5.54-3*a* si potrà sostituire pertanto quello assai più semplice, ad esso equivalente, di fig. 5.54-3*b*.

Esercizio 5.541

Un circuito, costituito da una resistenza $R = 10\ \Omega$ in serie ad un' induttanza $L = 31{,}8$ mH, è alimentato con una tensione sinusoidale del valore efficace di 100 volt e di frequenza 50 per/sec. Si dica a quanto ammonta il valore della corrente assorbita e quello dell'angolo di sfasamento.

Soluzione

I valori richiesti sono rispettivamente il modulo e l'argomento della grandezza complessa:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}}.$$

Posta allora la tensione di alimentazione $\overline{E}$ sull'asse reale, si veda la fig. 5.541-1, il che è lecito perché essa rappresenta il vettore cui verrà

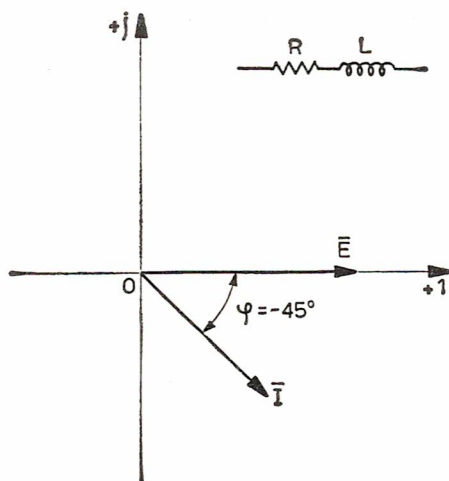



Fig. 5.541-1

riferito quello della corrente, quindi $\overline{E} = 100 + j\,0$, con i dati del problema si ha:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{R + j\omega L} = \frac{100}{10 + j\,314 \cdot 31{,}8 \cdot 10^{-3}} = \frac{100}{10 + j\,10} =$$

$$= \frac{100}{14{,}1\ \varepsilon^{j\,45^\circ}} = 7{,}07\ \varepsilon^{-j\,45^\circ}.$$

La corrente assorbita dal circuito vale dunque 7,07 ampere e ritarda sulla tensione di 45°.

5.55 Criterio generale per la risoluzione dei circuiti

Per risolvere in modo relativamente semplice un circuito, di struttura comunque complicata, è chiaro che si deve poter disporre di un *criterio generale* di facile applicazione che conduca a procedimenti di calcolo numerico altrettanto semplici. A ciò risponde molto bene il metodo Steinmetz-Kennelly, il cui strumento matematico risulta costituito dal calcolo simbolico, del cui significato e della cui algebra ci si è già occupati.

Precisamente, il criterio di Steinmetz-Kennelly afferma:

« Le equazioni che si possono scrivere per un circuito elettrico in regime sinusoidale sono *sostanzialmente* le stesse di quelle che si scriverebbero per lo stesso circuito in corrente continua, coll'avvertenza però che ora le tensioni e le correnti appaiono in simboli complessi e che al posto delle resistenze R compaiono le impedenze $\overline{Z}$ (operatori complessi). Ovviamente le relazioni fra le varie grandezze debbono intendersi *vettoriali* ».

La ricerca dei valori assunti dalle correnti, dalle cadute di tensione, ecc. relative ad un qualsiasi circuito in regime sinusoidale (permanente) potrà essere condotta quindi o col metodo grafico vettoriale o con quello simbolico, dopo aver impostato le relative equazioni vettoriali [1].

Un esempio di applicazione di questo criterio è costituito proprio dalla legge di Ohm in termini vettoriali:

5.55-1 $$\overline{E} = \overline{I}\,\Sigma\,\overline{Z}\,,$$

di cui già ci si è occupati, che deriva appunto dalla ben nota legge di Ohm $V = I\,\Sigma\,R$ valida in corrente continua [2].

Così, per mezzo del criterio ora dato, si passerà dalla legge di Ohm in corrente continua per i circuiti chiusi $\Sigma V_0 - \Sigma V_{0c} = I \Sigma R$ a quella valida in corrente alternata, fra i valori efficaci:

5.55-2 $$\Sigma\overline{E}_0 - \Sigma\overline{E}_{0c} = \overline{I}\,\Sigma\,\overline{Z}\,;$$

coll'avvertenza che le forze controelettromotrici, le quali compaiono nella sommatoria ΣE_{0c}, non sono né quelle di autoinduzione né quelle

---

[1] Per alcune questioni riguardanti la risoluzione dei circuiti elettrici a corrente alternata si veda il capitolo 7, e più precisamente i §§ 7.1 e 7.2.

[2] Per ragioni di simbolismo adottato in questo testo, con V vengono indicate le tensioni (o componenti) continue, mentre con E si indicano le tensioni sinusoidali.

dovute alla capacità, poiché queste appaiono come cadute di tensione nel secondo membro della 5.55-2 in quanto la $\bar{Z}$ ne tien conto nella sua parte immaginaria (X_L , X_c).

Esercizio 5.551

Un generatore di tensione sinusoidale ($f = 50$ per/sec), di resistenza interna $R_0 = 0{,}2$ ohm e tensione a vuoto $E_0 = 100$ volt, risulta chiuso su di un carico caratterizzato da una resistenza $R = 20$ ohm avente in serie una capacità $C = 50\ \mu$F. Si trovi il valore della corrente nel carico.

Soluzione

Per il circuito dato, che può essere schematizzato come in fig. 5.551-1, dopo aver fissato una polarità alla tensione del generatore ed un verso

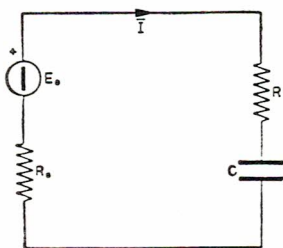



Fig. 5.551-1

alla corrente (tale da uscire, come al solito, dal + del generatore), si applichi la legge di Ohm, cioè:

$$\bar{E}_0 = \bar{I}\,\Sigma\,\bar{Z} = \bar{I}\left[(R_0 + R) - j\frac{1}{\omega C}\right],$$

dalla quale si ricaverà la seguente relazione fra i moduli:

$$E_0 = I\sqrt{(R_0 + R)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

sufficiente per risolvere il problema che chiede infatti solamente il valore (intensità) della corrente nel carico.

Con i valori assegnati si ha pertanto:

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{100}{\sqrt{(0{,}2 + 20)^2 + \frac{1}{(314 \cdot 50 \cdot 10^{-6})^2}}} =$$

$$= \frac{100}{\sqrt{4465}} \cong 1{,}50 \text{ ampere}.$$

Da questo esempio appare dunque chiara l'analogia di impostazione fra circuiti a corrente alternata e quelli a corrente continua.

Esercizio 5.552

Si calcoli il valore della tensione E_u ai capi della resistenza R_3 facente parte del circuito riportato in fig. 5.552-1, funzionante alla pulsazione $\omega = 250$ rad/sec.

Soluzione

Il circuito di fig. 5.552-1 può essere schematizzato come quello riportato in fig. 5.552-2. Pertanto la tensione $\bar{E}_u$ risulterà espressa dalla

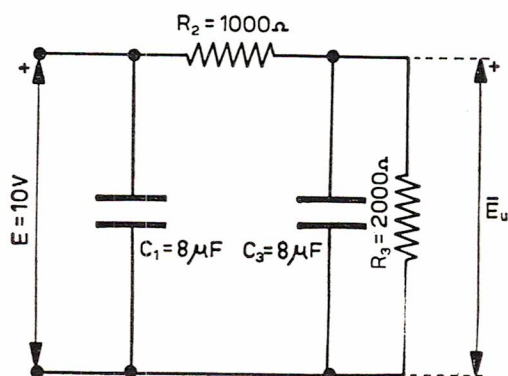
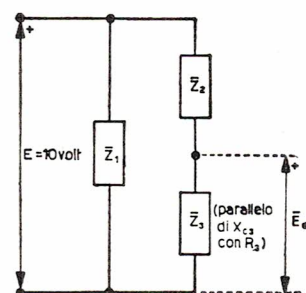



Fig. 5.552-1 *Fig. 5.552-2*

seguente formula:

$$\bar{E}_u = \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} \bar{E} \; (^1) ,$$

dove:

$$\bar{Z}_2 = R_2 = 1000 ,$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{R_3(-jX_{c_3})}{R_3 + (-jX_{c_3})} \; (^2) = \frac{-j \dfrac{R_3}{\omega C_3}}{R_3 - j \dfrac{1}{\omega C_3}} = \frac{-j\, 2000 \cdot 500}{2000 - j\, 500} =$$

$$= \frac{-j\, 1000\, (2 + j\, 0{,}5)}{2^2 + 0{,}5^2} = \frac{500 - j\, 2000}{4{,}25} = 117{,}5 - j\, 471 .$$

---

(1) Formula del partitore di tensione in corrente alternata.

(2) Trattasi del parallelo fra la resistenza R_3 e la reattanza X_{c_3} del condensatore. Maggiori delucidazioni sul *parallelo* si troveranno, ad esempio, nel § 5.58.

Con questi dati, ponendo il vettore $\overline{E}$ sull'asse reale, si ha:

$$\overline{E}_u = \frac{117{,}5 - j\,471}{1000 + 117{,}5 - j\,471}\,10 = \frac{(117{,}5 - j\,471)\,(1117 + j\,471)}{1117^2 + 471^2}\,10 =$$

$$= \frac{35{,}3 - j\,47}{14{,}7} = 2{,}4 - j\,3{,}2\,.$$

Il valore della tensione di uscita ammonta perciò a:

$$E_u = \sqrt{2{,}4^2 + 3{,}2^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ volt.}$$

5.56 Principi di Kirchhoff

La soluzione dei circuiti elettrici più complessi di quelli incontrati fino ad ora, si veda ad esempio la rete elettrica [1] di fig. 5.56-1, o il cir-

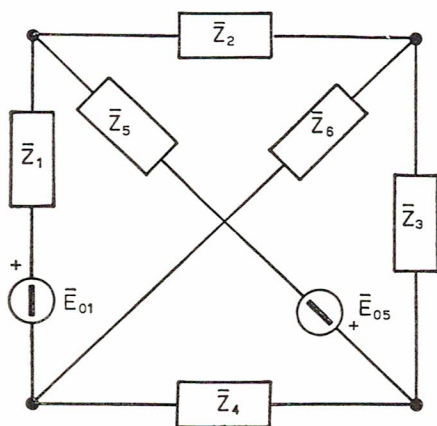



Fig. 5.56-1

cuito di fig. 5.56-2 *a*, esige senz'altro l'applicazione dei principi di Kirchhoff. Questi, in base al criterio generale dato nel paragrafo precedente, si potranno scrivere nel seguente modo:

5.56-1 $$\Sigma\,\overline{I} = 0$$ 1° principio di Kirchhoff

5.56-2 $$\Sigma\overline{E}_0 = \Sigma\,\overline{Z}\,\overline{I}$$ 2° principio di Kirchhoff.

---

(1) Per l'impiego pratico dei principi di Kirchhoff alle reti elettriche si veda il § 7.2 del capitolo 7.

Il primo principio di Kirchhoff stabilisce dunque che in ciascun nodo deve essere nulla la somma *vettoriale* delle correnti che vi convergono e vi divergono; il secondo principio afferma invece che in una mag ia qualsiasi (circuito chiuso) la somma *vettoriale* delle varie cadute di tensione che si hanno nella maglia stessa deve far equilibrio alla somma *vettoriale* delle *f.e.m.* ivi presenti.

Come semplice applicazione del primo principio di Kirchhoff in corrente alternata si voglia calcolare, ad esempio, l' impedenza esistente fra i punti A e B del circuito di fig. 5.56-2*a*. Si tratta in sostanza di

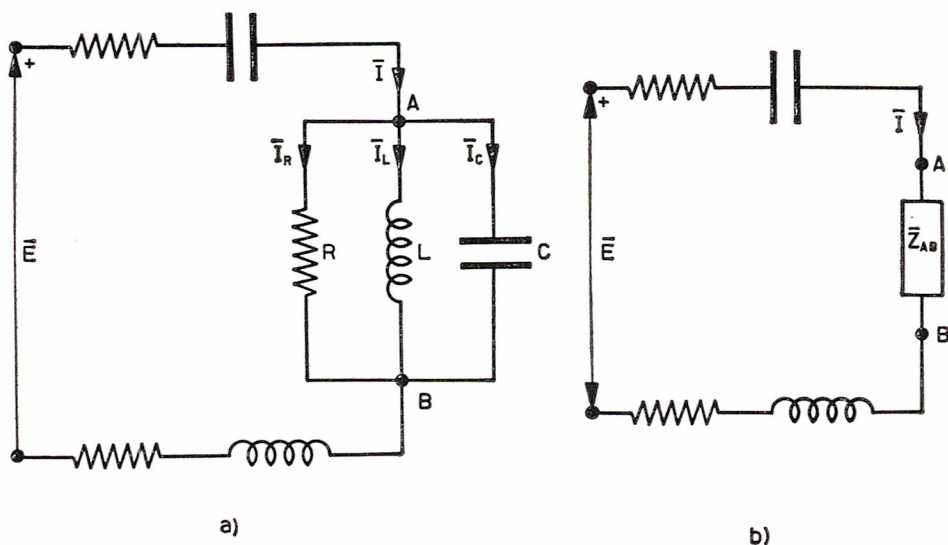



Fig. 5.56-2

calcolare l' impedenza equivalente dei tre rami R, L, C in parallelo [2]. A tale scopo si scriva il primo principio di Kirchhoff per il nodo A. Sarà, con i simboli adottati in figura, :

5.56-3 $$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C \,.$$

D'altronde, indicata con $\overline{E}_{AB}$ la tensione fra i punti A e B, si avrà (vedi anche tabella riassuntiva 5.52):

5.56-4 $$\overline{I}_R = \frac{1}{R}\,\overline{E}_{AB}\,, \qquad \overline{I}_L = -j\,\frac{1}{\omega L}\,\overline{E}_{AB}\,, \qquad \overline{I}_C = j\,\omega C\overline{E}_{AB}\,:$$

([2]) Il calcolo dell' impedenza equivalente di più rami in parallelo verrà impostato con maggiore diffusione nei §§ 5.57 e 5.58.

mentre, per definizione di impedenza fra due punti qualsiasi di un circuito, si ha che:

5.56-5
$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{AB}}{\bar{Z}_{AB}}.$$

Sostituendo pertanto nella 5.56-3 i valori trovati per le correnti in 5.56-4 e 5 si ottiene, dopo aver raccolto e semplificato,:

5.56-6
$$\frac{1}{\bar{Z}_{AB}} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

e quindi in definitiva l'espressione dell' impedenza cercata:

5.56-7
$$\bar{Z}_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)},$$

il cui modulo ammonta a:

5.56-8
$$Z_{AB} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

e il cui argomento θ si ricaverà dalla seguente espressione:

5.56-9
$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} \text{ (3)} = \frac{R}{\omega L} - \omega RC.$$

Esercizio 5.561

Si calcoli la corrente assorbita da due rami in parallelo, i cui parametri sono noti (vedi fig. 5.561-1), sapendo inoltre che la tensione ai capi dell' induttanza vale 20 volt.

Soluzione

La corrente che circola nell' induttanza ammonta a:

---

(3) L'argomento di $\bar{Z}_{AB}$ è l'argomento cambiato di segno del denominatore della frazione data in 5.56-7.

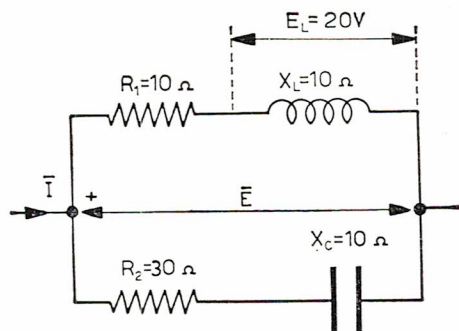



Fig. 5.561-1

$$I_1 = \frac{E_L}{X_L} = \frac{20}{10} = 2 \text{ ampere}$$

e converrà porre tale corrente sull'asse reale, il che è lecito (vedi diagramma vettoriale di fig. 5.561-2). D'altronde la caduta di tensione ai capi della resistenza R_1 vale :

$$E_{R_1} = R_1 I_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ volt.}$$

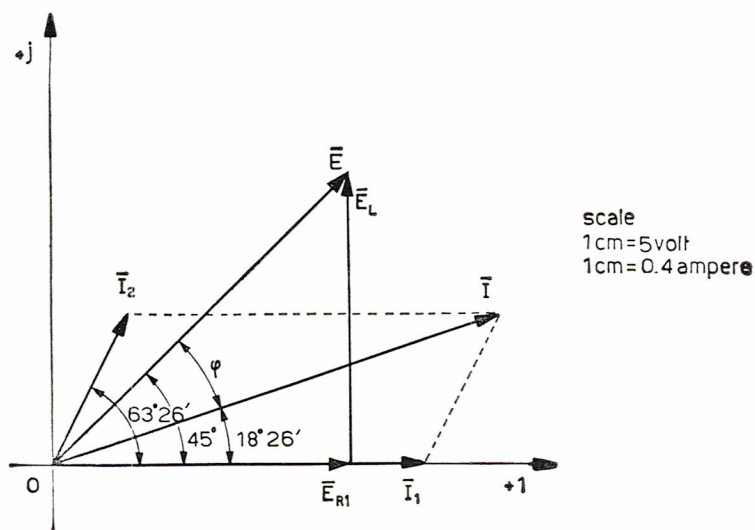



Fig. 5.561-2

È così possibile calcolare la tensione $\overline{E}$ agente ai capi del circuito, cioè dei due rami in parallelo, poiché per la legge di Ohm si può scrivere :

$$\overline{E} = \overline{E}_{R_1} + \overline{E}_L = 20 + j\,20 = 28{,}3 \underline{|\ 45^0} \;.$$

Sul diagramma vettoriale di fig. 5.561-2 si potrà allora riportare il vettore $\overline{E}$ (non strettamente necessario ai fini di quanto richiesto).

A questo punto, calcolata l' impedenza del secondo ramo:

$$\overline{Z}_2 = R_2 - j\,X_c = 30 - j\,10 \quad ,$$

si procederà al calcolo della corrente $\overline{I}_2$:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_2} = \frac{20 + j\,20}{30 - j\,10} = \frac{(20 + j\,20)\,(30 + j\,10)}{900 + 100} = 0{,}4 + j\,0{,}8 =$$

$$= 0{,}894 \,\underline{|\,63^0\,26'} \; .$$

In definitiva, la corrente assorbita dal circuito dato, costituito dai due rami in parallelo, vale per il 1^0 principio di Kirchhoff:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 2 + 0{,}4 + j\,0{,}8 = 2{,}4 + j\,0{,}8 = 2{,}53\,\underline{|\,18^0\,26'} .$$

Essa ammonta dunque a 2,53 ampere e ritarda sulla tensione dell'angolo $\varphi = 45^0 - 18^0\,26' = 26^0\,34'$.

5.57 Ammettenza

Nel calcolo delle correnti alternate è necessario introdurre un nuovo operatore vettoriale, precisamente quello che risulta eguale all' inverso dell' impedenza. Questo nuovo operatore viene denominato *ammettenza* ed indicato col simbolo $\overline{Y}$. Per definizione risulta dunque:

5.57-1
$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} .$$

L'ammettenza viene perciò misurata in siemens; le sue dimensioni risultano omogenee quindi con quelle di una conduttanza.

Essendo una quantità complessa, l'ammettenza potrà essere scritta sia in forma binomia che esponenziale:

5.57-2
$$\overline{Y} = G + j\,B = Y \varepsilon^{j\delta} .$$

Nella forma binomia G è dunque la parte reale dell'ammettenza e rappresenta una conduttanza, mentre B è il coefficiente dell' im-

maginario e rappresenta una suscettanza (1). Considerando l'ammettenza $\overline{Y}$ come una qualsiasi grandezza complessa, essa verrà rappresentata nel piano come in fig. 5.57-1; il suo modulo varrà d'altronde:

5.57-3 $$Y = \sqrt{G^2 + B^2},$$

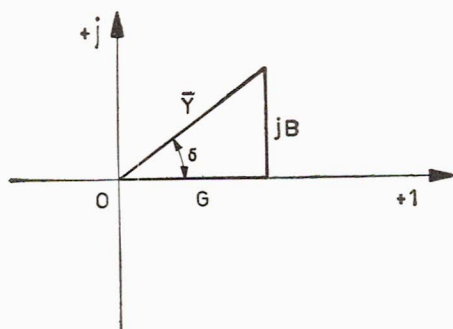
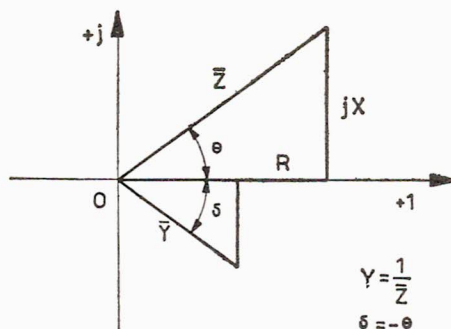



Fig. 5.57-1 *Fig. 5.57-2*

mentre il suo argomento δ si ricaverà dalla seguente espressione:

5.57-4 $$\operatorname{tg} \delta = \frac{B}{G}.$$

Naturalmente, se l'ammettenza $\overline{Y}$ deriva effettivamente dalla quantità complessa $1/\overline{Z}$, con $\overline{Z} = R + j\,X = Z\,\varepsilon^{j\theta}$, essa sarà rappresentata nel piano come in fig. 5.57-2 e varranno allora le seguenti relazioni rispettivamente fra i moduli e fra gli argomenti:

5.57-5 $$Y = \frac{1}{Z} \qquad \delta = -\theta.$$

Ma quali sono le proprietà delle ammettenze? In conseguenza del criterio di Steinmetz-Kennelly e in base alla 5.57-1, si può affermare che le ammettenze dei circuiti a corrente alternata corrispondono alle

(1) Nella schematizzazione dei circuiti elettrici l'ammettenza viene indicata con il simbolo riportato in fig. 5.57-1'*a*; mentre, quando si desidera mettere in evidenza la parte reale e quella immaginaria, si usa invece il simbolismo che appare in fig. 5.57-1'*b*.

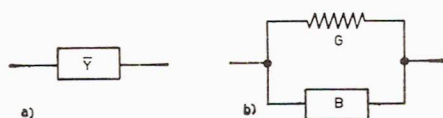



Fig. 5.57-1'

conduttanze dei circuiti a corrente continua. Pertanto tutte le proprietà sulle conduttanze studiate in corrente continua si trasferiranno in corrente alternata alle ammettenze.

Ad esempio, nota la tensione $\overline{E}$ che agisce ai capi di un'ammettenza, questa sarà attraversata da una corrente $\overline{I}$ legata alla tensione $\overline{E}$ dalla relazione:

5.57-6 $$\overline{I} = \overline{Y}\,\overline{E}\ (^2)\,.$$

Da questa espressione appare chiaramente quale sia il significato di questo nuovo operatore vettoriale $\overline{Y}$: infatti esso *trasforma* la tensione, che agisce ai capi dell'ammettenza, nella corrente che l'attraversa. Altra proprietà che deriva dalla 5.57-6 e dai principi di Kirchhoff (vedi circuito di fig. 5.57-3) è che più ammettenze in parallelo $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$.... possono rendersi equivalenti ad una sola ammettenza $\overline{Y}_{eq}$ (am-

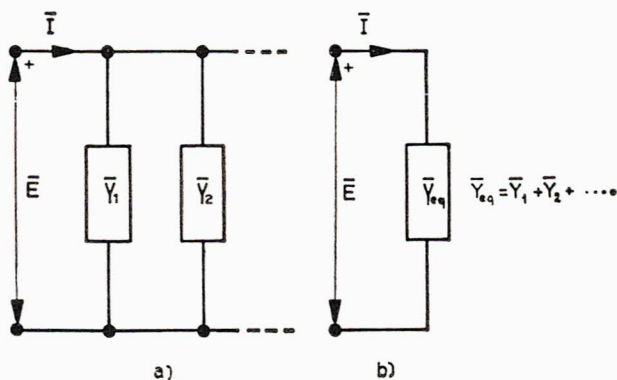



Fig. 5.57-3

mettenza equivalente) il cui valore viene dato dalla seguente formula:

5.57-7 $$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + ...\ (^3)\,.$$

Si è arrivati quindi all'importante risultato che mostra come più ammettenze in parallelo possono essere sommate assieme, naturalmente secondo le ben note regole sulle grandezze complesse, *cioè vettorialmente*.

Si noti che la 5.57-7 può essere applicata anche al caso in cui in parallelo si abbiano delle impedenze $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, ... e non solo delle am-

---

(2) In corrente continua si ha appunto: $I = GV$.

(3) In corrente continua vale appunto la relazione $G = G_1 + G_2 + ...$, come conseguenza del 1° principio di Kirchhoff.

mettenze. Basterà allora semplicemente trasformare ciascuna impedenza nella corrispondente ammettenza, cioè:

5.57-8 $$\overline{Y}_1 = \frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + j\,X_1} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - j\,\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = G_1 + jB_1\,,$$

5.57-8′ $$\overline{Y}_2 = \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{R_2 + j\,X_2} = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} - j\,\frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = G_2 + jB_2\,,$$

....,

....;

dopodiché sarà facile trovare il valore dell'ammettenza risultante:

5.57-9 $$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \ldots = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} + \ldots$$

$$\ldots - j\left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} + \ldots\right) = G + jB\,.$$

È importante ricordare ancora che, date più ammettenze in serie (vedi fig. 5.57-4), l'ammettenza equivalente si calcolerà nel seguente modo:

5.57-10 $$\overline{Y}_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{\overline{Y}_1} + \dfrac{1}{\overline{Y}_2} + \ldots}\,,$$

cioè trasformando ciascuna ammettenza in impedenza $\left(\overline{Z}_1 = \dfrac{1}{\overline{Y}_1}\right.$,

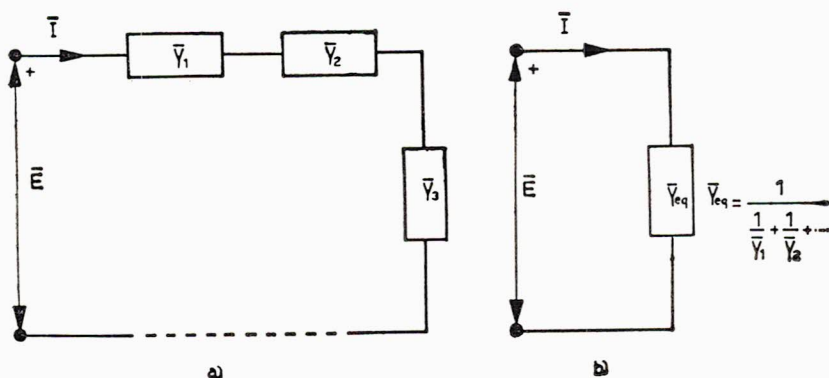



Fig. 5.57-4

$\overline{Z}_2 = \dfrac{1}{\overline{Y}_2} \dots\Big)$, sommando queste impedenze $\left(\overline{Z}_{eq} = \dfrac{1}{\overline{Y}_1} + \dfrac{1}{\overline{Y}_2} + \dots\right)$, quindi ritrasformando questa impedenza equivalente in ammettenza. facendone l' inverso $\left(\dfrac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \overline{Y}_{eq}\right)$.

Nel caso in cui le ammettenze in serie sono solamente due, o tre al massimo, può talvolta essere conveniente applicare direttamente le formule che ora qui si riportano. Precisamente:

5.57-11
$$\overline{Y}_{eq} = \frac{\overline{Y}_1\,\overline{Y}_2}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2},$$

se le ammettenze in serie sono in numero di due; la seguente:

5.57-12
$$\overline{Y}_{eq} = \frac{\overline{Y}_1\,\overline{Y}_2\,\overline{Y}_3}{\overline{Y}_1\,\overline{Y}_2 + \overline{Y}_1\,\overline{Y}_3 + \overline{Y}_2\,\overline{Y}_3},$$

se le ammettenze in serie sono in numero di tre. Queste formule discendono naturalmente da quelle analoghe note in corrente continua per il calcolo rispettivamente di due e tre conduttanze in serie.

Esercizio 5.571

Si trovi l'ammettenza equivalente (in forma binomia ed esponenziale) dei tre rami in parallelo per i quali la fig. 5.571-1 fornisce i relativi dati di calcolo.

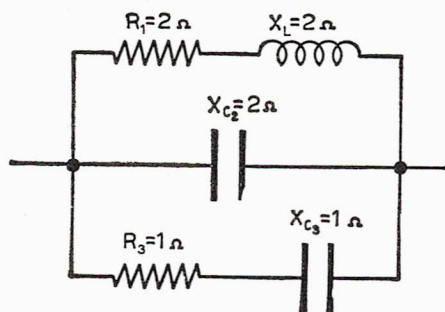



Fig. 5.571-1

Soluzione

Si incominci a calcolare separatamente le ammettenze dei singoli rami. Si ha:

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{1}{2 + j\,2} = \frac{2 - j\,2}{4 + 4} = 0{,}25 - j\,0{,}25\,,$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{-jX_{C_2}} = \frac{1}{-j\,2} = j\,0{,}50\,,$$

$$\overline{Y}_3 = \frac{1}{\overline{Z}_3} = \frac{1}{R_3 - jX_{C_3}} = \frac{1}{1 - j\,1} = \frac{1 + j\,1}{1 + 1} = 0{,}50 + j\,0{,}50\,.$$

L'ammettenza equivalente varrà perciò, in forma binomia, la somma algebrica dei valori ora trovati, cioè:

$$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = 0{,}25 - j\,0{,}25 + j\,0{,}50 + 0{,}50 + j\,0{,}50 =$$

$$= 0{,}75 + j\,0{,}75\,,$$

e quindi, poiché il modulo vale:

$$Y_{eq} = \sqrt{(0{,}75)^2 + (0{,}75)^2} = 1{,}06 \text{ siemens}$$

e l'argomento ammonta a:

$$\text{tg}\delta = \frac{0{,}75}{0{,}75} = 1 \qquad \delta = 45^0\,,$$

si avrà per l'ammettenza in forma esponenziale la seguente espressione:

$$\overline{Y}_{eq} = 1{,}06\,\varepsilon^{j\,45^0}\,.$$

Si osservi che il bipolo dato si comporta capacitivamente (poiché l'argomento dell'ammettenza è positivo): ciò vuol dire che prevale la capacità sull' induttanza.

Esercizio 5.572

Si trovi il valore dell' impedenza (modulo ed argomento) presentata dai due rami in parallelo di fig. 5.572-1, sapendo che: l'elemento

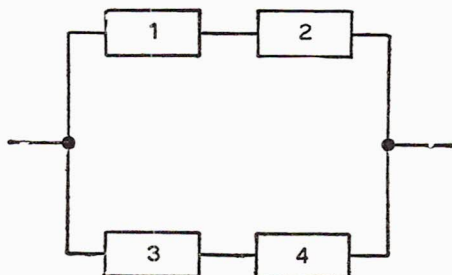



Fig. 5.572-1

1 è una conduttanza ($G_1 = 2$ S), l'elemento 2 è una suscettanza induttiva ($B_2 = 3$ S), l'elemento 3 è una conduttanza ($G_3 = 3$ S) e l'elemento 4 è una suscettanza capacitiva ($B_4 = 4$ S).

Soluzione

Ciascun ramo è composto da due elementi in serie che devono considerarsi del tipo ammettenza, qualora si intenda usare direttamente i valori forniti dal problema. L'ammettenza del primo ramo risulta perciò come segue:

$$\bar{Y}_{12} = \frac{\bar{Y}_1 \bar{Y}_2}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} = \frac{G_1(-j\,B_2)}{G_1 - j\,B_2} = \frac{-j\,6}{2 - j\,3} = 1{,}385 - j\,0{,}924\,;$$

così l'ammettenza del secondo ramo vale:

$$\bar{Y}_{34} = \frac{\bar{Y}_3 \bar{Y}_4}{\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4} = \frac{G_3 \cdot jB_4}{G_3 + jB_4} = \frac{j\,12}{3 + j\,4} = 1{,}92 + j\,1{,}44 \,.$$

L'ammettenza equivalente dei due rami in parallelo ammonta pertanto a:

$$\bar{Y}_{eq} = \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{34} = 3{,}30 + j\,0{,}516\,;$$

per cui in definitiva l'impedenza richiesta presenta il valore:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\bar{Y}_{eq}} = \frac{1}{3{,}30 + j\,0{,}516} = 0{,}295 - j\,0{,}0462 \,.$$

N. B. Il problema poteva essere risolto naturalmente in altro modo, cioè mediante le impedenze (vedi esercizio 5.581).

5.58 Osservazioni sul calcolo degli operatori equivalenti

La parte passiva di un circuito elettrico, o di un bipolo, può essere caratterizzata da *combinazioni* in serie e in parallelo di alcuni o di tutti e tre i parametri fondamentali R, L, C, come appare, ad esempio, nella fig. 5.58-1.

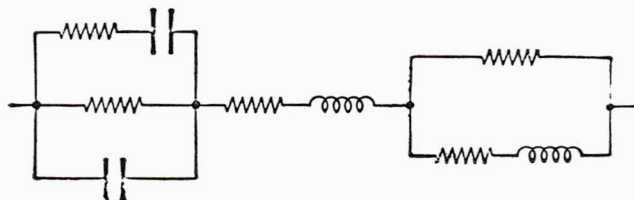



Fig. 5.58-1

D'altronde, per il calcolo delle correnti e delle relative cadute di tensione, sarà necessario procedere al calcolo delle impedenze o delle ammettenze equivalenti dei vari tronchi di circuito, se questi hanno una struttura complicata, quindi finalmente dell' impedenza o dell' ammettenza totale del circuito.

Ora i calcoli delle impedenze od ammettenze parziali, e quindi successivamente di quella del circuito, verranno condotti tenendo presente quanto è stato detto a proposito del criterio generale (Kennelly-Steinmetz) per la soluzione dei circuiti elettrici in regime sinusoidale. Per questo motivo si passerà dalle formule note, relative alle combinazioni di resistenze e di conduttanze per i circuiti a corrente continua, a quelle valevoli per le impedenze e le ammettenze semplicemente sostituendo il simbolo R con quello $\overline{Z}$ e il simbolo G con quello $\overline{Y}$. Già nel paragrafo precedente si sono visti dei casi pratici a proposito del calcolo relativo alle ammettenze.

Così ad esempio l' impedenza equivalente di due rami, di impedenza rispettivamente $\overline{Z}_1$ e $\overline{Z}_2$, in parallelo (vedi fig. 5.58-2), potrà essere

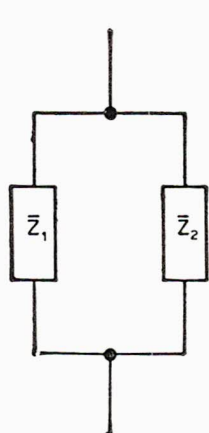
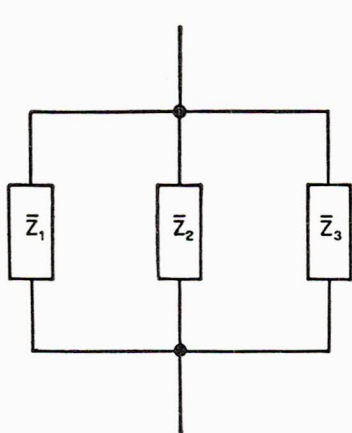
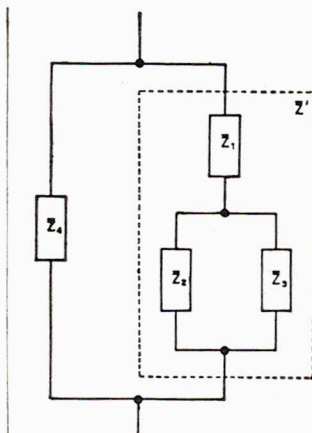



Fig. 5.58-2 *Fig. 5.58-3* *Fig. 5.58-4*

calcolata con la formula:

5.58-1
$$\overline{Z}_{eq} = \frac{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2},$$

analogamente l' impedenza equivalente di tre impedenze $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ in parallelo (vedi fig. 5.58-3) risulterà calcolabile con la formula:

5.58-2
$$\overline{Z}_{eq} = \frac{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2\,\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1\,\overline{Z}_3 + \overline{Z}_2\,\overline{Z}_3}.$$

Pure altrettanto facilmente si troverà la formula dell' impedenza

equivalente del tronco di circuito riportato nella fig. 5.58-4. Sarà infatti, con riferimento ai simboli adoperati in figura:

5.58-3 $$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}'\bar{Z}_4}{\bar{Z}' + \bar{Z}_4} = \frac{\left(\bar{Z}_1 + \dfrac{\bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}\right)\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1 + \dfrac{\bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} + \bar{Z}_4}.$$

Si vuole precisare però che il calcolo dell' impedenza o dell'ammettenza equivalente di un circuito può essere condotto in più modi: d'altronde, in generale, uno solo di questi sarà quello che porterà a dei calcoli meno laboriosi. Nei casi complicati non è facile tuttavia vedere, soprattutto per chi si accinge per la prima volta allo studio delle correnti alternate, la strada più corta, cioè quella che abbisogna di un minore numero di operazioni e di calcoli numerici. D'altra parte sarà bene, ogni tanto, controllare (anche grossolanamente) i risultati parziali ottenuti.

Si voglia ad esempio trovare l' impedenza equivalente dell'arco triplo (cioè dei tre rami in parallelo) presente nel circuito di fig. 5.56-2*a*, essendo noti i valori di R, L, C ed ω. Converrà calcolare questa impedenza equivalente come inverso dell'ammettenza $\bar{Y}$ risultante dalla somma delle tre ammettenze $\bar{Y}_R$, $\bar{Y}_L$, $\bar{Y}_C$ presentate rispettivamente dal ramo resistivo, induttivo, capacitivo. Poiché in tal caso si ha:

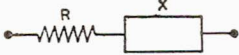
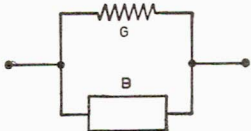
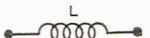
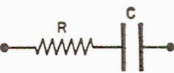
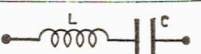
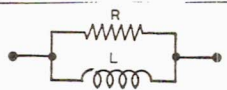
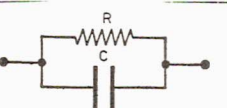
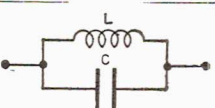
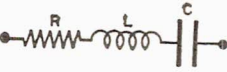
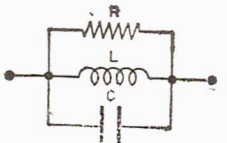
5.58-4 $$\bar{Y}_R = G + j0 = \frac{1}{R},$$

5.58-5 $$\bar{Y}_L = 0 - jB_L = -j\frac{1}{\omega L},$$

5.58-6 $$\bar{Y}_C = 0 + jB_C = j\omega C,$$

risulterà subito che:

5.58-7 $$\bar{Y} = \bar{Y}_R + \bar{Y}_L + \bar{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

per cui l' impedenza cercata sarà espressa dalla formula:

5.58-8 $$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}.$$

Indubbiamente questa è la via più semplice.

Nella tabella 5.58 sono state riportate, in riassunto, le formule delle impedenze e delle ammettenze equivalenti di tronchi elementari di circuito: esse potranno servire nei calcoli successivi.

TABELLA 5.58

ESPRESSIONI IN FORMA BINOMIA DELLE IMPEDENZE ED AMMETTENZE RELATIVE A TRONCHI ELEMENTARI DI CIRCUITO

Tronco di circuito	**Impedenza** $\overline{Z} = R + jX$ R X	**Ammettenza** $\overline{Y} = G + jB$ G B
R	$R + j0$	$\frac{1}{R} + j0$
L	$0 + j\omega L$	$0 - j\frac{1}{\omega L}$
C	$0 - j\frac{1}{\omega C}$	$0 + j\omega C$
R L	$R + j\omega L$	$\frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$
R C	$R - j\frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R(\omega C)^2}{(\omega RC)^2 + 1} + j\frac{\omega C}{(\omega RC)^2 + 1}$
L C	$0 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$	$\frac{1}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = 0 - j\frac{1}{\omega L - \frac{1}{C}}$
R L	$\frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j\frac{R^2\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$	$\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$
R C	$\frac{-j\frac{R}{\omega C}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} - j\frac{\omega CR^2}{(\omega RC)^2 + 1}$	$\frac{1}{R} + j\omega C$
L C	$\frac{\frac{L}{C}}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = 0 - j\frac{\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$	$0 + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$
R L C	$R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$	$\frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - j\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
R L C	$\frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} - j\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$	$\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

Esercizio 5.581

Si risolva l'esercizio 5.572 usando l'operatore impedenza anziché l'operatore ammettenza.

Soluzione

Si trasformino subito le singole ammettenze ($\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, ...) dei quattro elementi nelle corrispondenti impedenze ($\bar{Z}_1 = 1/\bar{Y}_1$, $\bar{Z}_2 = 1/\bar{Y}_2$, ...), come è stato riportato nella figura 5.581-1. Si calcoli quindi l'impe-

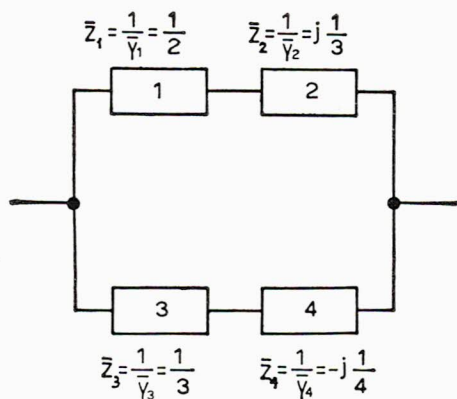



Fig. 5.581-1

denza equivalente applicando la formula 5.58-1 del testo:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4} = \frac{\left(\frac{1}{2} + j\,\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - j\,\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2} + j\,\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - j\,\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - j\,\frac{1}{72}}{\frac{5}{6} + j\,\frac{1}{12}} = 0{,}295 - j\,0{,}0462 .$$

Il risultato, naturalmente, coincide con quello trovato nel paragrafo precedente e il calcolo si è presentato relativamente più semplice.

Esercizio 5.582

Si tracci il diagramma vettoriale delle tre correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}$ relative

al circuito riportato in fig. 5.582-1, sapendo che esso risulta sottoposto alla tensione sinusoidale $E = 220$ volt.

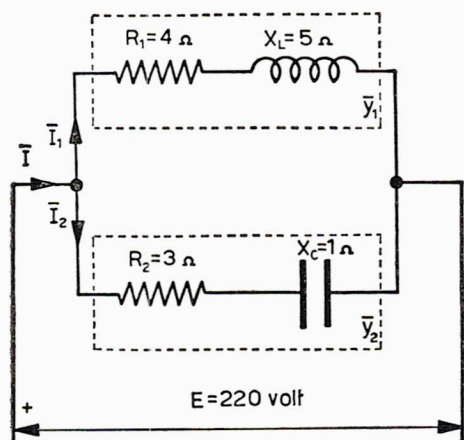



Fig. 5.582-1

Soluzione

Si incominci a calcolare le ammettenze dei due rami:

$$\overline{Y}_1 = \frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{4 + j\,5} = \frac{4 - j\,5}{16 + 25} = 0{,}0976 - j\,0{,}122 = 0{,}156\,\underline{|-51^0\,20'}\,,$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{3 - j\,1} = \frac{3 + j\,1}{9 + 1} = 0{,}3 + j\,0{,}1 = 0{,}316\,\underline{|18^0\;26'}\,.$$

Quindi, posta la tensione E sull'asse reale (vedi diagramma vettoriale di fig. 5.582-2), le correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ si troveranno facilmente, poiché $\overline{E} = 220$:

$$\overline{I}_1 = \overline{Y}_1 \overline{E} = 0{,}156 \cdot 220\;\; \varepsilon^{-j51^0\,20'} = 34{,}3\;\underline{|-51^0\,20'}$$

$$\overline{I}_2 = \overline{Y}_2 \overline{E} = 0{,}316 \cdot 220\;\; \varepsilon^{j\,18^0\,26'} = 69{,}5\;\underline{|18^0\,26'}\,.$$

Si ha dunque che la corrente $\overline{I}_1$ ammonta a 34,3 ampere ed è sfasata in ritardo, rispetto alla tensione $\overline{E}$, di un angolo del valore di 51^0 $20'$ e che la corrente $\overline{I}_2$ ammonta a 69,5 ampere ed è sfasata in anticipo, rispetto alla tensione $\overline{E}$, di un angolo del valore di $18^0\;26'$. I relativi vettori appaiono nel diagramma di fig. 5.582-2.

A questo punto, poiché $\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2$ (1^0 principio di Kirchhoff), si potrà tracciare la corrente $\overline{I}$ come vettore risultante dei vettori rap-

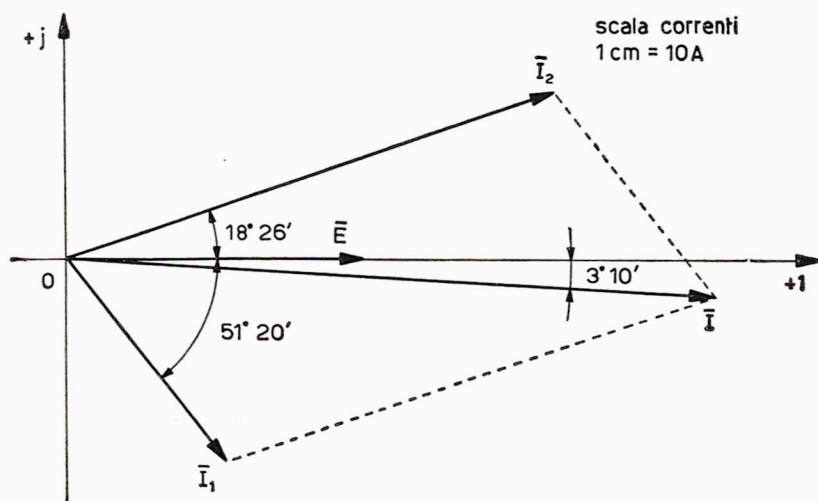



Fig. 5.582-2

presentativi le due correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$. Naturalmente, se interessasse il valore del modulo e dell'argomento della corrente $\overline{I}$ con più precisione, si farà ricorso allora al calcolo analitico:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = (\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2)\,\overline{E} = (0{,}0976 - j\,0{,}122 + 0{,}3 + j\,0{,}1)\,220 =$$

$$= (0{,}398 - j\,0{,}022)\;220 = 87{,}5 - j\,4{,}84 = 87{,}6\,\underline{|-3^0\,10'}.$$

Quest' ultimo risultato può essere controllato (d'altronde se questo risulterà giusto con buona probabilità saranno giusti anche i risultati intermedi) calcolando la corrente per altra via, precisamente mediante l'operatore impedenza, anziché con quello ammettenza. Si ha così che:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\dfrac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_1 + Z_2}{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}\,\overline{E} = \frac{4 + j\,5 + 3 - j\,1}{(4 + j\,5)(3 - j\,1)}\,220 =$$

$$= \frac{7 + j\,4}{17 + j\,11}\,220 = \frac{163 - j\,9}{410}\,220 = (0{,}398 - j\,0{,}022)\,220\,,$$

risultato identico a quello trovato più sopra.

5.59 Potenza attiva, reattiva, apparente

Si abbia ad esempio un' impedenza $\overline{Z} = R + jX$ ai cui capi venga applicata una tensione sinusoidale, il cui valore istantaneo sia dato da:

$$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi) \,, \tag{5.59-1}$$

e che risulti quindi attraversata da una corrente il cui valore istantaneo i sia espresso da:

$$i = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi) = I_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi + \varphi) \,, \tag{5.59-2}$$

ove, come già visto, l'angolo di sfasamento φ è ricavabile dall'espressione:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{X}{R}. \tag{5.59-3}$$

Ci si chiede ora se sia possibile calcolare la potenza elettrica in gioco nell' impedenza considerata. Indubbiamente la potenza elettrica istantanea p, poiché per definizione essa altro non è che il prodotto del valore istantaneo della tensione per quello della corrente, nel nostro caso vale:

$$p = e \cdot i = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi) \cdot I_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi + \varphi) \tag{5.59-4}$$

e quindi, per cose già note sul prodotto di due grandezze sinusoidali isofrequenziali (vedi formula 5.23-5), si ha che:

$$p = \frac{E_M I_M}{2} \cos\varphi - \frac{E_M I_M}{2} \cos(2\,\omega t + 2\xi + \varphi) \,. \tag{5.59-5}$$

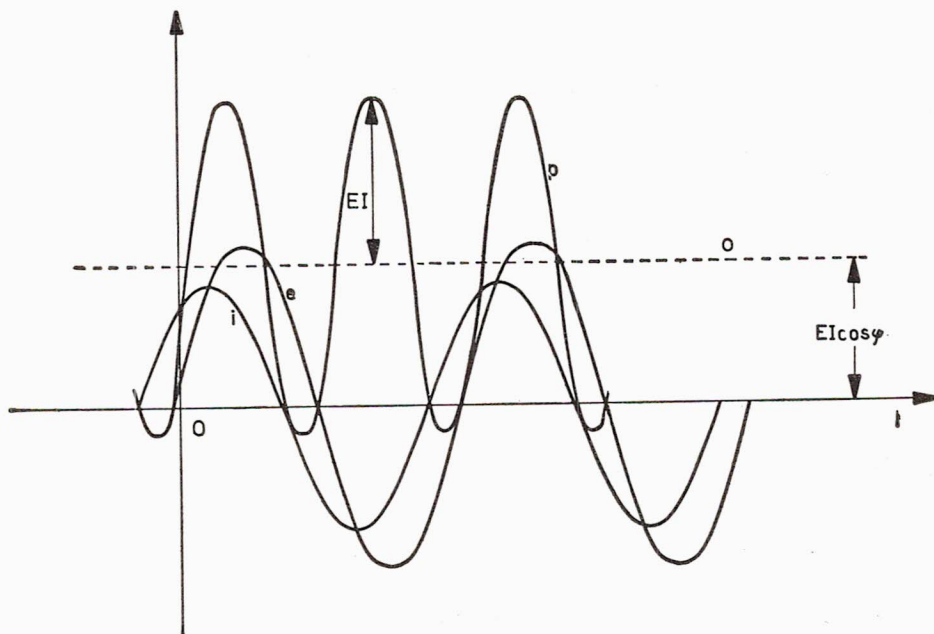



Fig. 5.59-1

Da questa espressione si deduce dunque che la potenza istantanea, si veda anche il grafico di fig. 5.59-1, è costituita da due termini: il primo indipendente dal tempo (retta orizzontale *o*), cioè costante, il quale, introducendo i valori efficaci al posto di quelli massimi, vale:

5.59-5′
$$\frac{E_M}{\sqrt{2}} \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos\varphi = EI\cos\varphi\,;$$

il secondo variabile nel tempo con legge cosinusoidale (curva *p*) il quale rappresenta perciò un termine a valor medio nullo [1].

Si osservi d'altronde come ciò che caratterizza il fluire dell'energia elettrica dal generatore all' impedenza considerata sia il valor medio della potenza istantanea, quindi il valor medio dei due termini che compaiono nell'espressione 5.59-5. Ma, come si è detto, il valor medio del secondo termine risulta nullo; mentre quello del primo termine, poiché questo è una costante ($EI\cos\varphi$), coinciderà con la costante stessa. Sarà perciò:

5.59-6
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = EI\cos\varphi.$$

Questa è la potenza elettrica assorbita (dissipata) dall' impedenza data. Essa viene talvolta chiamata anche col nome di potenza attiva o reale. È chiaro che la potenza P verrà misurata in watt, cioè in joule/secondo poiché E e I siano misurati rispettivamente in volt e in ampere.

È importante notare a questo proposito che la 5.59-6 esprime comunque la potenza (attiva o reale) assorbita da un circuito (vedi fig. 5.59-2) qualora E ed I rappresentino i valori efficaci rispettivamente

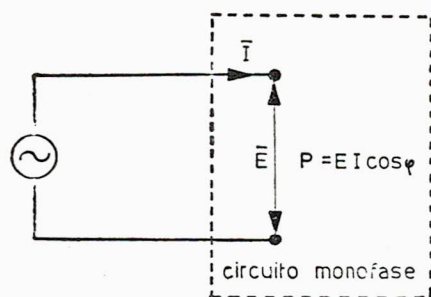



Fig. 5.59-2

della tensione applicata al circuito e della corrente assorbita dal circuito stesso, mentre φ sia l'angolo di sfasamento. Naturalmente questa po-

---

[1] Questa potenza, rappresentata da una cosinusoide di ampiezza EI e di frequenza doppia rispetto a quella della tensione applicata al circuito, viene detta *potenza fluttuante*.

tenza verrà fornita al circuito in egual misura dal generatore o dai generatori facenti parte del circuito stesso.

Si noti ancora che al termine cos φ, che compare nella 5.59-5′ e 5.59-6, si dà il nome di *fattore di potenza*. Esso ha la caratteristica di essere positivo (²) sia per corrente in ritardo che in anticipo, di essere eguale ad uno quando la corrente è in fase con la tensione, altrimenti di essere sempre inferiore ad uno per raggiungere il valore zero nelle condizioni di corrente in quadratura. Per questo, fissati certi valori alla tensione e alla corrente, la potenza P sarà massima quando corrente e tensione risulteranno in fase (circuito esclusivamente ohmico), sarà nulla quando la corrente e la tensione risulteranno in quadratura (circuito esclusivamente reattivo).

Osservando d'altronde il diagramma vettoriale di fig. 5.59-3, che

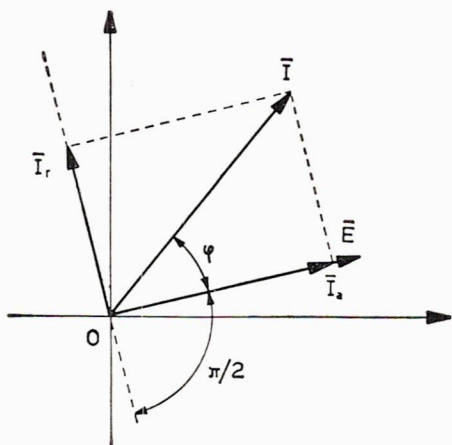



Fig. 5.59-3

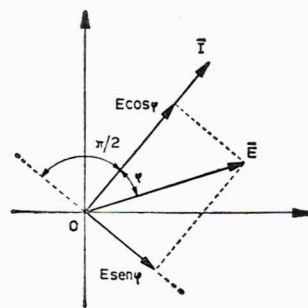



Fig. 5.59-4

rappresenta una situazione generica di carico, si deduce che si potrà esprimere la potenza attiva, poiché $I\cos\varphi = I_a$, anche con la seguente formula:

5.59-7 $$P = E\,I_a\,,$$

essendo appunto I_a la componente della corrente in fase con la tensione applicata E. Ciò suggerisce l'idea che a determinare la potenza attiva nel circuito sia pertanto tale componente. Per questo motivo I_a viene detta *componente attiva della corrente* (³).

(²) Poiché qui si considera che la potenza sia assorbita (angolo $\varphi < \pm 90°$). Con questa convenzione allora la potenza generata (la cui espressione è sempre EI cos φ) sarà da ritenersi negativa (angolo $\varphi > \pm 90°$), perché ovviamente potenza assorbita (dissipata) e potenza generata devono essere considerate di segno opposto.

(³) Naturalmente nulla vieta di affermare che la potenza attiva risulta anche come prodotto fra la corrente (I) e la componente della tensione in fase con la corrente ($E\cos\varphi$). Si veda la fig. 5.59-4.

Ci si può chiedere a questo punto che cosa determini, o per lo meno che cosa significhi, l'altra componente della corrente, cioè quella in quadratura con la tensione, indicata con I_r e detta *componente reattiva della corrente.* Ora questa componente, che vale $I_r = I \operatorname{sen} \varphi$, non può ovviamente dar luogo a lavoro, o meglio non può determinare con continuità un trasferimento di energia dal generatore al circuito utilizzatore. Per tale motivo, al prodotto del valore efficace della componente in quadratura (I_r) della corrente per il valore efficace della tensione (E), *che non può risultare una potenza attiva*, è stato dato il nome di potenza reattiva: questa verrà indicata col simbolo Q. Pertanto la potenza reattiva di un' impedenza o di un circuito [4] sarà data dalla seguente relazione:

5.59-8
$$Q = EI \operatorname{sen} \varphi = EI_r.$$

La potenza reattiva Q viene espressa in voltampere reattivi (abbreviazione VAR) [5] se E ed I sono misurati rispettivamente in volt e in ampere.

Si noti dunque che la potenza reattiva non è fisicamente una potenza: il suo significato è semplicemente quello di indicare col suo valore l'ammontare massimo della potenza reattiva istantanea che viene impegnata dal circuito, poiché questo, per essere $\varphi \neq 0$, è sede anche di fenomeni energetici conservativi (dovuti appunto alla presenza di induttanze e di capacità). Ciò si vedrà meglio nel § 5.511.

Osservando la 5.59-8 ci si accorge che la potenza reattiva cambia segno al variare del segno dell'angolo φ di sfasamento. Per convenzione [6], in questo testo risulta che la potenza reattiva è positiva quando la corrente si presenta in anticipo sulla tensione, quindi per i circuiti capacitivi, poiché in tal caso l'angolo φ è appunto positivo. La potenza reattiva capacitiva verrà indicata con Q_C, per distinguerla da quella induttiva, negativa, che sarà indicata invece con Q_L.

D'altronde nella tecnica delle correnti alternate si considera accanto alla potenza attiva e reattiva ancora una terza potenza, che fisicamente però non è una potenza elettrica, precisamente la cosiddetta potenza apparente. Questa viene indicata col simbolo A ed è definita semplicemente dal prodotto fra i valori efficaci della tensione e della corrente. Si ha quindi che:

5.59-9
$$A = E\,I.$$

---

(4) Correntemente anche questa potenza reattiva si dice che viene *fornita* al circuito (assieme a quella attiva) dal generatore al quale il circuito è allacciato. In realtà occorre tenere sempre ben presente il significato fisico di tale potenza.

(5) E non in watt appunto perché nel tempo non dà luogo a lavoro.

(6) La convenzione consiste nell'aver riferito la corrente alla tensione. Si veda infatti l'espressione 5.53-4 e quindi la 5.53-5, nonché la nota 3 del § 5.54.

Tale potenza risulta misurata semplicemente in voltampere (abbreviazione VA) se tensione e corrente verranno misurate rispettivamente in volt e in ampere. L' introduzione di questa terza grandezza nello studio delle correnti alternate è giustificata dal fatto che essa costituisce un parametro di grande utilità in talune importanti applicazioni pratiche (ad esempio macchinario elettrico, impianti elettrici, misure, ecc.).

Concludendo, un' impedenza, o un circuito di determinate caratteristiche, che assorba la corrente I ed ai suoi capi abbia la tensione E, presenterà in generale un certo valore di potenza attiva, reattiva ed apparente. A tale proposito, è da osservare che queste tre grandezze non sono indipendenti ma risultano legate fra di loro da un'importante relazione. Infatti, poiché (vedi diagramma vettoriale di fig. 5.59-5*a*) il modulo della corrente I è esprimibile nel seguente modo:

5.59-10 $$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{I^2\cos^2\varphi + I^2\text{sen}^2\varphi}\,,$$

la potenza apparente A potrà essere scritta allora nella seguente forma:

5.59-11 $$A = EI = \sqrt{(EI\cos\varphi)^2 + (EI\text{sen}\varphi)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

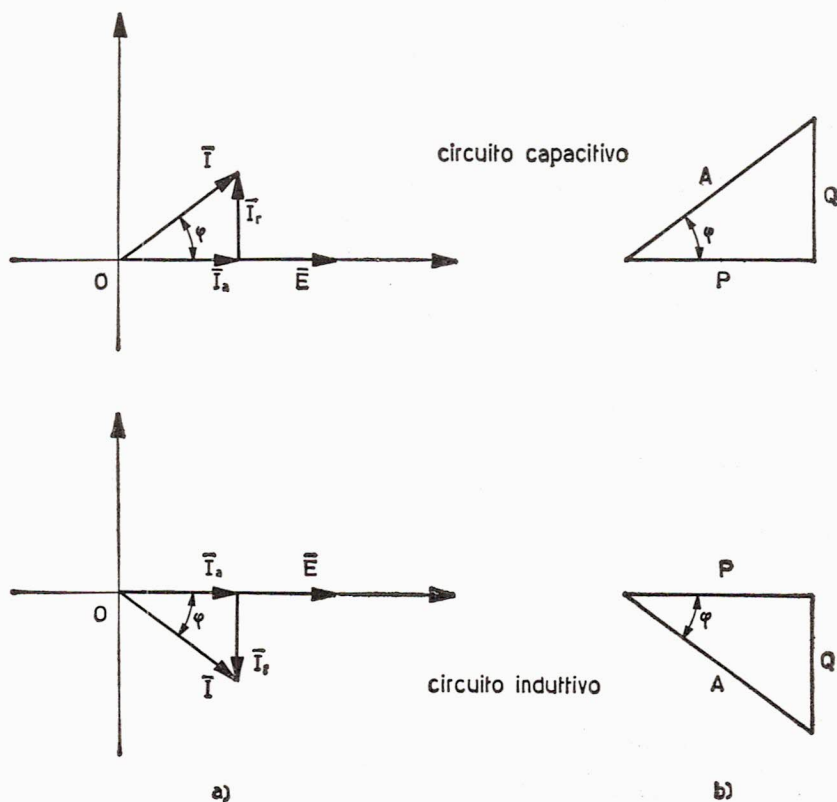



Fig. 5.59-5

La 5.59-11 esprime appunto la relazione che intercorre fra le tre grandezze A, P, Q, relative ad uno stesso circuito (o impedenza, generatore, ...).

Alla 5.59-11 si può pervenire d'altronde pure per via grafica (vedi ancora diagramma vettoriale di fig. 5.59-5*a*). Posto infatti il vettore tensione $\bar{E}$ sull'asse reale per semplicità e comodità, la corrente $\bar{I}$ individua un triangolo avente per ipotenusa la stessa corrente $\bar{I}$ e per cateti orizzontale e verticale rispettivamente la componente reale I_a, in fase con la tensione $\bar{E}$, e la componente immaginaria I_r, in quadratura con la stessa tensione $\bar{E}$. Moltiplicando ora ciascun lato del triangolo su menzionato per la quantità scalare E, si passerà ovviamente dal triangolo delle correnti al triangolo delle potenze (vedi fig. 5.59-5*b*) : precisamente ad un triangolo rettangolo il cui cateto orizzontale rappresenta la potenza attiva P, l'altro cateto la potenza reattiva Q, l' ipotenusa la potenza apparente A.

Risulta così chiaramente che la potenza apparente ha carattere vettoriale e che essa è rappresentabile nel piano con un vettore $\bar{A}$ avente per parte reale la potenza attiva P e per coefficiente dell' immaginario la potenza reattiva Q. Si potrà cioè scrivere l' importante relazione :

5.59-12 $$\bar{A} = P + jQ \cdot$$

Si deduce da questa espressione, o dalla rappresentazione vettoriale di fig. 5.59-5*b*, che (teorema di Boucherot) : per un circuito (o impedenza) costituito da più tronchi (o più impedenze), i quali impegnino rispettivamente le potenze attive P_1, P_2, P_3 .... e reattive Q_1, Q_2, Q_3 ...., la potenza attiva totale P_t sarà calcolabile come somma *algebrica* delle singole potenze P_1, P_2, P_3 .... ; così la potenza reattiva totale Q_t sarà data dalla somma *algebrica* delle singole potenze reattive, Q_1, Q_2, Q_3 ..... Cioè quindi si avrà che :

5.59-13 $$P_t = \Sigma \pm P \quad , \quad Q_t = \Sigma \pm Q \cdot$$

La potenza apparente totale A_t risulterà invece come somma *vettoriale* delle potenze apparenti dei singoli tronchi (o impedenze).

Si scriverà perciò :

5.59-14 $$\bar{A}_t = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + ... ;$$

per cui l'ammontare del valore di A_t si calcolerà con la seguente formula :

5.59-15 $$A_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}$$

e non come somma dei moduli $A_1 + A_2 + A_3 + ...$!

Esercizio 5.591

Si trovi il fattore di potenza di un circuito costituito (vedi fig. 5.591-1) da un carico ohmico-induttivo (500 W, 300 VAR), da un gruppo di resistenze (200 W), da un condensatore (100 VAR) e da un generatore che eroga solamente potenza attiva (600 W).

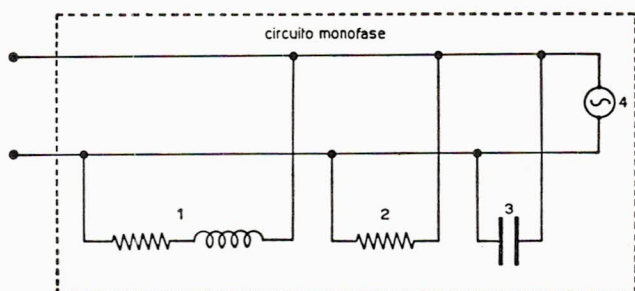



Fig. 5.591-1

Soluzione

Si risolva l'esercizio ad esempio per via grafica. Assunto allora come scala per la potenza attiva 1 cm = 100 W e di conseguenza per quella reattiva 1 cm = 100 VAR, si portino nel piano, a partire dal punto O (vedi fig. 5.591-2) successivamente i vari segmenti orizzontali e verticali che rappresentano rispettivamente le potenze attive e reattive date. Si noti che il generatore fornisce al circuito una potenza di 600 W, per cui essa è da considerarsi negativa rispetto a quella assorbita dai carichi.

Risulta così in definitiva dal diagramma di fig. 5.591-2 un angolo φ, in ritardo, del valore di circa 63°. Il fattore di potenza varrà perciò

$$\cos \varphi = \cos 63^0 = 0{,}454 \ .$$

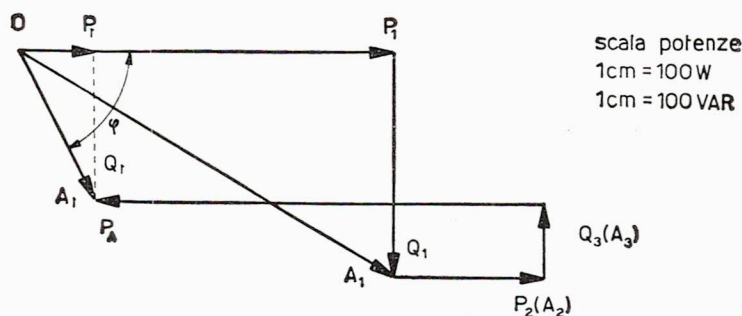



Fig. 5.591-2

Per via analitica il calcolo porta naturalmente ai seguenti risultati:

$$P_t = P_1 + P_2 - P_4 = 500 + 200 - 600 = 100 \text{ W}$$

$$Q_t = -Q_1 + Q_3 = -300 + 100 = -200 \text{ VAR} ,$$

per cui:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-200}{100} = -2 \qquad \varphi = -63^0\,26' ,$$

e quindi:

$$\cos \varphi = \cos(-63^0\,26') = 0{,}447 .$$

5.510 Espressioni di calcolo per le potenze

Un circuito, o una parte di esso (tronco o bipolo), è sempre rappresentabile in regime sinusoidale mediante un' impedenza equivalente o un'ammettenza equivalente.

Si consideri il primo caso (fig. 5.510-1*a*). È chiaro allora che, si veda

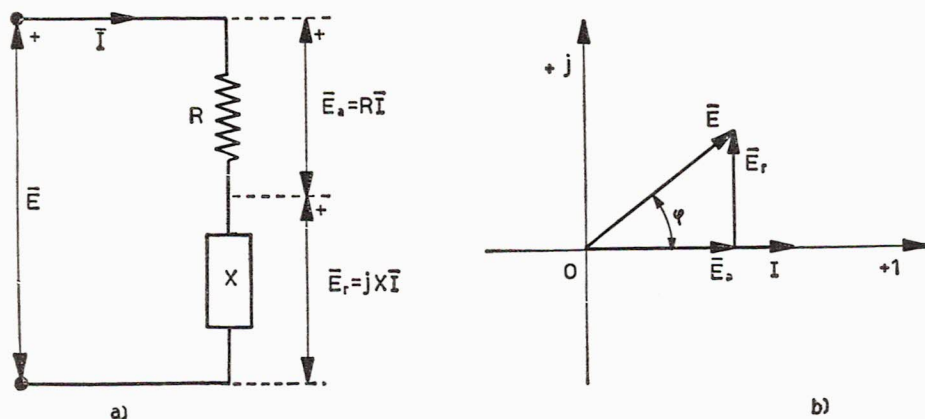



Fig. 5.510-1

anche costruzione vettoriale di fig. 5.510-1*b*, per la potenza attiva e reattiva si potrà scrivere:

5.510-1 $$P = EI \cos \varphi = IE \cos \varphi = IE_a \,(^1) = RI^2$$

5.510-2 $$Q = EI \operatorname{sen} \varphi = IE \operatorname{sen} \varphi = IE_r \,(^2) = XI^2 ,$$

---

(1) E_a rappresenta la componente della tensione in fase con la corrente, cioè la componente *attiva* della tensione.

(2) E_r rappresenta la componente in quadratura della tensione rispetto alla corrente, cioè la componente *reattiva* della tensione.

per cui la potenza apparente risulterà:

5.510-3 $$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2 \sqrt{R^2 + X^2} = ZI^2 .$$

Si consideri invece il secondo caso, che si presenta quando cioè il circuito o il tronco equivale ad un' ammettenza (fig. 5.510-2*a*).

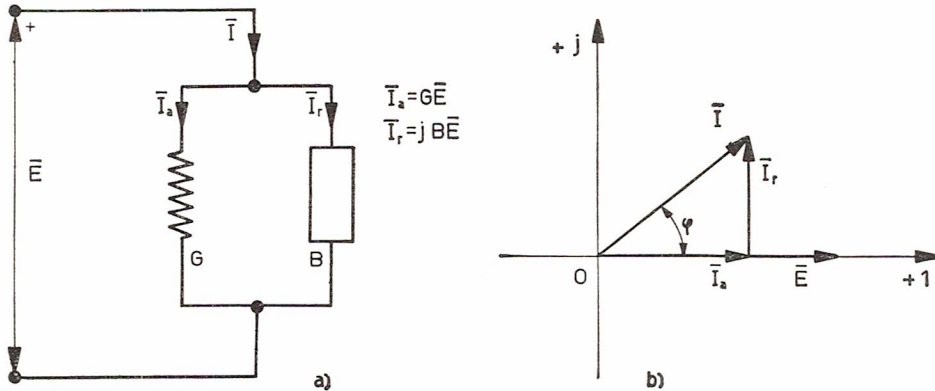



Fig. 5.510-2

Dalla costruzione vettoriale di fig. 5.510-2*b*, e in base a cose già note sulle correnti alternate, per la potenza attiva e reattiva si potrà scrivere:

5.510-4 $$P = EI \cos \varphi = EI_a = GE^2$$

5.510-5 $$Q = EI \operatorname{sen} \varphi = EI_r = BE^2 ;$$

di conseguenza per la potenza apparente risulterà:

5.510-6 $$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = E^2 \sqrt{G^2 + B^2} = YE^2 .$$

Le espressioni e le formule ora trovate sono importanti, poiché permettono in altra forma di esprimere, e quindi di calcolare, la potenza attiva, reattiva ed apparente nei vari casi.

Esercizio 5.5101

Si calcoli la potenza attiva, reattiva, apparente del tronco di circuito rappresentato in fig. 5.561-1 dell'esercizio 5.561.

Soluzione

Poiché si dispone già dei risultati finali (la soluzione dell'eserci-

zio 5.561 ha portato infatti ai seguenti risultati: tensione E ai capi del tronco: 28,3 volt; corrente I assorbita: 2,53 ampere, in ritardo sulla tensione dell'angolo $\varphi = 26^0\,34'$) il calcolo dell'ammontare delle tre potenze richieste è assai semplice. Infatti, trovato per mezzo delle tavole trigonometriche che:

$$\cos(-26^0\,34') = 0{,}894 \,, \qquad \text{sen}\,(-26^0\,34') = -0{,}447 \,,$$

si ha:

$$P = EI\cos\varphi = 28{,}3\cdot 2{,}53\cdot 0{,}894 = 64\ \text{W}\,,$$

$$Q = EI\,\text{sen}\,\varphi = -28{,}3\cdot 2{,}53\cdot 0{,}447 = -32\ \text{VAR}\,,$$

$$A = EI = 28{,}3\cdot 2{,}53 = 71{,}6\ \text{VA}\,.$$

Esercizio 5.5102

Si controlli mediante il teorema di Boucherot i risultati trovati nell'esercizio precedente.

Soluzione

Il tronco di circuito in oggetto è stato riportato per comodità in fig. 5.5102-1. Si può vedere allora che la potenza attiva P del tronco è

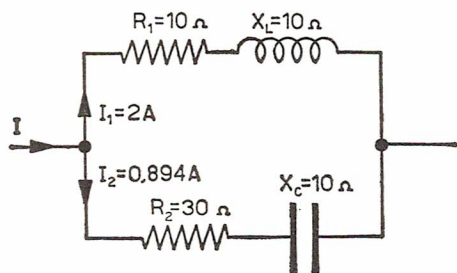



Fig. 5.5102-1

quella che viene dissipata dalle due resistenze R_1 ed R_2, per cui si ha immediatamente:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 10\cdot 2^2 + 30\cdot 0{,}894^2 = 40 + 24 = 64\ \text{W}\,;$$

mentre la potenza reattiva del tronco è dovuta all'induttanza e alla capacità. La prima però deve essere considerata negativa. Risulta quindi:

$$Q = -X_L I_1^2 + X_c I_2^2 = -10\cdot 2^2 + 10\cdot 0{,}894^2 = -40 + 8 = -32\ \text{VAR}.$$

Applicando ora la formula 5.59-15 del testo, si calcolerà la potenza apparente :

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{64^2 + 32^2} = 71{,}6 \text{ VA} .$$

I risultati ovviamente coincidono.

5.511 Significato fisico della potenza reattiva

Si consideri il diagramma della potenza istantanea in funzione del tempo, per un circuito ad esempio ohmico-capacitivo (curva p di figura 5.511-1a). Da questo diagramma si noterà che vi sono degli inter-

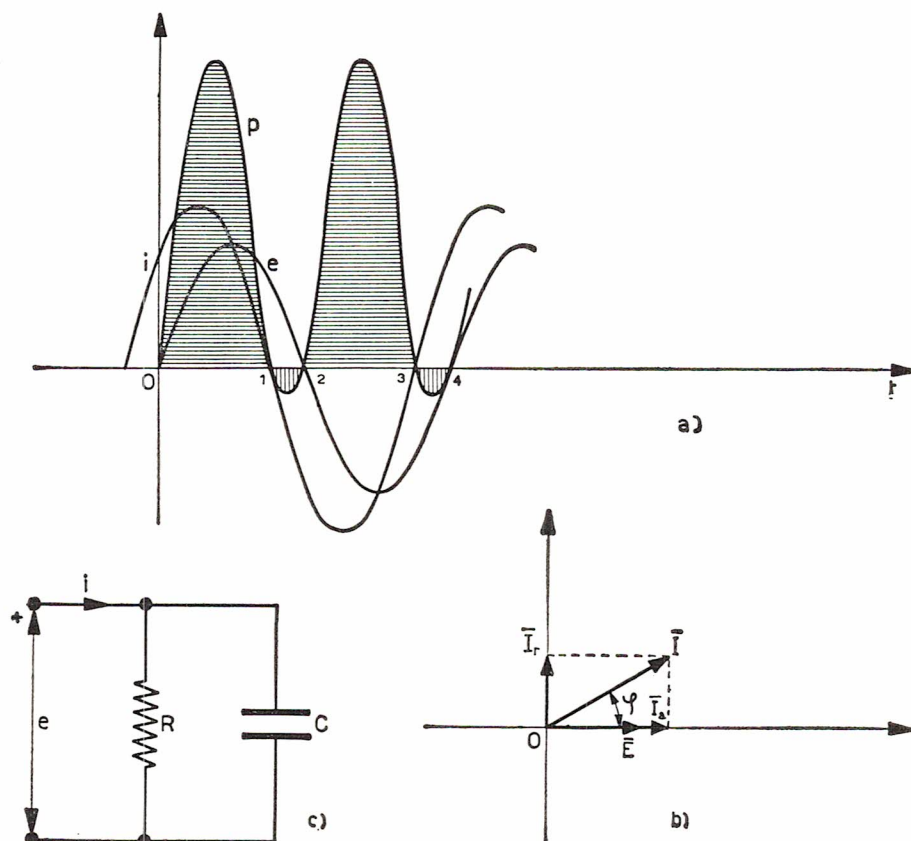



Fig. 5.511-1

valli di tempo nei quali la potenza istantanea è positiva (ad esempio intervalli 0-1, 2-3, ecc.) intercalati ad altri in cui la potenza istantanea risulta invece negativa (ad esempio intervalli 1-2, 3-4, ecc.). Ora si comprende che, se negli intervalli di tempo in cui la potenza istantanea è

positiva il circuito assorbe energia (e sarà il generatore che lo alimenta a fornirla), di conseguenza negli intervalli di tempo in cui la potenza istantanea risulta negativa sarà il circuito a fornire energia elettrica (precisamente al generatore cui è collegato). Ma non deve meravigliare che il circuito, in certi istanti, fornisca energia al generatore, poiché esso non fa altro che restituire quell'energia che gli elementi reattivi del circuito (in questo caso la capacità) avevano immagazzinato negli istanti precedenti sotto forma di energia elettrostatica ($w = \frac{1}{2} Ce^2$; oppure nel caso di un' induttanza sotto forma di energia elettromagnetica $w = \frac{1}{2} Li^2$). Ovviamente, l'energia $EI \cos \varphi \cdot t$ è quella che resta definitivamente al circuito, cioè quella che il circuito trasforma in qualche modo, ad esempio in energia termica, meccanica, chimica, ecc. ...

Ma l'esame energetico può esser meglio valutato considerando separatamente il fenomeno della potenza attiva da quello della potenza reattiva impegnata dal circuito.

È noto che l'espressione della potenza attiva è data ad esempio dalla relazione $P = EI_a$. Per questo motivo la curva ottenuta come prodotto della curva sinusoidale che rappresenta la tensione E per la curva sinusoidale che rappresenta la corrente $I_a = I \cos \varphi$ (componente in fase con la tensione) esprimerà (curva p di fig. 5.511-2) la

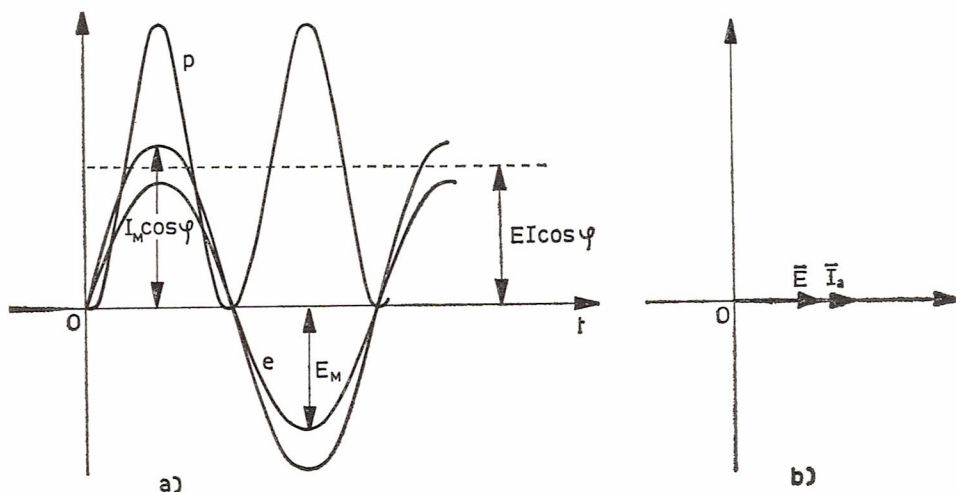



Fig. 5.511-2

potenza istantanea di un circuito che dissipa esclusivamente potenza attiva.

Questa curva infatti risulta tutta positiva, quindi il circuito, per la componente I_a, è come se fosse solamente ohmico : non può cioè né immagazzinare né fornire energia. Il valore medio della curva prodotto sarà ovviamente EI_a.

La potenza reattiva è data invece ad esempio dall'espressione $Q = EI_r$, per cui, tracciando la curva prodotto della curva che rappresenta la tensione sinusoidale E con quella della corrente sinusoidale $I \operatorname{sen} \varphi = I_r$ (componente in quadratura), si otterrà la curva q di fig. 5.511-3 la quale, si vede subito, risulta in egual parte positiva e negativa, cioè con valor medio nullo. È chiaro quindi che questa componente in quadratura della corrente non può determinare potenza nel senso fisico di questa parola.

Ma la curva q della potenza istantanea ora trovata permette anche di mostrare il meccanismo col quale avviene quel periodico scambio di energia fra generatore e circuito, nel nostro caso fra generatore e il campo elettrostatico del condensatore (qui si è fatta l'ipotesi che il circuito sia capacitivo) di cui già si è fatto cenno. Infatti, nel primo quarto di periodo in cui la tensione cresce (l'intervallo 0-1 di fig. 5.511-3), il generatore fornirà al campo elettrostatico la necessaria energia perché esso raggiunga all'istante 1 il valore massimo $\left(\frac{1}{2} CE_M^2\right)$, poi nel successivo quarto di periodo sarà il campo elettrostatico a restituire al generatore a poco a poco l'energia avuta, per il fatto che la tensione

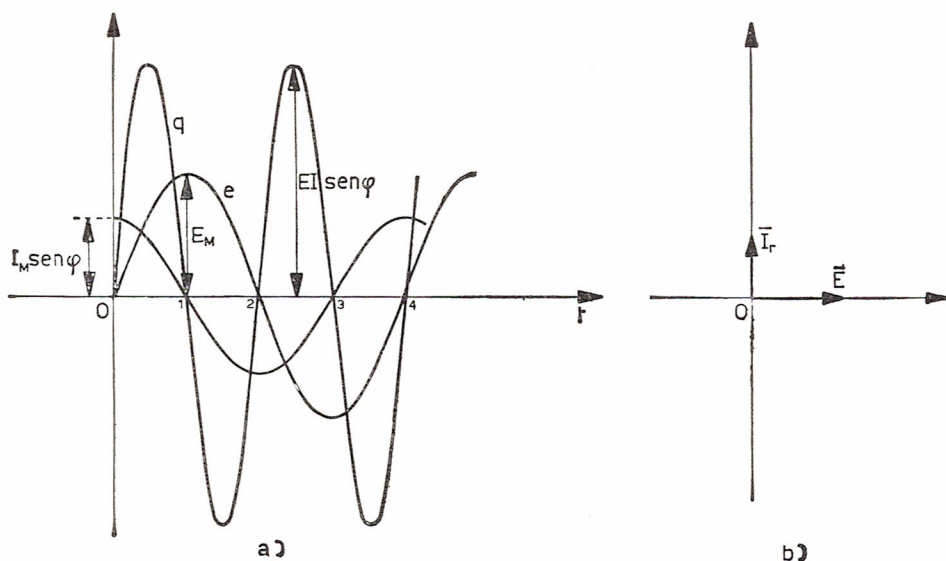



Fig. 5.511-3

decresce di valore (intervallo 1-2). All'istante 2 l'energia elettrostatica sarà nulla. Così nell'intervallo successivo 2-3 il generatore, poiché la tensione torna a crescere (non importa se il segno si è invertito), fornirà al campo elettrostatico nuova energia e per questo motivo la potenza istantanea risulterà ancora positiva, quindi nell'intervallo 3-4 sarà di nuovo il circuito a fornire (restituire) energia al generatore, poiché la ten-

sione in quest' intervallo decresce di valore. D'altronde il meccanismo ora descritto continuerà a ripetersi identicamente ogni mezzo periodo. Fra generatore ed utilizzatore vi è dunque un continuo palleggiamento di energia, la quale non fa parte dell'energia di cui il circuito realmente abbisogna (energia termica, meccanica, ecc.). Per questo motivo la componente reattiva della corrente viene denominata anche componente *swattata* o *corrente oziosa.*

Può essere interessante calcolare da ultimo l'ampiezza della sinusoide (di frequenza doppia) che rappresenta la curva della potenza reattiva (curva q di fig. 5.511-3). Per quanto riportato nell'espressione 5.23-5 del § 5.23 [1], si ha subito che questa ampiezza vale:

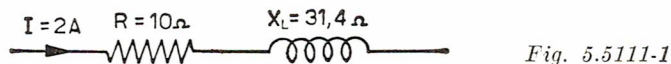
5.511-1 $$\frac{E_M I_M \operatorname{sen} \varphi}{2} = EI \operatorname{sen} \varphi = Q \,.$$

Resta quindi dimostrato che il valore Q della potenza reattiva di cui si è parlato nei precedenti paragrafi rappresenta semplicemente il valore massimo (di cresta) della potenza reattiva istantanea.

Esercizio 5.5111

Il bipolo di fig. 5.5111-1 è percorso da una corrente sinusoidale

I = 2A R = 10Ω X_L = 31,4 Ω

Fig. 5.5111-1

$I = 2$ ampere, la cui frequenza è di 50 per/sec. Si dica a quanto ammonta l'energia elettromagnetica posseduta nell' istante in cui la corrente passa per il suo valor massimo.

Soluzione

Nell' istante in cui la corrente passa per il suo valor massimo, che è:

$$I_M = I\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ampere},$$

l'energia immagazzinata dall' induttanza L, il cui valore ammonta a:

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{31{,}4}{6{,}28 \cdot 50} = 0{,}1 \text{ henry},$$

---

[1] In questo caso risulta:

$$a = E_M \operatorname{sen} \omega t$$
$$b = (I_M \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} (\omega t + \pi/2) \cdot$$

raggiunge pure il massimo valore, precisamente:

$$W_L = \frac{1}{2} L I_M^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \cdot (2\sqrt{2})^2 = 0{,}4 \ \text{joule}.$$

5.512 Rifasamento

È noto che un qualsiasi carico ohmico-induttivo, schematizzabile sempre con un' impedenza equivalente $\overline{Z}_u$ (vedi fig. 5.512-1*a*), assorbe una corrente $\overline{I}_u$ sfasata in ritardo di un certo angolo φ rispetto alla tensione E che lo alimenta. Poiché si è visto nei precedenti paragrafi che il generatore fornisce al carico una potenza attiva che dipende esclusivamente dalla componente della corrente che risulta in fase con la tensione, e non dalla componente in quadratura, è chiaro che per il generatore il diminuire o l'annullare quest' ultima componente, fermo restando il valore della prima, lascerà inalterato l'ammontare della potenza attiva da esso fornita, mentre diminuirà il valore della potenza reattiva.

Ora si dà il nome di rifasamento appunto a quella operazione che consente di diminuire, fino ad annullare se è conveniente, la componente reattiva della corrente richiesta al generatore da un carico. Poiché nella pratica i carichi sono induttivi, il rifasamento dovrà essere realizzato mediante elementi reattivi la cui azione sia opposta a quella dei predetti carichi, quindi avverrà tramite condensatori. Questi possono essere inseriti in parallelo al carico (rifasamento tipo parallelo, vedi fig. 5.512-1*c*).

Schematizzato dunque il condensatore con una capacità C, si deduce immediatamente dal diagramma vettoriale di fig. 5.512-1*d* che la corrente $\overline{I}_C$ assorbita dal condensatore, la quale è in quadratura anticipo rispetto alla tensione $\overline{E}$, va a sommarsi (vettorialmente) con quella $\overline{I}_u$ del carico, determinando una corrente risultante $\overline{I}$ assai meno sfasata ($\varphi' < \varphi$) e di minore intensità ($I < I_u$). Anzi, nel caso in cui si abbia: $I_C = I_u \operatorname{sen} \varphi = I_r$, il carico, la cui natura è e rimane sempre induttiva, poiché la presenza del condensatore in parallelo non ha alcuna influenza sul carico stesso [1], si comporterà per il circuito esterno che lo alimenta come ohmico puro ($\cos \varphi = 1$) e la corrente assorbita dall' insieme costituito dal carico e dal condensatore presenterà il minimo valore possibile ($I = I_a$) per quella data potenza P e tensione E. Ovviamente non vi è nessuna convenienza a portare il rifasamento nella condizione determinata da $I_C > I_r$.

---

[1] Il carico funziona indipendentemente dal condensatore aggiuntovi. Semplicemente ora si ha che il *palleggiamento* dell'energia reattiva avviene fra carico e condensatore anziché fra carico e generatore. In tali condizioni il generatore quindi fornisce al carico solo l'energia da questo dissipata.

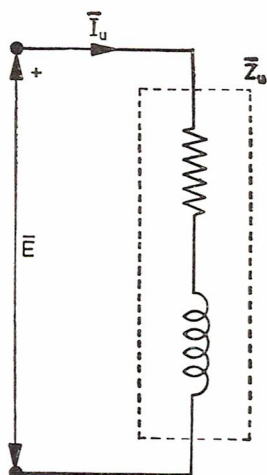
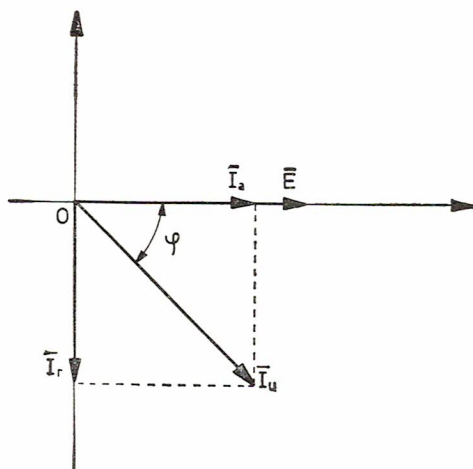
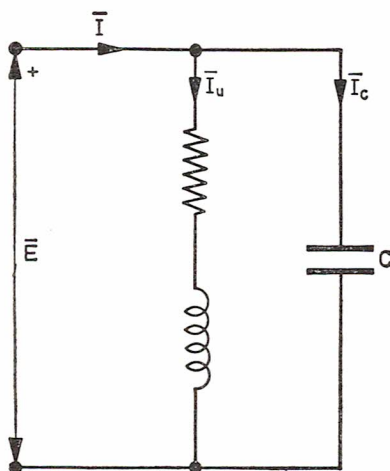
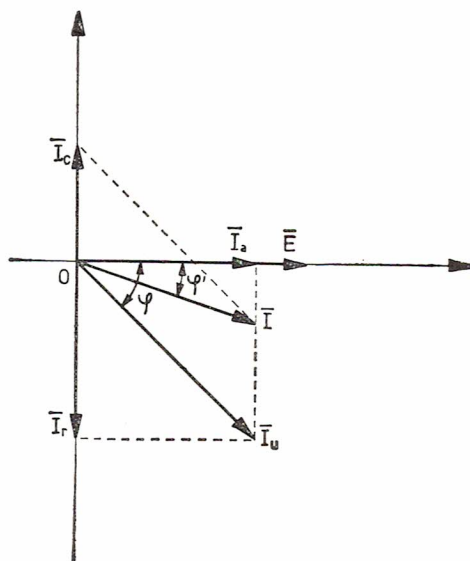



Fig. 5.512-1

Ma il ragionamento fatto sulle correnti può essere ripetuto a proposito delle potenze. Disegnato allora il triangolo delle potenze nella situazione corrispondente al valore del $\cos\varphi$ presentato dal carico prima del rifasamento (triangolo *OHB* di fig. 5.512-2), affinché il fattore di potenza aumenti, cioè lo sfasamento diminuisca, (triangolo *OHB'* corrispondente al nuovo angolo φ' determinato dal nuovo fattore di potenza $\cos\varphi'$ fissato) occorrerà aggiungere al carico (teorema di Boucherot)

un condensatore avente una potenza reattiva (Q_c) il cui valore è dato dal segmento BB' (fig. 5.512-2). Nota Q_c, si potrà calcolare il valore della capacità C necessaria per mezzo della formula:

5.512-1
$$C = \frac{Q_c}{\omega E^2}.$$

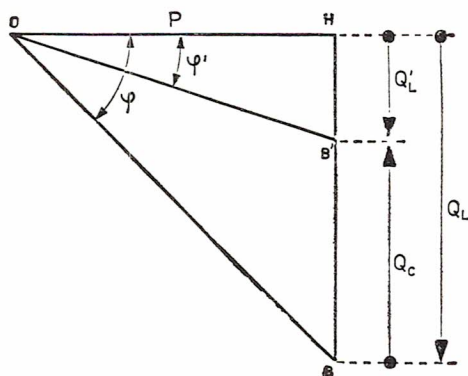



Fig. 5.512-2

Naturalmente è possibile rifasare anche inserendo un condensatore in serie al carico. Procedimento però questo attualmente poco usato.

Esercizio 5.5121

Si deve rifasare un carico induttivo il quale assorbe una potenza di 100 watt con fattore di potenza 0,50. Trovare la potenza reattiva del condensatore, affinché il fattore di potenza si porti a 0,80, e il valore della capacità qualora la tensione di alimentazione sia 220 volt alla frequenza di 50 per/sec.

Soluzione

Dal diagramma vettoriale riportato in fig. 5.512-2 del testo si deduce che la potenza Q_c del condensatore da installare deve ammontare a:

$$Q_c = Q_L - Q'_L = P\,(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi').$$

Dalle tavole trigonometriche si ricava d'altronde che la tangente dell'angolo φ che ha per coseno 0,50 vale 1,732, quindi $\mathrm{tg}\,\varphi = 1{,}732$; così la tangente dell'angolo φ' che ha per coseno 0,80 vale 0,750, quindi $\mathrm{tg}\,\varphi' = 0{,}750$. Si ha perciò:

$$Q_c = 100\,(1{,}732 - 0{,}750) = 100 \cdot 0{,}982 = 98{,}2 \text{ VAR},$$

per cui il condensatore dovrà presentare la seguente capacità:

$$C = \frac{Q_c}{\omega E^2} = \frac{98{,}2}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 220^2} = 6{,}46 \ \mu\mathrm{F}\,.$$

5.513 Induzione sinusoidale nei materiali ferromagnetici

Si consideri un nucleo ferromagnetico senza traferro (il cui ciclo di isteresi sia come quello che appare in fig. 5.513-1*a*), il quale porti

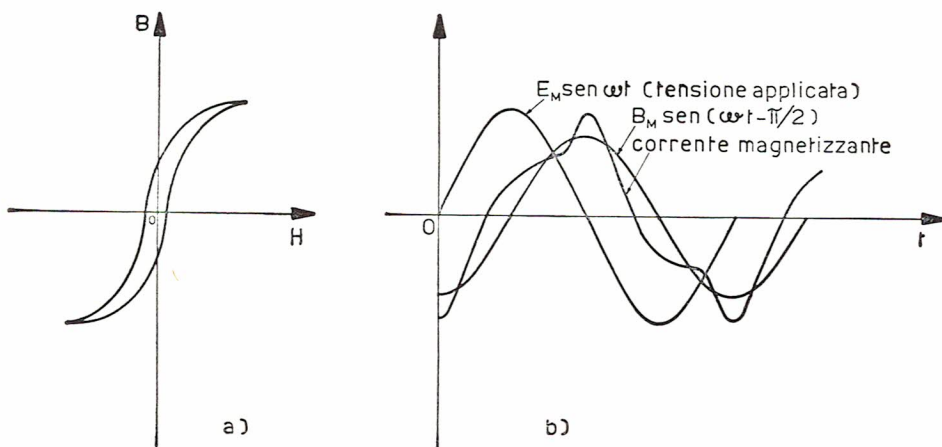



Fig. 5.513-1

un avvolgimento percorso da corrente alternata (vedi fig. 5.513-2) in modo tale che il flusso magnetico nel nucleo possa variare con legge sinusoidale. In sostanza, quanto ora è stato descritto, costituisce una *induttanza con ferro* (¹): l'avvolgimento infatti, per la corrente che lo percorre, possiede una notevole reattanza X_L rispetto alla sua resistenza ohmica R_L (dovuta questa alla resistenza del filo conduttore dell'avvolgimento), poiché il nucleo costituito da un materiale ferromagnetico, senza traferro, presenta bassissima riluttanza. Per detto motivo, in questo paragrafo, non si terrà conto della resistenza R_L.

Quali sono dunque i fenomeni più importanti per tale induttanza quando ad essa viene applicata una tensione sinusoidale?

In primo luogo, si può osservare che la corrente circolante nell'avvolgimento (corrente magnetizzante) non può essere sinusoidale, poiché si è supposta sinusoidale la tensione applicatavi. Invero, la relazione che lega l'induzione al campo magnetico, e quindi il flusso alla

---

(¹) Il simbolo grafico dell'induttanza con ferro appare in fig. 5.513-2*b*.

corrente di magnetizzazione, non è rappresentata da una legge di proporzionalità bensì dal ciclo di isteresi, il quale risulta una curva chiusa. Pertanto la corrente avrà l'andamento riportato in fig. 5.513-1*b*; naturalmente essa risulta alternata ed isofrequenziale rispetto alla tensione sinusoidale applicata.

In secondo luogo, occorrerà tener conto che il materiale del nucleo, sottoposto alla magnetizzazione periodica imposta dalla corrente, dis-

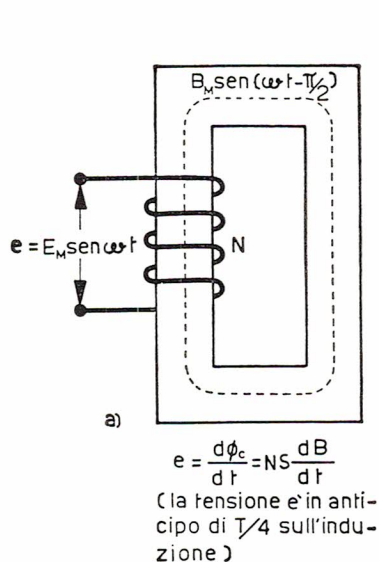



Fig. 5.513-2

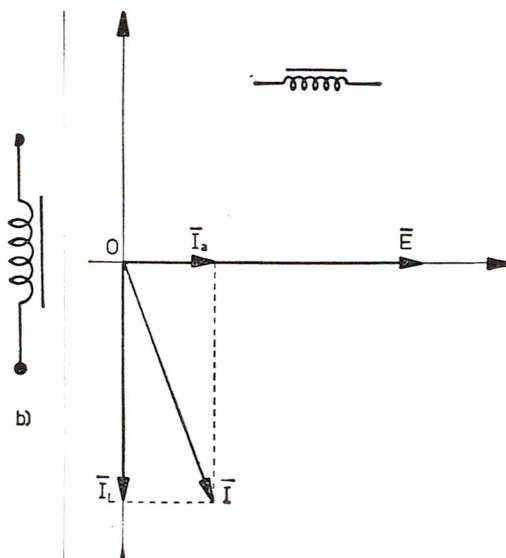



Fig. 5.513-3

siperà per ogni ciclo, a causa dell' isteresi magnetica, una certa energia $W_i = aB_M^n \cdot$ volume (*joule*), come si è precisato nel § 4.24 del capitolo 4. Perciò il fenomeno dell' isteresi magnetica farà dissipare la seguente potenza:

5.513-1 $$P_i = W_i \cdot f = afB_M^n \cdot \text{volume}\ (^2) \qquad (\text{watt}),$$

essendo f il numero di cicli di isteresi compiuti in un secondo (cioè f = frequenza dell' induzione sinusoidale di valore massimo B_M).

In terzo luogo, nella massa del materiale ferromagnetico costituente il nucleo, nasceranno delle correnti indotte (correnti di Foucault), dovute appunto al fatto che il materiale è conduttore e risulta sottoposto ad un flusso di induzione variabile nel tempo. Pertanto si dissiperà nel nucleo un' ulteriore energia elettrica sotto forma di calore. A tale proposito si dimostra che la potenza elettrica perduta in un

(2) Il volume è quello dell' intero nucleo ferromagnetico.

nucleo, laminato nel senso delle linee di flusso (per ridurre l'effetto delle correnti parassite) ed assoggettato ad un' induzione sinusoidale di frequenza f, è calcolabile con la seguente formula:

5.513-2 $$P_F = b(f \cdot \delta \cdot B_M)^2 \cdot \text{volume} \qquad (\text{watt}),$$

dove δ rappresenta lo spessore del lamierino, mentre b è un coefficiente che tien conto delle caratteristiche del materiale. Ad esempio se δ è espresso in mm, il volume in m³, f in per/sec e B_M in Wb/m², per il ferro dolce si ha $b = 20$, mentre per il ferro-silicio risulta $b = 5$.

Si noti d'altronde che in pratica, il più delle volte, le perdite nei materiali ferromagnetici sottoposti a regime di induzione sinusoidale vengono riferite all' unità di peso (chilogrammo), anziché a quella di volume (metro cubo), ed espresse inoltre da un unico valore (perdite totali), il quale tien conto perciò globalmente dell'effetto dell' isteresi magnetica e delle correnti parassite. Inoltre il dato più usuale riportato correntemente è quello che si riferisce a condizioni standard di induzione e di frequenza (precisamente $B_M = 1$ Wb/m², $f = 50$ per/sec). Tale valore viene chiamato allora *cifra di perdita* del materiale (abbrev. C_p).

La conclusione che si può trarre diventa la seguente: se ad una *induttanza con ferro* si applica una tensione sinusoidale, cosicché nel suo nucleo l' induzione abbia a variare con la stessa legge, ad ogni variazione periodica di quest' ultima l' induttanza non restituisce, a causa del campo magnetico sviluppantesi nel ferro, tutta quella energia che il generatore ha fornito al suo campo magnetico, perché appunto il materiale ferromagnetico ne ha dissipato una parte in calore ([3]).

Pertanto, anche se la corrente magnetizzante si potesse considerare sinusoidale ([4]), questa non potrà più risultare in quadratura (ritardo) con la tensione, come avviene in un' induttanza con nucleo in aria (cioè senza perdite), ma dovrà presentare una componente in fase, si veda il diagramma vettoriale di fig. 5.513-3, al fine di giustificare l'assorbimento di potenza attiva da parte dell' induttanza stessa. Si ricordi a questo proposito che qui si è fatta astrazione dalla resistenza dell'avvolgimento posto sul nucleo, avvolgimento che anch'esso è fonte di perdita (effetto Joule).

Esercizio 5.5131

Si calcoli il valore della cifra di perdita per un lamierino di ferro-silicio dello spessore $\delta = 0{,}5$ mm ed avente peso specifico $\gamma = 7650$ kg/m³.

([3]) Conclusioni analoghe si possono trarre anche quando l' induzione nel nucleo non varia con legge sinusoidale, bensì qualsiasi. In questo caso però non sono più valide le formule 5.513-1 e 2.

([4]) Ci si avvicina a questa condizione allontanandosi dalla saturazione, facendo cioè in modo che B_M non raggiunga valori troppo elevati.

Soluzione

Si farà ricorso alle formule 5.513-1 e 2, le quali però dovranno consentire di fornire i risultati in W/kg. A tale scopo basterà considerare il volume unitario (1 m^3) e dividere tali formule per il peso specifico γ, poiché infatti 1 m^3 contiene γ chilogrammi di materiale.

Sarà perciò, poiché nel nostro caso si ha $B_M = 1$ Wb/m², $a = 200$, $b = 5$:

$$C_p = \frac{1}{\gamma}(af + bf^2\delta^2) = \frac{1}{7{,}65 \cdot 10^3}(200 \cdot 50 + 5 \cdot 2500 \cdot 0{,}25) = 1{,}7 \quad \text{W/kg}.$$

5.514 Mutua induzione

I circuiti elettrici possono essere affetti, oltre che da resistenze, induttanze e capacità, anche da mutue induttanze. Ciò avviene quando uno o più rami del circuito sono *magneticamente* accoppiati ad altri rami o dello stesso circuito (fig. 5.5141-1) o di circuiti differenti (fig. 5.514-2).

Prima di affrontare lo studio di questi nuovi tipi di circuiti, sarà bene ricordare quali sono le relazioni cui dà luogo la mutua induzione in regime sinusoidale. Si abbia dunque una mutua induttanza di valore M (vedi fig. 5.514-1*a*) percorsa, ad esempio nel circuito secondario,

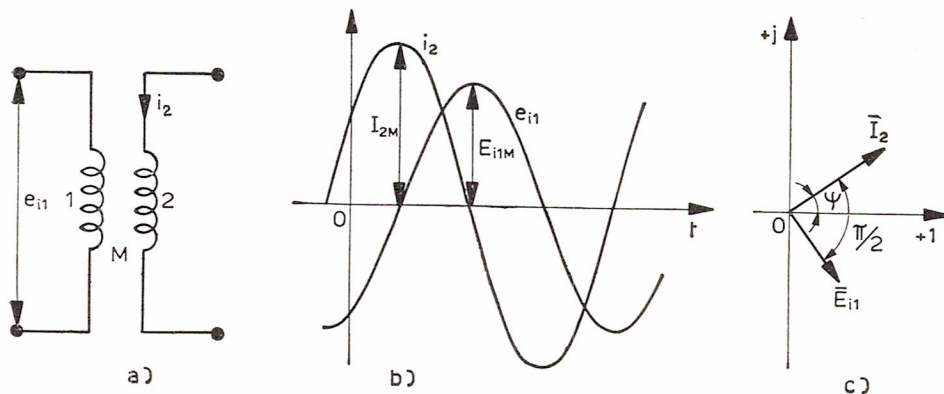



Fig. 5.514-1

dalla corrente i_2. È noto che questa determinerà ai capi dell'altro circuito (primario) la seguente forza elettromotrice (valori istantanei):

5.514-1
$$e_{i_1} = -M\,\frac{di_2}{dt}.$$

Poiché d'altronde la corrente i_2 sarà, per ipotesi, sinusoidale:

$$i_2 = I_{2M}\text{sen}(\omega t + \psi)\,, \qquad (5.514\text{-}2)$$

dalla formula 5.514-1 si deduce che la forza elettromotrice e_{i_1} è ancora sinusoidale, della stessa frequenza della corrente i_2 e rispetto a questa sfasata di $\pi/2$. Conservando il segno davanti all'espressione della *f.e.m.* si ha dunque:

$$e_{i_1} = -\,\omega M \cdot I_{2M}\text{sen}\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\,E_{i_1M}\text{sen}\,(\omega t + \xi)\,, \qquad (5.514\text{-}3)$$

cioè la *f.e.m.* e_{i_1} risulta essere una sinusoide di ampiezza $\omega M \cdot I_{2M}$ e sfasata in ritardo di $T/4$ rispetto alla corrente i_2 (1) (vedi diagrammi di fig. 5.514-1).

Con notazione simbolica si potrà scrivere quindi:

$$\bar{E}_{i1} = -\,j\,\omega M \bar{I}_2\,, \qquad (5.514\text{-}4)$$

che rappresenta la relazione fra i valori efficaci della *f.e.m.* al primario e della corrente al secondario di una mutua induttanza di valore M. Il prodotto ωM, al quale viene dato il nome di reattanza mutua e che si indica col simbolo X_M, rappresenta dunque un operatore vettoriale. Le sue dimensioni sono omogenee con quelle di una resistenza: verrà perciò misurata in ohm quando ω ed M risulteranno rispettivamente in rad/sec ed in henry.

Naturalmente, qualora la mutua induttanza venga percorsa da corrente anche nel circuito primario, ai capi del secondario si manifesterà la seguente *f.e.m.* di mutua induzione (valori istantanei):

$$e_{i2} = -\,M\,\frac{di_1}{dt} \qquad (5.514\text{-}5)$$

e quindi, con analogo ragionamento testé fatto, si perverrà alla seguente relazione vettoriale:

$$\bar{E}_{i2} = -\,j\,\omega M \bar{I}_1\,. \qquad (5.514\text{-}6)$$

Dopo aver precisato quanto sopra, è possibile scrivere facilmente le equazioni che porteranno a risolvere ad esempio il circuito di fig. 5.514-2, poiché, per la legge di Ohm per i valori istantanei, assumendo M positivo (2), si potrà scrivere per il circuito primario:

---

(1) Sarebbe in anticipo di $T/4$ se non ci fosse il segno meno davanti alle relative formule.

(2) Per maggiori chiarimenti sul segno da attribuire alle *f.e.m.* di mutua induzione si veda il § 7.5.

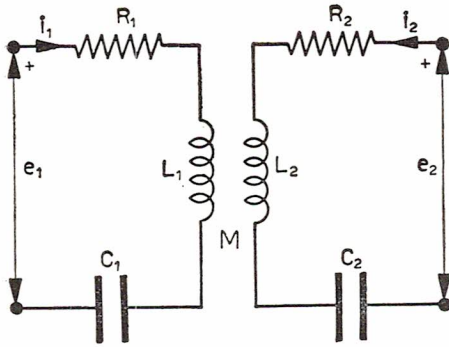



Fig. 5.514-2

5.514-7 $$e_1 - M\frac{di_2}{dt} = Ri_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt\,,$$

e analogamente per il circuito secondario[3]:

5.514-7′ $$e_2 - M\frac{di_1}{dt} = Ri_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt\,;$$

oppure, con notazione simbolica (legge di Ohm generalizzata in forma simbolica), per il circuito primario:

5.514-8 $$\overline{E}_1 - j\,\omega M\overline{I}_2 = \overline{Z}_1\overline{I}_1\,,$$

e così analogamente per il circuito secondario:

5.514-8′ $$\overline{E}_2 - j\,\omega M\overline{I}_1 = \overline{Z}_2\overline{I}_2\,.$$

Si noti che il termine del tipo $j\,\omega M\overline{I}$ rappresenta una forza contro-elettromotrice ($\overline{E}_{oc}$): per questo motivo le equazioni del tipo 5.514-8 sono una chiara applicazione dell'espressione data in 5.55-2 a proposito del criterio generale per la soluzione dei circuiti in regime sinusoidale.

Esercizio 5.5141

Un tronco di circuito è costituito (vedi fig. 5.5141-1) da due rami ohmico-induttivi in parallelo, fra i quali esiste però un accoppiamento mutuo induttivo (con M positivo). Noti tutti i parametri del circuito e nota la tensione ai capi del tronco ($E = 100$ volt, $\omega = 314$ rad/sec), si trovino i valori in modulo ed argomento delle tre correnti $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}$.

Si tracci alla fine, per controllo, il relativo diagramma vettoriale.

---

[3] Anche la *f.e.m.* e_2 si suppone dovuta all'azione di un generatore di tensione.

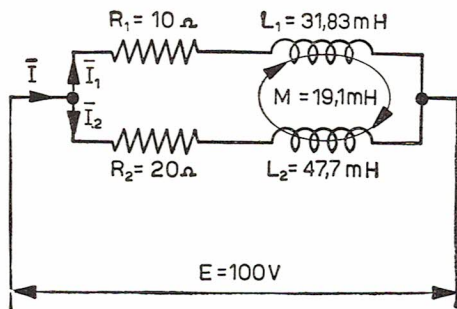



Fig. 5.5141-1

Soluzione

Si scriva la legge di Ohm per ciascun ramo. Poiché il coefficiente di mutua induzione M è positivo, risulta allora:

$$\overline{E} = (R_1 + j\,\omega L_1)\overline{I}_1 + j\,\omega M \overline{I}_2\,,$$

$$\overline{E} = (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + j\,\omega M \overline{I}_1\,.$$

D'altronde le reattanze in gioco valgono:

$$\omega L_1 = 10\ \Omega\,, \quad \omega L_2 = 15\ \Omega\,, \quad \omega M = 6\ \Omega\,.$$

Passando perciò ai numeri, le due equazioni scritte sopra diventano, ponendo la tensione $\overline{E}$ sull'asse reale,

$$(10 + j\,10)\,\overline{I}_1 + j\,6\,\overline{I}_2 = 100$$

$$(20 + j\,15)\,\overline{I}_2 + j\,6\,\overline{I}_1 = 100\,.$$

La soluzione è semplice. Si ricavi ad esempio la corrente $\overline{I}_2$ dalla seconda equazione:

$$\overline{I}_2 = \frac{100 - j\,6\,\overline{I}_1}{20 + j\,15}$$

e la si sostituisca nella prima. Si otterrà così la seguente equazione:

$$(10 + j\,10)\,\overline{I}_1 + \frac{36\,\overline{I}_1 + j\,600}{20 + j\,15} = 100\,,$$

dalla quale, sviluppando e semplificando, si ricaverà:

$$\overline{I}_1 = 3{,}77 - j\,4{,}82 = 6{,}11\,\underline{|-51^{\circ}\,58'}\,.$$

Sostituendo ora questi dati trovati per $\bar{I}_1$ nell'espressione della corrente $\bar{I}_2$, si otterrà facilmente che:

$$\bar{I}_2 = \frac{100 - j\,6\,(3{,}77 - j\,4{,}82)}{20 + j\,15} = 1{,}73 - j\,2{,}43 = 2{,}98 \underline{|-54^0\,34'}\,.$$

Pertanto la corrente $\bar{I}$ assorbita dal tronco dato ammonterà a:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 5{,}50 - j\,7{,}25 = 9{,}1 \underline{|-52^0\,46'}\,.$$

Il diagramma vettoriale di controllo è stato riportato in fig. 5.5141-2.

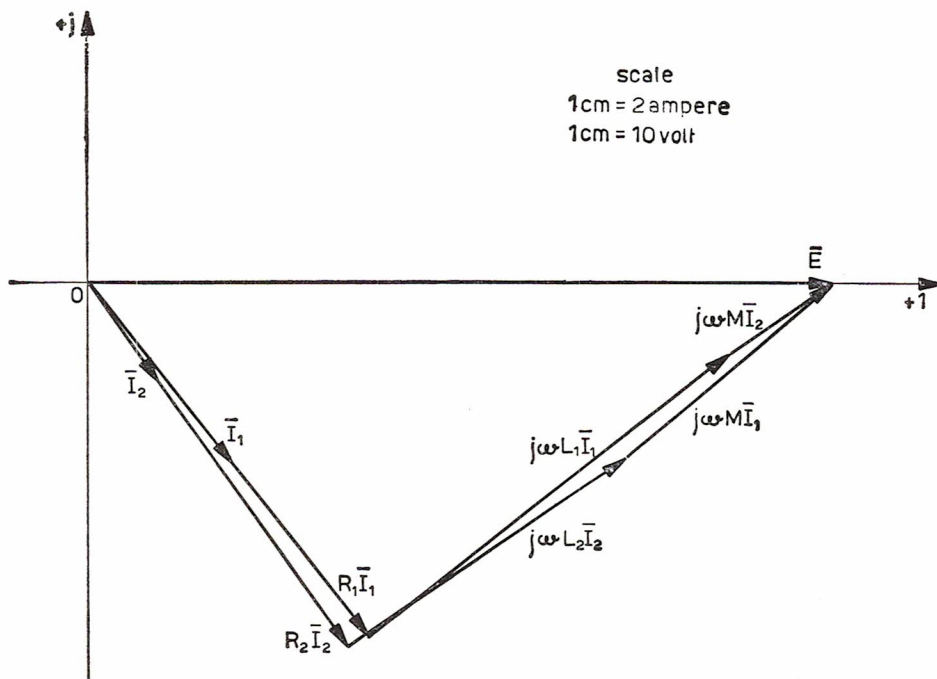



Fig. 5.5141-2

Si tratta in sostanza di verificare se i dati trovati per le due correnti $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ soddisfano le due equazioni di partenza.

5.515 Principio di funzionamento del trasformatore

Si definisce trasformatore quel dispositivo costituito da due circuiti elettrici che si concatenano con un circuito magnetico. I due circuiti elettrici sono di solito realizzati per mezzo di avvolgimenti (bobine) tali da concatenarsi nel miglior modo con il circuito magnetico (nucleo)

(fig. 5.515-1). Si noti che all'avvolgimento destinato ad essere collegato con il generatore viene dato il nome di *primario*; mentre all'altro avvolgimento, destinato ad essere collegato al carico (utilizzatore), si dà il nome di *secondario*.

Caratteristica fondamentale del trasformatore è quella di determinare un trasferimento di potenza elettrica (attiva e reattiva) fra i due circuiti elettrici: quindi, poiché l'avvolgimento primario è quello alimentato dal generatore, dal primario al secondario. Ma il trasformatore consente nello stesso tempo di poter variare, a seconda delle esi-

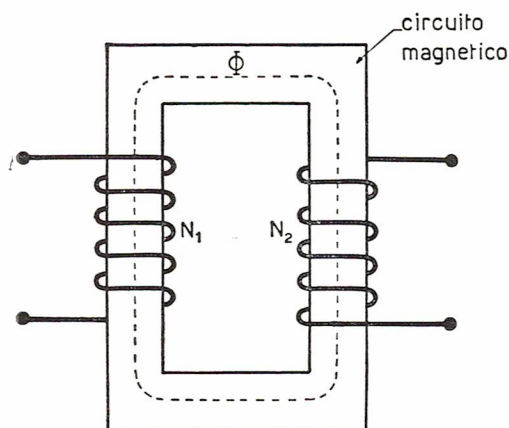



Fig. 5.515-1

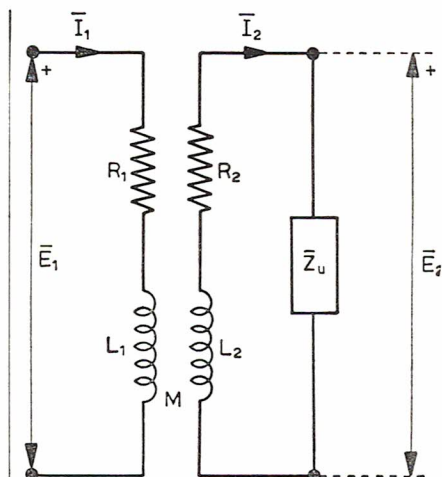



Fig. 5.515-2

genze pratiche, i valori della tensione e della corrente al secondario, parametri questi ultimi che definiscono d'altronde la sua potenza elettrica; inoltre, poiché i due avvolgimenti sono elettricamente distinti, cioè isolati fra di loro in quanto il loro accoppiamento è solo magnetico, l'apparecchiatura consentirà di separare elettricamente i circuiti che vi fanno capo.

Lo studio del trasformatore, il quale rappresenta in sostanza l'applicazione pratica del fenomeno della mutua induzione, verrà impostato ora nella maniera più semplice. Per una trattazione più estesa si rimanda al volume dedicato alle macchine elettriche.

Si abbia dunque un trasformatore costituito da un nucleo sul quale si trovino i due avvolgimenti. È ovvio che ciascun avvolgimento, indipendentemente dall'altro, presenterà una resistenza ed una induttanza, che indicheremo rispettivamente con R_1 ed L_1 per quello primario e con R_2 ed L_2 per quello secondario. Poiché d'altra parte fra i due avvolgimenti, primario e secondario, vi è un accoppiamento magnetico, in quanto i due avvolgimenti sono fra di loro concatenati per mezzo delle linee di flusso magnetico che si chiudono nel nucleo, si dovrà tener conto di un coefficiente di mutua induzione M, che per ipotesi supporremo positivo.

Il circuito elettrico del trasformatore potrà dunque essere schematizzato come in fig. 5.515-2. Con riferimento ad esso si potranno scrivere le seguenti equazioni (legge di Ohm):

5.515-1 $\overline{E}_1 = (R_1 + j\,\omega L_1)\,\overline{I}_1 + j\,\omega M\overline{I}_2$ circuito primario,

5.515-2 $0 = \overline{Z}_u\overline{I}_2 + (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + j\,\omega M\overline{I}_1$ circuito secondario;

dove $\overline{E}_1$ rappresenta la tensione di alimentazione sinusoidale e di pulsazione ω, mentre $\overline{Z}_u$ rappresenta l'impedenza equivalente del carico (utilizzatore) sul quale risulta chiuso il secondario del trasformatore.

Si può naturalmente osservare che ai capi del secondario, caricato dall'impedenza $\overline{Z}_u$, apparirà pure una tensione, indicata con $\overline{E}_2$ (1), esprimibile con la semplice relazione:

5.515-3 $$\overline{E}_2 = \overline{Z}_u\overline{I}_2\,;$$

per cui ovviamente l'equazione 5.514-2 assumerà anche l'espressione:

5.515-4 $$-\overline{E}_2 = (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + j\,\omega M\overline{I}_1\,.$$

Si esamineranno ora quali sono le caratteristiche del trasformatore nelle tre classiche condizioni di funzionamento e cioè: a vuoto, in corto circuito e a carico normale.

Funzionamento a vuoto

Il trasformatore funziona a vuoto quando i morsetti dell'avvolgimento secondario risultano aperti ($Z_u = \infty$), per cui la corrente al secondario è nulla ($I_2 = 0$). Con questa condizione le equazioni fondamentali del trasformatore (eqq. 5.515-1 e 4) diventano assai semplicemente:

5.515-5 $$\overline{E}_1 = (R_1 + j\,\omega L_1)\overline{I}_1\,,$$

5.515-6 $$\overline{E}_2 = \quad -j\,\omega M\overline{I}_1\,.$$

Il diagramma vettoriale del trasformatore funzionante a vuoto si traccerà assai facilmente (fig. 5.515-3) una volta posta la tensione di alimentazione $\overline{E}_1$ sull'asse reale (2). Infatti la corrente $\overline{I}_1$ risulta sfasata in

---

(1) Col simbolo E_2 si indica comunque la tensione ai capi dell'avvolgimento secondario, che in questo caso è anche la tensione ai capi del carico.

(2) Si suppone nota appunto la tensione di alimentazione.

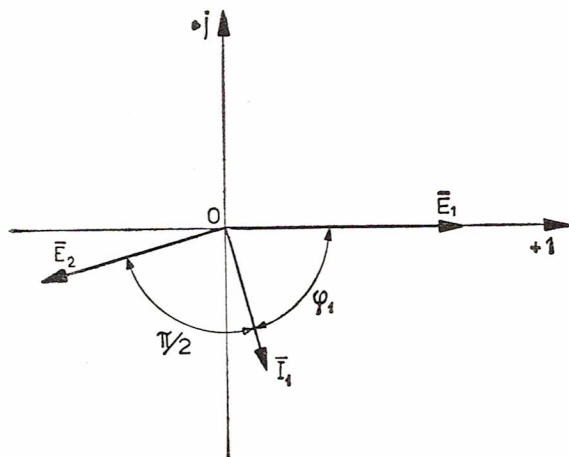



Fig. 5.513.3

ritardo di un angolo φ_1 (3) $\left(\text{tg } \varphi_1 = -\frac{\omega L_1}{R_1}\right)$ sulla tensione $\bar{E}_1$, mentre la tensione secondaria $\bar{E}_2$ risulterà in quadratura in ritardo (eq. 5.515-6) rispetto alla stessa corrente $\bar{I}_1$.

Dalle equazioni 5.515-5 e 6 si ottiene inoltre, facendone il rapporto, l' importante relazione:

5.515-7
$$\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1} = -\frac{j\,\omega M}{R_1 + j\,\omega L_1},$$

la quale, nel caso in cui sia ad esempio soddisfatta la condizione $R_1 << \omega L_1$, che si verifica in pratica per i trasformatori aventi il nucleo interamente in ferro, diventa $\bar{E}_2 \cong -\frac{M}{L_1}\bar{E}_1$ (4), dimostrando così come per un trasformatore (in ferro) nelle condizioni di funzionamento a vuoto la tensione secondaria sia praticamente in opposizione di fase con quella primaria (coefficiente M positivo, trasformatore invertitore di fase).

Ricavando invece dalla 5.515-7 il modulo della tensione secondaria in funzione di quella primaria, si ottiene la seguente relazione:

---

(3) Se il nucleo è interamente in ferro φ_1 non differisce molto da 90°, poiché $\omega L_1 >> R_1$.

(4) Ricordando che in questo caso $M \cong \frac{N_2}{N_1} L_1$, ove N_1 ed N_2 sono il numero di spire dell'avvolgimento primario e secondario, si ha anche fra i moduli delle tensioni primaria e secondaria la seguente importantissima relazione: $\frac{E_1}{E_2} \cong \frac{N_1}{N_2}$, valida solamente per i trasformatori con nucleo in ferro.

5.515-8
$$E_2 = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} E_1 ,$$

dalla quale si deduce che, fissate le caratteristiche dell'avvolgimento primario (R_1, L_1), il valore della tensione al secondario risulta direttamente proporzionale al valore di M. Ma questo è esprimibile, tramite il coefficiente K di accoppiamento, dalla formula $M = K \sqrt{L_1 L_2}$. Pertanto, fissate anche le caratteristiche dell'avvolgimento secondario (R_2, L_2) il valore di M sarà il più elevato possibile solo se il valore del coefficiente di accoppiamento risulterà molto prossimo ad 1. Questo caso, che in pratica si realizza con circuiti magnetici di bassa riluttanza (nuclei costruiti con materiali ferromagnetici senza traferro) ed avvolgimenti razionalmente disposti, determinerà al secondario la massima tensione possibile.

Funzionamento in cortocircuito

Il trasformatore funziona in cortocircuito quando i morsetti al secondario sono fra di loro uniti con un collegamento avente praticamente impedenza trascurabile ($\overline{Z}_u = 0$). In queste condizioni naturalmente non vi può essere tensione al secondario ($E_2 = 0$). Pertanto le equazioni fondamentali del trasformatore diventano le seguenti :

5.515-9
$$\overline{E}_1 = (R_1 + j\,\omega L_1)\overline{I}_1 + j\,\omega M \overline{I}_2 ,$$

5.515-10
$$0 = (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + j\,\omega M \overline{I}_1 .$$

Con queste due equazioni è ad esempio possibile costruire il diagramma vettoriale del trasformatore funzionante in cortocircuito. Supponendo infatti nota la corrente di cortocircuito al secondario $\overline{I}_2$ (ciò per facilità di costruzione del diagramma), e posta tale corrente sull'asse reale (vedi fig. 5.515-4), la corrente primaria $\overline{I}_1$ $\left(\overline{I}_1 = - \frac{R_2 + j\,\omega L_2}{j\omega M} \overline{I}_2\right)$ risulterà sfasata in anticipo rispetto ad $\overline{I}_2$ di un angolo ν compreso fra 90° e 180° (è infatti circa 180° nel caso del trasformatore con nucleo in ferro per il quale sia valida la condizione $R_2 << \omega L_2$).

Si potrà così trovare il vettore $\overline{E}_1$ come somma (equazione 5.515-9) dei due vettori $(R_1 + j\,\omega L_1)\overline{I}_1$ ed $j\,\omega M \overline{I}_2$. Il diagramma vettoriale risulta perciò completamente tracciato.

Dall'equazione 5.515-10, nel caso in cui sia soddisfatta la condizione $R_2 << \omega L_2$ (verificata come si è detto dai trasformatori aventi il nucleo in ferro senza traferri), si ricava che :

5.515-11
$$\frac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2} = - \frac{L_2}{M} ,$$

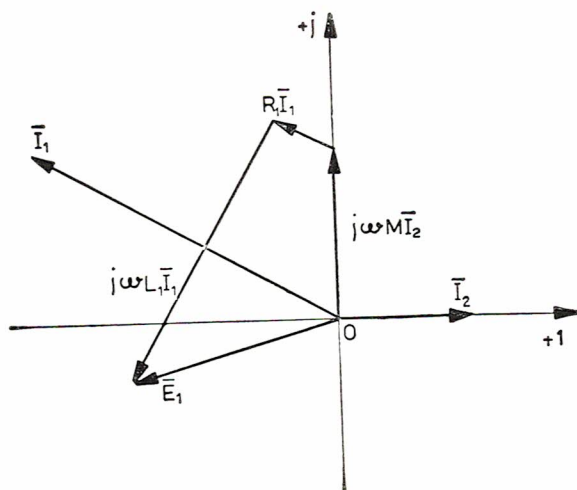



Fig. 5.515-4

cioè che le due correnti sono praticamente in opposizione di fase. Il loro rapporto, poiché d'altronde si può porre $M \cong \frac{N_1}{N_2} L_2$, assume in questo caso, di trasformatore con nucleo in ferro, la seguente semplice relazione, assai importante però nella pratica:

5.515-12
$$\frac{I_1}{I_2} \cong \frac{N_2}{N_1}.$$

FUNZIONAMENTO A CARICO

Si ha funzionamento a carico quando il secondario del trasformatore è chiuso su di un'impedenza $\overline{Z}_u$ (utilizzatore) di valore né troppo grande né troppo piccolo rispetto a quello dell'impedenza *equivalente* del trasformatore. Naturalmente ora, oltre alle caratteristiche di quest'ultimo, si supporranno note quelle del carico (ad esempio carico induttivo $\overline{Z}_u = R_u + jX_u$).

In questo caso di trasformatore a carico, le equazioni fondamentali restano quelle date in 5.515-1 e 2, e il problema consisterà in generale nel trovare la corrente al secondario $\overline{I}_2$ nota la tensione applicata al primario $\overline{E}_1$, oppure viceversa nel trovare quale valore dovrà avere la tensione di alimentazione $\overline{E}_1$ affinché nel carico circoli un prefissato valore di corrente I_2 (possibile si intende). Benché il primo caso sia quello più comune, qui ci si riferirà al secondo caso, perché esso permette di costruire assai facilmente il relativo diagramma vettoriale.

Infatti supposta nota la corrente $\overline{I}_2$, il cui vettore nel diagramma vet-

toriale di fig. 5.515-5 verrà posto perciò sull'asse reale, dall'equazione 5.515-2 si ricaverà subito l'espressione della corrente primaria:

5.515-13
$$\overline{I}_1 = \frac{-(\omega L_2 + X_u) + j(R_2 + R_u)}{\omega M} \overline{I}_2 .$$

Sul diagramma vettoriale la posizione del vettore $\overline{I}_1$ sarà facilmente individuata dopo aver tracciato la somma dei vettori che interpretano

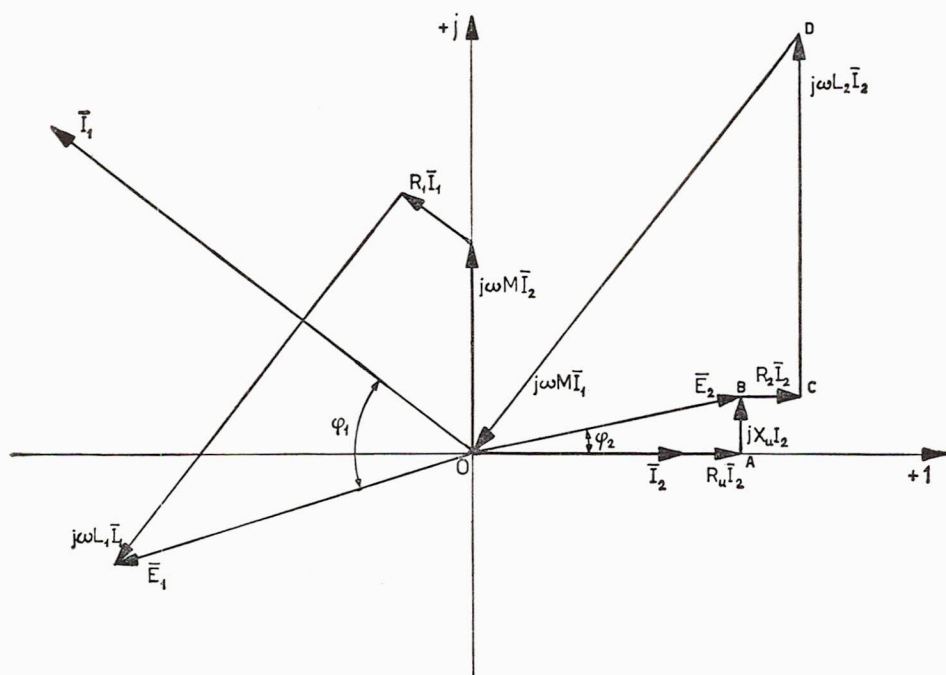



Fig. 5.515.5

l'equazione 5.515-2 (poligonale $OABCDO$). Naturalmente il vettore $\overline{I}_1$ risulterà in quadratura ritardo rispetto al vettore $j\omega M I_1$, lato di chiusura della suddetta poligonale.

Noti così modulo ed argomento della corrente $\overline{I}_1$ (per la formula 5.515-13 o per la costruzione del diagramma vettoriale), dall'equazione 5.515-1 si ricaverà facilmente ora il valore della tensione $\overline{E}_1$ da applicare al primario affinché al secondario, chiuso sulla impedenza $\overline{Z}_u$, scorra la corrente $\overline{I}_2$ prefissata. Nel diagramma vettoriale, il vettore tensione $\overline{E}_1$ risulterà perciò dalla somma dei due vettori $(R_1 + j\omega L_1)\overline{I}_1$ ed $j\omega M\overline{I}_2$.

Esercizio 5.5151

Calcolare modulo ed argomento della corrente primaria e seconda-

ria di un trasformatore in cortocircuito, alimentato con una tensione sinusoidale $E_1 = 10$ volt, di pulsazione $\omega = 2000$ rad/sec, e le cui caratteristiche appaiono in fig. 5.5151-1.

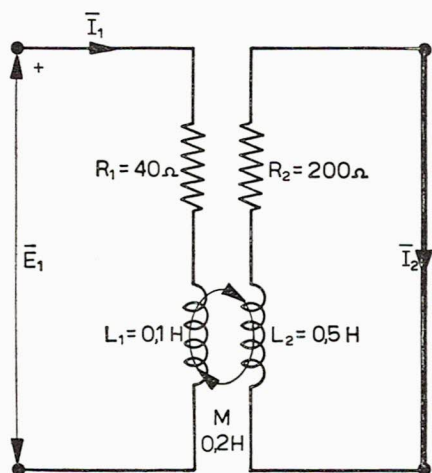



Fig. 5.5151-1

Soluzione

Si scriva la legge di Ohm rispettivamente per il circuito primario e secondario. Si ha così il sistema di equazioni:

$$\overline{E}_1 = (R_1 + j\,\omega L_1)\overline{I}_1 + j\,\omega M \overline{I}_2\,,$$

$$0 = (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + j\,\omega M \overline{I}_1\,.$$

Passando ai numeri, ponendo la tensione $\overline{E}_1$ sull'asse reale ($\overline{E}_1 = 10 + j\,0$) e ricordando che nel nostro caso risulta: $\omega L_1 = 200\ \Omega$, $\omega L_2 = 1000\ \Omega$, $\omega M = 400\ \Omega$, il sistema diventa:

$$(40 \quad + j\,200)\ \overline{I}_1 + j\,400\,\overline{I}_2 = 10$$

$$(200 + j\,1000)\,\overline{I}_2 + j\,400\,\overline{I}_1 = 0\,.$$

La risoluzione è semplice. Si ricavi ad esempio la corrente $\overline{I}_2$ dalla seconda equazione:

$$\overline{I}_2 = \frac{-j\,400}{200 + j\,1000}\,\overline{I}_1$$

e la si sostituisca nella prima equazione. Si otterrà:

$$(40 + j\,200)\,\overline{I}_1 + j\,400\,\frac{-j\,400}{200 + j\,1000}\,\overline{I}_1 = 10\,,$$

dalla quale, dopo aver sviluppato e semplificato, si ricaverà per la corrente $\overline{I}_1$ i seguenti dati:

$$\overline{I}_1 = 0{,}0994 - j\,0{,}0645 = 0{,}118 \;\underline{|-33^0}.$$

La corrente primaria ammonta dunque a 118 mA e ritarda sulla tensione di alimentazione di 33°.

Sostituendo i risultati ora trovati nell'espressione più sopra ricavata, che lega la corrente secondaria a quella primaria, si avrà:

$$\overline{I}_2 = \frac{-j\,400}{200 + j\,1000}(0{,}0994 - j\,0{,}0645) = -0{,}0432 + j\,0{,}0172 =$$
$$= 0{,}0464 \;\underline{|158^0\;17'}$$

La corrente secondaria ammonta quindi a 46,4 mA ed anticipa sulla tensione $\overline{E}_1$ di 158° 16′.

Lo sfasamento fra le due correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$, inteso come angolo di ritardo di $\overline{I}_2$ rispetto ad $\overline{I}_1$, vale 168° 43′.

Allo scopo di controllare i risultati ottenuti, in fig. 5.5151-2 è stato riportato il diagramma vettoriale che interpreta l'equazione del circuito primario del trasformatore assegnato.

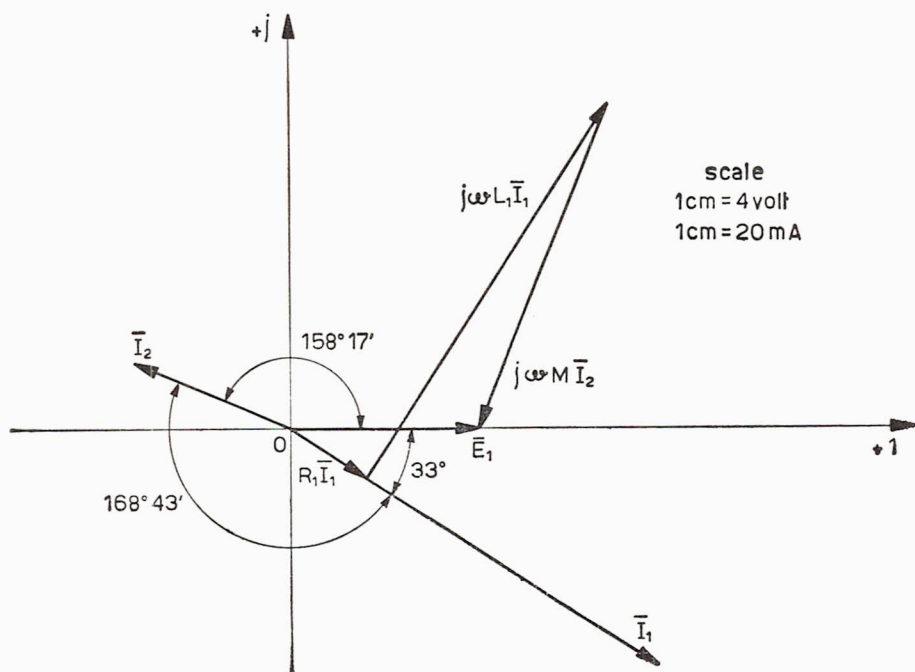



Fig. 5.5151-2

5.516 Effetto pelle

La distribuzione della densità di corrente in una sezione di un conduttore omogeneo rettilineo, percorso da corrente, cessa di essere uniforme quando si passa dal regime di corrente continua a quello variabile, in particolare a quello alternativo. La causa di questo fatto va ricercata, poiché si manifesta appunto in regime variabile, al differente valore delle forze elettromotrici di autoinduzione che nascono nel conduttore per effetto del campo magnetico variabile generato dalla stessa corrente.

Si consideri un conduttore cilindrico omogeneo massiccio. Questo si potrà pensare costituito da tanti filetti conduttori di eguale sezione, però di valore molto piccolo, affiancati fra di loro (fig. 5.516-1). Ora,

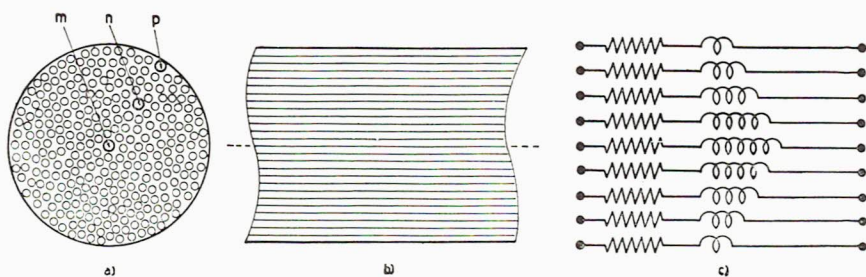



Fig. 5.516-1

mentre la resistenza per unità di lunghezza di ciascun filetto conduttore sarà indipendente dalla posizione occupata nella sezione dal filetto stesso, non così sarà per la sua reattanza. Infatti con i filetti più interni, ad esempio come quello indicato con la lettera m nella fig. 5.516-1, si concatenerà un flusso magnetico maggiore di quello che si viene a concatenare con i filetti più esterni, ad esempio come quello indicato con la lettera n. Il flusso concatenato col filetto n a sua volta sarà maggiore di quello del filetto p. Poiché l'induttanza dei conduttori è direttamente proporzionale al flusso concatenato si avrà che l' induttanza presentata dall' unità di lunghezza di filetto conduttore verrà ad essere tanto maggiore quanto più interno risulterà lo stesso filetto.

Un conduttore rettilineo e massiccio si potrà dunque concepire come un circuito formato da un fascio di filetti rettilinei conduttori indipendenti fra di loro, ma uniti in parallelo alle due estremità, ed aventi ciascuno impedenza crescente a mano a mano che si procede dall'esterno verso l' interno. Poiché d'altronde ai capi del fascio di filetti (conduttore) sarà applicata una ben definita differenza di potenziale, uguale quindi per ciascun filetto, si avrà che nei filetti più interni circolerà una corrente di valore minore e maggiormente sfasata rispetto a quella che circolerà nei filetti più esterni. È questo il fenomeno che determina la riduzione della densità di corrente nella sezione procedendo dall'esterno (pelle) all' interno (cuore), cioè che determina appunto la disuniformità di densità di corrente di cui si era detto all' inizio di questo paragrafo.

Nel caso particolare, ma assai diffuso, in cui la sezione del conduttore sia circolare, si potrà affermare che i vari filetti conduttori posti alla stessa distanza dal centro del conduttore presenteranno la stessa induttanza, quindi la stessa impedenza, cioè in definitiva la stessa densità di corrente. Questa andrà perciò diradandosi con simmetria circolare nelle zone più interne del conduttore (vedi fig. 5.516-2*a*) (1).

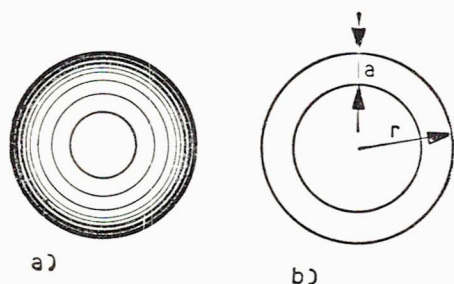



Fig. 5.516-2

A questo proposito è utile ricercare il valore dello spessore che dovrebbe avere quella particolare corona circolare più esterna (raggio esterno = raggio del conduttore) (fig. 5.516-2*b*) affinché possa avere la stessa resistenza elettrica presentata dal conduttore massiccio qualora essa fosse percorsa da una corrente avente distribuzione uniforme e della stessa frequenza. Tale spessore viene definito *penetrazione* ed indicato col simbolo *a*. La sua espressione analitica è la seguente:

5.516-1 $$a = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\,\omega}}\ (2).$$

Da questa formula si vede che la penetrazione a diventa tanto più piccola, cioè l'effetto pelle risulta tanto più sentito, quanto più μ ed ω sono grandi e ρ piccolo. Ciò è ovvio, poiché l'effetto pelle è tanto più manifesto quanto più la reattanza di ciascun filetto conduttore, che dipende dalla permeabilità del materiale (μ) e dalla pulsazione (ω), sarà grande rispetto alla resistenza che dipende invece dalla resistività del materiale (ρ). Si osservi che se il materiale avesse resistività zero (materiale conduttore perfetto) la corrente scorrerebbe tutta in superficie.

Si noti che l'interesse per il fenomeno dell'effetto pelle è dovuto

---

(1) Precisamente la densità di corrente diminuisce procedendo dall'esterno verso l'interno con la seguente legge esponenziale decrescente $\sigma_x = \sigma_0 \varepsilon^{-x/a}$, intendendo con σ_0 la densità che si ha sulla superficie esterna e con σ_x la densità all'interno, a distanza x dalla superficie esterna; il coefficiente a è invece la cosiddetta *penetrazione* di cui si dirà tra breve.

(2) Per il rame a 20 °C la formula 5.516-1 diventa $a_{mm} = \frac{66}{\sqrt{f}}$ dalla quale si deduce che la penetrazione a vale 9,3 mm alla frequenza di 50 Hz, 2,1 mm a 1000 Hz, 66 micron ad 1 MHz, ecc..

esclusivamente al fatto che esso spiega la causa delle maggiori perdite nei conduttori soggetti ad un regime elettrico variabile. Un conduttore qualsiasi infatti, quando è percorso da corrente alternata, presenta, oltre alle perdite per effetto Joule calcolabili con la formula $P = RI^2$, ove R è la resistenza in corrente continua, altre perdite dovute appunto alla non uniforme distribuzione di corrente nella sezione del conduttore (perdite per effetto pelle). Si dimostra a tale proposito che in un conduttore, a parità di valore efficace della corrente ivi circolante, le perdite totali per effetto Joule sono tanto più grandi quanto maggiore risulta la disuniformità della corrente nel conduttore stesso.

La conclusione è dunque questa : a causa dell'effetto pelle un conduttore verrà a presentare in corrente alternata un valore di resistenza (detto resistenza in corrente alternata) più elevato di quello presentato in corrente continua e questo divario sarà tanto più forte quanto più la penetrazione a sarà piccola rispetto al raggio del conduttore [3]. Infatti, quando $a >> r$, l'effetto pelle sarà del tutto trascurabile. Quanto ora è stato detto si riferisce ad un conduttore omogeneo rettilineo di lunghezza infinita avente sezione circolare, ma il fenomeno si manifesterà ovviamente qualunque sarà la forma del conduttore.

Un caso particolare si ha quando il conduttore, pur essendo omogeneo e a sezione circolare, non è rettilineo ma ad esempio ad elica, come avviene per gli avvolgimenti delle bobine. In questa evenienza il conduttore è soggetto anche al cosiddetto *effetto di prossimità* poiché la distribuzione della densità di corrente non risulta più la stessa per filetti conduttori equidistanti dal centro. Nel caso del conduttore ad elica si dimostra infatti che si ha un maggiore addensamento di corrente per i punti della sezione più vicini all'asse dell'elica (vedi figura 5.516-3). Ciò è causato dal campo magnetico dovuto alle spire vicine,

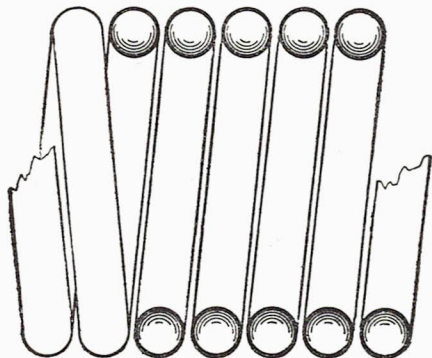



Fig. 5.516-3

---

[3] Esiste una formula assai comoda che lega il valore della resistenza $R_{c.a.}$ di un conduttore in corrente alternata a quella $R_{c.c.}$ in corrente continua ; essa è precisamente :

$$R_{c.a.} = R_{c.c.}\left[1 + \frac{1}{48}\left(\frac{r}{a}\right)^4\right],$$

valida purché $a/r > 1$ (r raggio del conduttore).

il quale ora altera la distribuzione di quelle forze elettromotrici di autoinduzione che si avevano nel caso di conduttore rettilineo. A causa di questa maggiore disuniformità le perdite per effetto Joule saranno ancora maggiori. Quindi, a parità di lunghezza, la resistenza in corrente alternata di un conduttore avvolto ad elica risulterà maggiore dello stesso conduttore rettilineo.

Esercizio 5.5161

Un conduttore rettilineo di rame argentato avente sezione circolare (caratteristiche dell'argento : $\rho_{0^0C} = 1{,}5\ \mu\Omega\cdot cm$; $\mu = 1{,}256\cdot 10^{-6}$ H/m ; $\alpha = 0{,}004$) deve funzionare alla temperatura di 50 °C e alla frequenza di 400 MHz. Si trovi lo spessore dell'argentatura affinché la conduzione sia dovuta praticamente al solo argento.

Soluzione

La conduzione avverrà nel solo argento quando nello strato più interno dell'argentatura il valore assunto dalla densità di corrente risulterà pressoché nullo : ciò avverrà praticamente quando questa densità di corrente σ_s si sarà ridotta ad un millesimo di quella superficiale σ_0. È come dire allora che :

$$\sigma_s = 0{,}001\ \sigma_0\,,$$

per cui lo spessore s dell'argentatura dovrà soddisfare la seguente condizione dedotta dalla nota 1 del § 5.516 :

$$\varepsilon^{-s/a} = 0{,}001\,,$$

dalla quale, applicando i logaritmi, si ricava per il rapporto s/a il valore di 6,9.

D'altronde la penetrazione a si calcolerà facilmente mediante la formula 5.516-1 del testo, ove però la resistività ρ dovrà essere riferita alla temperatura di 50 °C [la permeabilità magnetica varia inapprezzabilmente con la temperatura [1]]. Questa resistività, ricordando che $1{,}5\ \mu\Omega\cdot cm = 1{,}5\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot m$, ammonta a :

$$\rho_{50^0} = \rho_{0^0}\,(1 + \alpha t) = 1{,}5\cdot 10^{-8}\ (1 + 0{,}004\cdot 50) = 1{,}8\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot m\,;$$

perciò :

$$a = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\,\omega}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}8\cdot 10^{-8}}{1{,}256\cdot 10^{-6}\cdot 6{,}28\cdot 400\cdot 10^{6}}} = 3{,}38\cdot 10^{-6}\ m\,.$$

---

(1) Caratteristica questa delle sostanze dia e paramagnetiche.

Lo spessore dell'argentatura dovrà dunque essere, per quanto trovato precedentemente, 6,9 volte il valore della penetrazione a, cioè in definitiva :

$$s = 6{,}9 \cdot 3{,}38 \cdot 10^{-6} \cong 23 \text{ micron} .$$

Esercizio 5.5162

Un resistore è stato realizzato mediante un filo di manganina del diametro di 0,2 millimetri (caratteristica della manganina : $\rho = 5 \cdot 10^{-7}$ $\Omega \cdot$m, $\mu = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ H/m). Trascurando l'effetto di prossimità si trovi per quale valore di frequenza la resistenza presentata dal resistore aumenta dell' 1 % a causa dell'effetto pelle.

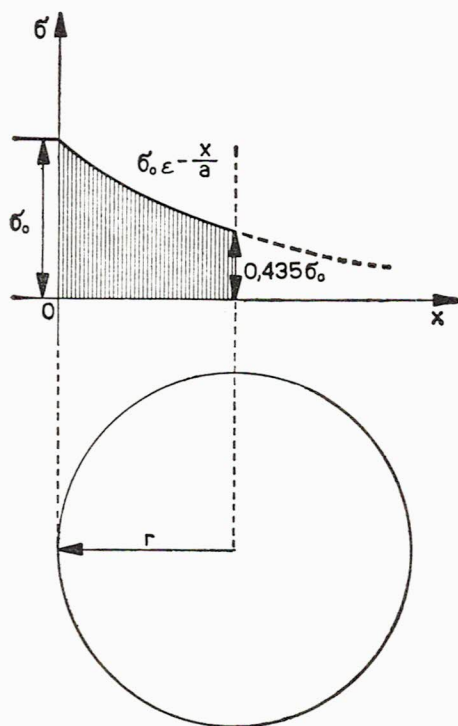



Fig. 5.5162-1

Soluzione

Dalla formula riportata nella nota 3 del § 5.516 si può ricavare il valore del rapporto r/a, poiché nel nostro caso è stato imposto che, alla frequenza incognita f, $R_{c.a.}/R_{c.c.} = 1 + 0{,}01$.

Perciò :

$$\frac{1}{48}\left(\frac{r}{a}\right)^4 = 0,01\,,$$

cioè anche :

$$\frac{a}{r} = \sqrt[4]{\frac{100}{48}} = 1,2\,,$$

da cui :

$$a = 1,2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ metri}\,.$$

Noto così il valore di a, sarà possibile ricavare, avvalendosi della formula della penetrazione riportata in 5.516-1, quel particolare valore di frequenza f che determina l'aumento dell'1 %. Sarà dunque :

$$f = \frac{2\rho}{2\pi\mu a^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6,28 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 1,44 \cdot 10^{-8}} = 8,85 \text{ MHz}\,.$$

Per la distribuzione nella sezione della densità di corrente a tale frequenza si veda la fig. 5.5162-1.

5.517 Induttori lineari

Si definisce induttore quel componente circuitale (bipolo) che realizza in maniera pratica il parametro induttanza. Questo componente, chiamato correntemente *bobina*, presenta dunque la peculiare proprietà di essere sede di un importante fenomeno energetico conservativo, conseguenza dell'energia elettromagnetica connessa coll'induttanza ; tuttavia esso presenta anche la caratteristica di dar luogo ad una certa dissipazione d'energia quando viene percorso da corrente. Quest'ultimo fatto è dovuto alla resistenza ohmica ($R_{c.a.}$) del conduttore costituente l'avvolgimento della bobina e alle perdite dielettriche nei materiali isolanti sempre necessari per realizzare una bobina.

La schematizzazione di un induttore dovrà dunque essere fatta tenendo conto dei fenomeni energetici essenziali sopra citati e cioè, si veda la fig. 5.517-1*a*, con una reattanza (X_L terrà conto di tutti i fenomeni conservativi) in serie ad una resistenza (R_s terrà conto di tutti i fenomeni dissipativi).

Si dirà poi che l'induttore è lineare quando i suoi parametri non dipenderanno dal particolare valore presentato dalla corrente che vi circola. Una bobina è lineare in pratica quando le sue linee di flusso magnetico si sviluppano in un mezzo avente permeabilità magnetica costante, come avviene per tutte le bobine *in aria*.

Un parametro assai importante per gli induttori funzionanti in corrente alternata è costituito dal cosiddetto *fattore di merito* [1] : esso

---

[1] Detto anche *coefficiente di bontà*.

serve appunto a caratterizzare la bontà di una bobina ad una certa frequenza f, confrontando il valore assunto dalla reattanza con quello della resistenza, valori entrambi calcolati o misurati alla stessa frequenza f. Ora è chiaro che un induttore sarà tanto più buono quanto più alta risulterà essere la sua reattanza rispetto alla sua resistenza: in tal modo infatti l'angolo di sfasamento si avvicinerà di più al valore di 90^0 (questo è il valore limite presentato da un induttore perfetto e quindi non raggiungibile in pratica).

Il coefficiente di merito di una bobina, indicato di solito con la lettera Q, sarà quindi individuato, per quanto è stato esposto più sopra, dal seguente rapporto:

5.517-1
$$Q = \frac{\omega L}{R_s} .$$

Questo rapporto rappresenta naturalmente anche la tangente dell'angolo φ di sfasamento fra la corrente $\bar{I}$ assorbita dall'induttore e la tensione $\bar{E}$ applicatavi. Infatti, moltiplicando ambo i membri del rapporto

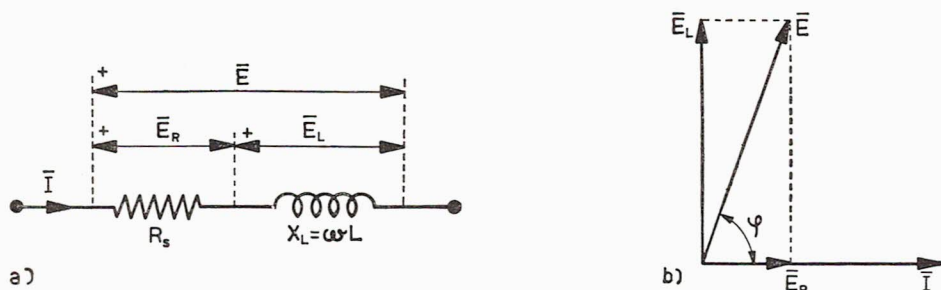



Fig. 5.517-1

dato in 5.517-1 per la corrente I, si ottiene (vedi diagramma vettoriale di fig. 5.517-1*b*):

5.517-2
$$Q = \frac{\omega L I}{R_s I} = \frac{E_L}{E_R} = \mathrm{tg}\varphi ;$$

mentre, moltiplicando entrambi i membri del rapporto dato in 5.517-1 per il quadrato della corrente, si ottiene che il fattore di merito risulta definito invece come rapporto fra la potenza reattiva impegnata dalla bobina e la potenza attiva dissipata, precisamente:

5.517-3
$$Q = \frac{\omega L I^2}{R_s I^2} = \frac{\text{Potenza reattiva}}{\text{Potenza attiva}} .$$

Le formule 5.517-1, 2, 3 rappresentano modi diversi per definire dunque lo stesso fattore di merito.

È importante notare ai fini applicativi che il fattore di merito di una bobina risulta, salvo un certo intervallo di frequenza, fortemente influenzato dal valore assunto dalla frequenza di lavoro. Per questo motivo, molte volte, è di grande importanza conoscere la curva che dà l'andamento del fattore di merito della bobina in funzione della frequenza (vedi ad esempio fig. 5.517-2).

D'altronde l'andamento di questa curva si presenta abbastanza simile per tutti gli induttori poiché : *a*) per frequenza di valore zero la bobina ha un fattore di merito nullo essendo nulla la sua reattanza ; *b*) per valori di frequenza bassi (compresi fra zero ed f_1 di fig. 5.517-2) il fattore di merito cresce linearmente con la frequenza stessa, poiché le perdite e l' induttanza si possono ritenere non dipendenti dalla frequenza ; *c*) per valori di frequenza compresi fra f_1 ed f_2 (fig. 5.517-2)

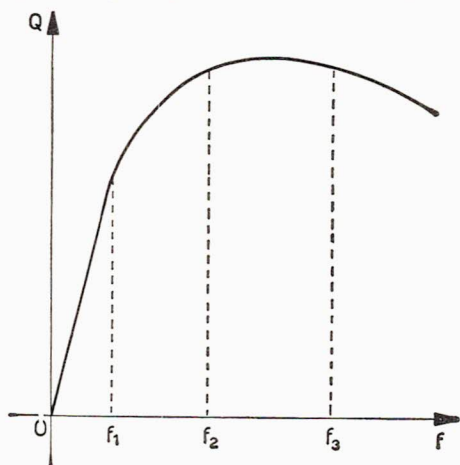



Fig. 5.517-2

sul fattore di merito si fa risentire sempre più il fatto che le perdite aumentano all'aumentare della frequenza, per cui il fattore di merito incrementerà sempre meno ; *d*) per valori più elevati di frequenza, cioè compresi fra f_2 ed f_3 (fig. 5.517-2) si ha che all'aumentare della potenza reattiva, dovuto all'aumento della frequenza, fa riscontro un aumento di perdita di energia tale da controbilanciare il primo aumento per cui il fattore di merito si mantiene sensibilmente indipendente dalla frequenza : è questo l' intervallo di frequenza nel quale il Q della bobina risulta massimo ; *e*) per valori di frequenza ancora più elevati, oltre f_3, il fattore di merito cala rapidamente a causa dell'aumento notevole delle perdite.

Numericamente il valore massimo del fattore di merito presentato da un induttore varia entro ampi limiti a seconda della sua costruzione, così dicasi per i valori estremi dell' intervallo di frequenza entro il quale si mantiene praticamente costante. Ad esempio, per gli induttori in aria alle alte frequenze, il valore massimo va da diverse decine a qualche centinaio di unità ; mentre gli stessi, alle frequenze industriali ($40 \div 60$ per/sec), presentano un fattore di merito non molto superiore all'unità.

Esercizio 5.5171

Una bobina viene sottoposta all'azione di una tensione sinusoidale la quale presenta un valore di cresta $E_M = 100$ volt ed una pulsazione $\omega = 1$ M rad/sec. In queste condizioni la bobina ha un fattore di merito $Q = 50$ unità e dissipa la potenza di 1 watt. Si trovino i valori dei parametri *serie* R_s ed L.

Soluzione

Si calcoli anzitutto la potenza reattiva impegnata dalla bobina. Sarà:

$$P_{reattiva} = P_{attiva} \cdot \text{fattore di merito} = 1 \cdot 50 = 50 \text{ VAR};$$

per cui la reattanza induttiva X_L della bobina varrà:

$$X_L = \frac{E^2}{P_{reattiva}} = \frac{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2}{50} = 100 \text{ ohm}.$$

Noto il valore di X_L, sarà facile trovare i valori richiesti di R_s ed L, poiché:

$$R_s = \frac{X_L}{Q} = \frac{100}{50} = 2 \text{ ohm}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{10^6} = 100 \ \mu\text{H}.$$

Esercizio 5.5172

In parallelo ad una bobina ($L = 1$ mH, $Q = 100$) funzionante alla pulsazione $\omega = 5$ M rad/sec viene posta una resistenza R del valore di 0,5 MΩ (vedi fig. 5.5172-1). Si trovi il nuovo valore Q' del fattore di merito presentato dal bipolo così ottenuto.

Soluzione

Si pensi di assoggettare il bipolo di fig. 5.5172-1 ad una tensione avente valore efficace E. Allora la potenza reattiva impegnata dal bipolo varrà $\left(\text{si ricordi che in questo caso } R_s << X_L \text{ per cui } I \cong \frac{E}{X_L}\right)$:

$$P_{reattiva} = \frac{E^2}{X_L},$$

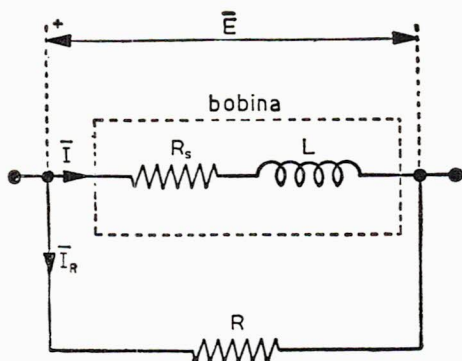



Fig. 5.5172-1

e quella attiva totale ammonterà a:

$$\mathrm{P}_{t\ attiva} = R_s\, I^2 + R\, I_R^2 = \frac{E^2}{X_L Q} + \frac{E^2}{R}.$$

D'altronde, per definizione, il fattore di merito di un bipolo è dato dal rapporto fra la potenza reattiva impegnata e quella dissipata. Sarà perciò nel nostro caso:

$$Q' = \frac{P_{reattiva}}{P_{t\ attiva}} = \frac{\dfrac{E^2}{X_L}}{E^2\left(\dfrac{1}{X_L Q} + \dfrac{1}{R}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{Q} + \dfrac{X_L}{R}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{100} + \dfrac{5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^6}} = 50\,.$$

Esercizio 5.5173

Due bobine differenti percorse dalla stessa corrente alternata dissipano la stessa potenza attiva, mentre presentano fattori di merito differenti ($Q_1 = 100$, $Q_2 = 60$). Si trovi il fattore di merito del bipolo equivalente costituito dalle due bobine collegate in serie.

Soluzione

Dalla formula del fattore di merito definito come rapporto fra potenza reattiva ed attiva, applicata al bipolo equivalente, si ha, indicando rispettivamente con P_1 e P_2 la potenza attiva dissipata dalla prima e dalla seconda bobina:

$$Q_{eq} = \frac{P_{reattiva}}{P_{attiva}} = \frac{Q_1 P_1 + Q_2 P_2}{P_1 + P_2} \; .$$

Ma $P_1 = P_2$, per cui in definitiva si ottiene facilmente che:

$$Q_{eq} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \; .$$

5.518 Angolo di perdita di un condensatore

Fra i parametri più importanti che caratterizzano il comportamento di un condensatore in regime sinusoidale, di data frequenza, vi è il cosiddetto *angolo di perdita.*

Si consideri dunque un condensatore reale sottoposto all'azione di una tensione sinusoidale $\bar{E}$: a causa delle inevitabili perdite di energia nelle armature e nel dielettrico, la corrente $\bar{I}$ assorbita non potrà essere esattamente in quadratura in anticipo con la tensione $\bar{E}$, ma dovrà differirvi di un angolo δ per formare appunto un angolo di sfasamento φ minore di 90^0. Infatti solo così, si veda il diagramma vettoriale di fig. 5.518-1*b* che riporta questa situazione, nascerà nella corrente assorbita dal condensatore una componente tale da giustificare appunto la dissipazione di energia che ha sede nel condensatore stesso. Ed è chiaro che più piccolo risulterà l'angolo δ migliore sarà, dal punto di vista delle perdite, il condensatore.

Ai fini pratici però al posto dell'angolo di perdita δ è stata introdotta la sua tangente (se δ è molto piccolo in verità $\delta \cong \text{tg}\delta$, purché δ sia espresso in radianti). Con riferimento allora al diagramma vettoriale di fig. 5.518-1*b*, la tangente dell'angolo di perdita di un condensatore può essere definita dal seguente rapporto:

5.518-1
$$\text{tg}\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{I \cos \varphi}{I \operatorname{sen} \varphi} \; .$$

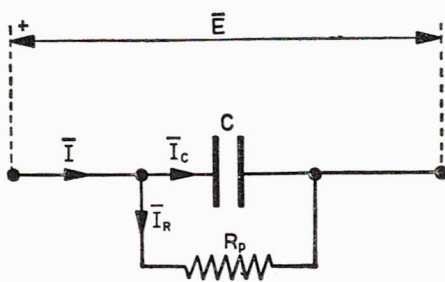
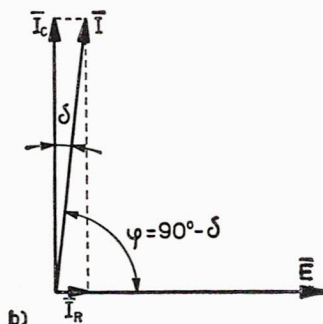



Fig. 5.518-1

D'altronde, moltiplicando entrambi i membri del suddetto rapporto per il valore della tensione E applicata al condensatore, si ottiene che:

5.518-2
$$\mathrm{tg}\delta = \frac{EI \cos \varphi}{EI \operatorname{sen} \varphi} = \frac{P}{Q} \ (^1) ,$$

cioè che la tangente dell'angolo di perdita δ risulta esprimibile come rapporto fra la potenza attiva dissipata dal condensatore e quella reattiva impegnata dal condensatore stesso. Questa definizione è importante perché generale. Essa mostra inoltre come il $\mathrm{tg}\delta$ non sia altro che l'inverso del fattore di qualità di un elemento reattivo (si veda infatti la formula 5.517-3).

Naturalmente nel caso in cui le perdite siano rappresentate da una sola resistenza R_p in parallelo alla capacità C (schema equivalente *parallelo* di fig. 5.518-1*a*) il $\mathrm{tg}\delta$ del condensatore sarà espresso allora assai facilmente dalla seguente formula:

5.518-3
$$\mathrm{tg}\delta = \frac{P}{Q} = \frac{\dfrac{E^2}{R_p}}{\omega C E^2} = \frac{1}{\omega C R_p} ;$$

nel caso invece in cui le perdite siano rappresentate da una sola resistenza R_s in serie alla capacità C (schema equivalente *serie*, come quello di fig. 5.518-2*a*) il $\mathrm{tg}\delta$ del condensatore verrà espresso dalla formula:

5.518-4
$$\mathrm{tg}\delta = \frac{P}{Q} = \frac{R_s I^2}{\dfrac{1}{\omega C} I^2} = \omega C R_s .$$

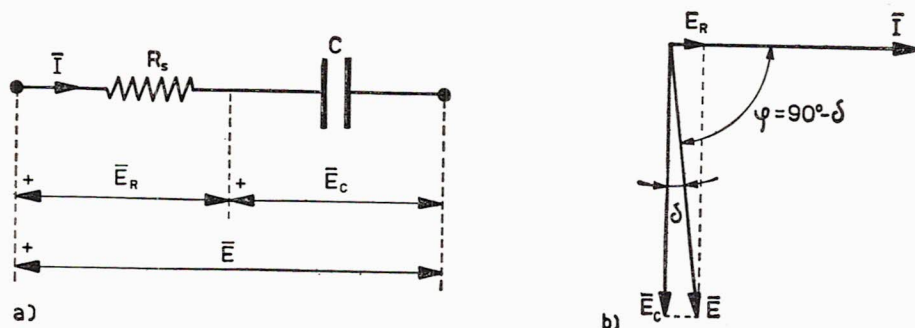



Fig. 5.518-2

(1) Si ponga attenzione al fatto che il simbolo Q indica generalmente la potenza reattiva: *solo nel caso particolare delle bobine* Q indica anche il fattore di merito. In tale evenienza, per non creare confusione, la potenza reattiva viene indicata con $P_{reattiva}$.

È importante notare che la tangente dell'angolo di perdita di un condensatore varia al variare della frequenza, però assai meno sensibilmente (si veda la fig. 5.518-3) di quanto avviene per il fattore di merito di una bobina (2), così pure il valore corrispondente a $\frac{1}{\text{tg}\,\delta}$ è, per i

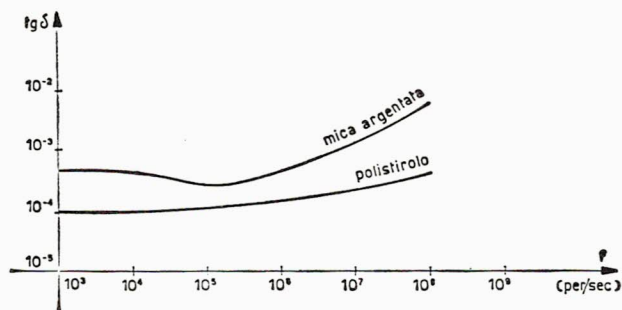



Fig. 5.518-3

buoni condensatori, di gran lunga superiore a quello del fattore di merito presentato dalle migliori bobine (3). Ciò è dovuto al fatto che le perdite nelle armature e nei dielettrici di qualità sono estremamente piccole.

Si può concludere dunque affermando che il condensatore costituisce dei due elementi circuitali reattivi quello che si avvicina assai di più all'elemento ideale, cioè a quell'elemento che, sottoposto a tensione sinusoidale, assorbe una corrente praticamente in quadratura.

Esercizio 5.5181

Una batteria di condensatori per rifasamento della potenza di 10 kVAR presenta un angolo di perdita di $4 \cdot 10^{-3}$ radianti. Si trovi la perdita di energia elettrica annua sapendo che la batteria rimane in servizio 300 giorni per 8 ore giornaliere.

Soluzione

Si incominci col calcolare la potenza attiva dissipata dalla batteria di condensatori. Poiché l'angolo δ è molto piccolo sarà $\text{tg}\delta \cong \delta = 4 \cdot 10^{-3}$, quindi :

$$P = Q\text{tg}\delta = 10 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ watt} .$$

---

(2) All'aumentare della frequenza, entro certi limiti, le perdite aumentano con legge praticamente proporzionale. Tuttavia all'aumentare della frequenza aumenta la potenza reattiva impegnata dal condensatore, con legge ancora proporzionale. Per questo il valore di tgδ si mantiene sensibilmente costante entro un'ampia gamma di frequenza.

(3) Il tgδ dei condensatori correnti è dell'ordine di 10^{-3}, per quelli di qualità dell'ordine di 10^{-4}.

Alla fine di ogni anno l'energia, espressa in kWh, ammonterà perciò a:

$$W = P_{kw} \cdot N_{ore} = 0{,}04 \cdot 8 \cdot 300 = 96 \text{ kWh} ,$$

cioè 96 chilowattora dissipati in calore dai condensatori costituenti la batteria.

5.519 Trasformazione serie-parallelo di un bipolo reattivo

Introduzione

Nello studio dei circuiti a corrente alternata i bipoli reattivi vengono sovente schematizzati con una resistenza R_s in serie ad una reattanza X_s (fig. 5.519-1*a*) oppure con una resistenza R_p in parallelo ad una reattanza X_p (fig. 5.519-1*b*). Ora il problema è questo: quali sono le relazioni che intercorrono fra R_s ed R_p e fra X_s e X_p, quando si tratta di *uno stesso bipolo*, cioè quando gli schemi di fig. 5.519-1 devono interpretare appunto lo stesso bipolo?

Il problema in sostanza è già stato risolto nel § 5.57 quando di una impedenza $\overline{Z}$ si è trovata l'espressione della sua ammettenza $\overline{Y}$ (vedi formula 5.57-8). Infatti quell'ammettenza (bipolo di fig. 5.519-1*b*) che equivale all'inverso di una impedenza data (bipolo di fig. 5.519-1*a*)

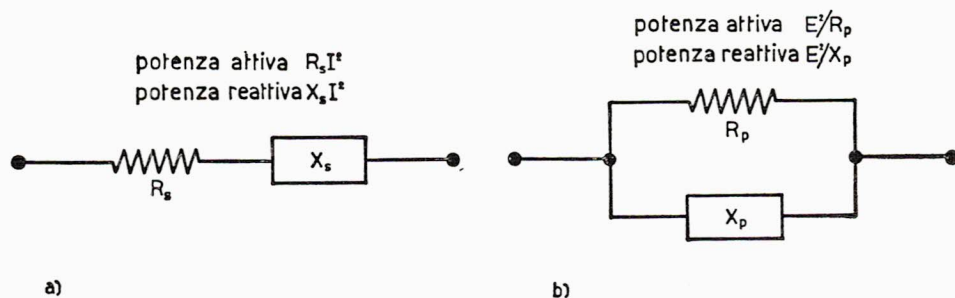



Fig. 5.519-1

risulta individuata dalla seguente parte reale:

5.519-1 $$G = \frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

e dalla seguente parte immaginaria:

5.519-2 $$jB = \frac{1}{jX_p} = -j\,\frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} .$$

Da queste espressioni si ricava pertanto le due relazioni cercate:

5.519-3
$$R_p = R_s + \frac{X_s^2}{R_s}$$

5.519-4
$$X_p = X_s + \frac{R_s^2}{X_s}.$$

Queste formule permettono dunque di calcolare i valori dei parametri in parallelo qualora siano noti quelli in serie.

Applicazioni agli induttori e ai condensatori

L' importanza delle due formule 5.519-3 e 4 si rivela soprattutto quando il bipolo dato è una bobina avente un fattore di merito Q maggiore di 10 o un condensatore avente una tangente dell'angolo di perdita inferiore a 0,1; cioè in sostanza un elemento circuitale reattivo per il quale il rapporto potenza reattiva/potenza attiva risulta maggiore di 10. Ricordando allora che in generale per un bipolo si può scrivere (vedi fig. 5.519-1):

5.519-5
$$\frac{\text{Pot. reattiva}}{\text{Pot. attiva}} = \frac{X_s}{R_s} = \frac{R_p}{X_p} = Q = \frac{1}{\text{tg } \delta},$$

le relazioni trovate in 5.519-3 e 4 diventano:

5.519-6
$$R_p = R_s + R_s \left(\frac{X_s}{R_s}\right)^2 = R_s (1 + Q^2)$$

5.519-7
$$X_p = X_s + X_s \left(\frac{R_s}{X_s}\right)^2 = X_s \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right).$$

Nel caso quindi in cui l'elemento reattivo presenti un fattore di merito $Q \geq 10$ sarà $Q^2 \geq 100$, per cui nella formula 5.519-6 l'unità sarà trascurabile rispetto a Q^2; mentre nella formula 5.519-7 sarà il termine $\frac{1}{Q^2}$ ad essere trascurabile rispetto all'unità. Pertanto, con buona approssimazione, si potrà scrivere:

5.519-8
$$R_p = Q^2 R_s \qquad (Q \geq 10)$$

5.519-9
$$X_p = X_s \qquad (Q \geq 10).$$

È importante osservare subito che queste ultime formule, così come le precedenti, sono perfettamente reversibili, cioè risolubili nei parametri

R_s ed X_s noti quelli R_p ed X_p; esse valgono quindi a risolvere il problema inverso, quello cioè della trasformazione parallelo-serie di un bipolo.

Si noti ancora che l'errore nell'impiego delle formule 5.519-8 e 9, al posto di quelle esatte 5.519-6 e 7, risulta inferiore all'1 % quando il fattore di merito dell'elemento è maggiore di 10, così sarà inferiore allo 0,01 % quando esso è maggiore di 100.

Concludendo, nel caso di una bobina avente $Q \geq 10$ lo schema equivalente di fig. 5.519-2*a* si potrà trasformare in quello di fig. 5.519-2*b*, e

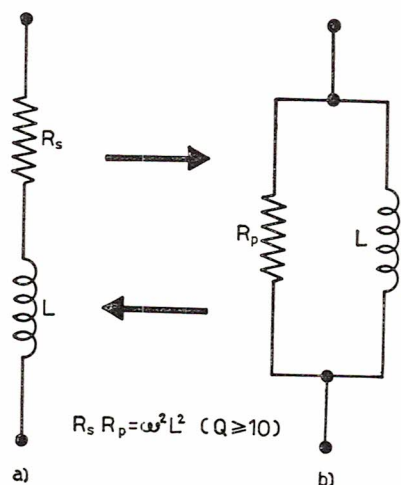



Fig. 5.519-2

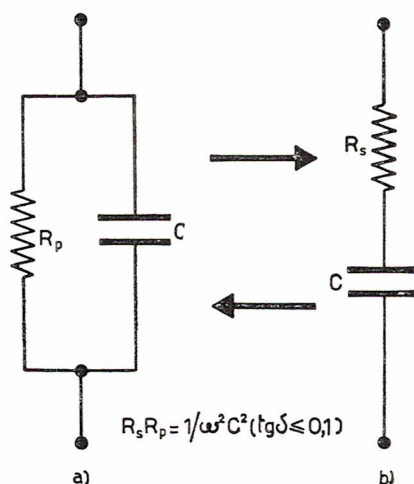



Fig. 5.519-3

viceversa, ove le induttanze hanno sempre lo stesso valore L $(X_s = X_p)$, mentre fra le resistenze R_s ed R_p sussisterà la relazione data dalla 5.519-8, cioè anche:

5.519-10
$$R_s R_p = (\omega L)^2 \; ;$$

così nel caso di un condensatore avente $\mathrm{tg}\delta \leq 10^{-1}$ lo schema equivalente di fig. 5.519-3*a* si potrà trasformare in quello di fig. 5.519-3*b*, e viceversa, ove le capacità hanno sempre lo stesso valore C mentre fra le resistenze R_s ed R_p sussisterà la relazione data dalla 5.519-8, cioè anche:

5.519-11
$$R_s R_p = \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2.$$

Esercizio 5.5191

Si risolva l'esercizio 5.5172 con il metodo della trasformazione serie-parallelo.

Soluzione

Si trasformi la resistenza R_s in una resistenza R'_p da porre in parallelo alla stessa induttanza L (vedi fig. 5.5191-1b). Poiché d'altronde, si veda l'esercizio 5.5172, $X = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^3$ ed $R_s = \dfrac{X}{Q} = \dfrac{50 \cdot 10^3}{100} =$ $= 50\ \Omega$, ed essendo il fattore di merito del ramo induttivo su cui si sta operando maggiore di 10 (infatti $Q = 100$), risulta che:

$$R'_p = \frac{X^2}{R_s} = \frac{25 \cdot 10^6}{50} = 0{,}5\ \mathrm{M}\Omega\,.$$

Dallo schema di fig. 5.5191-1b si può quindi facilmente dedurre che

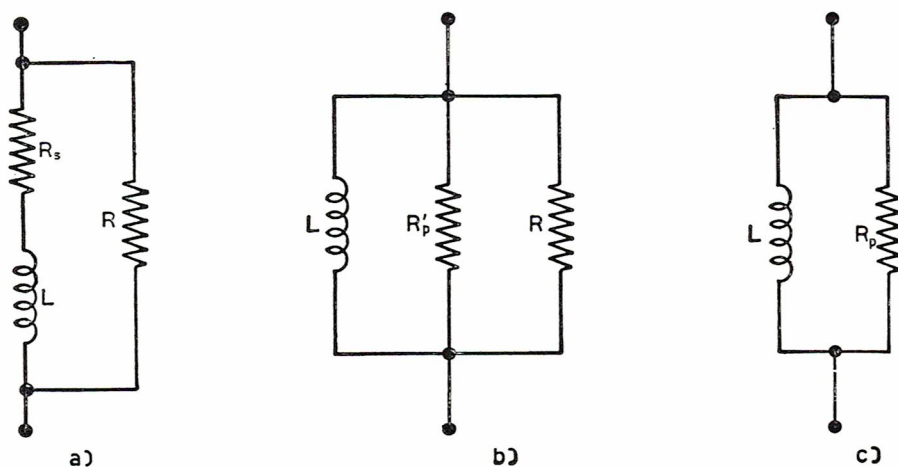



Fig. 5.5191-1

la resistenza totale R_p in parallelo all' induttanza L vale 0,25 MΩ (R'_p ed R sono infatti di valore eguale) per cui il fattore di merito di tutto il bipolo (fig. 5.5191-1c) ammonterà, per la 5.519-5, a:

$$Q' = \frac{R_p}{X} = \frac{250 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = 50\,.$$

5.6 18 esercizi completamente svolti sulle correnti alternate

Esercizio 5.61

Si trovi il valore raggiunto da una tensione sinusoidale, di frequenza $f = 50$ per/sec e di ampiezza $E_M = 100$ volt, dopo 4 millisecondi a partire dall' istante corrispondente allo zero crescente.

Soluzione

L'espressione trigonometrica della tensione sinusoidale assegnata è la seguente:

$$e = E_M \operatorname{sen} 2\pi f t = 100 \operatorname{sen} 314\, t = 100 \operatorname{sen} \alpha\,.$$

Dopo un tempo t', pari a 4 millisecondi, l'argomento α del seno ammonta a:

$$\alpha' = 314 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 1{,}256 \text{ radianti}\,,$$

cioè, in gradi sessagesimali:

$$\alpha' = 72^0\,.$$

Pertanto:

$$e = 100 \operatorname{sen} 72^0 = 100 \cdot 0{,}951 = 95{,}1 \text{ volt}\,.$$

Il problema poteva esser risolto anche in altro modo, precisamente scrivendo la tensione nella seguente forma:

$$e = E_M \operatorname{sen} 2\,\pi\,\frac{t}{T},$$

ed osservando, poiché con i dati del problema $T = 20$ millisecondi, che $t'/T = 0{,}2$. Perciò, siccome $2\pi = 360^0$, si ha:

$$e = 100 \operatorname{sen} (360^0 \cdot 0{,}2) = 100 \operatorname{sen} 72^0\,.$$

Esercizio 5.62

Si trovi l'ammettenza in forma binomia ed esponenziale del bipolo riportato in fig. 5.62-1.

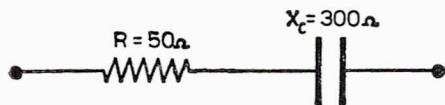



Fig. 5.62-1

Soluzione

Si calcolerà l'ammettenza come inverso dell' impedenza del bipolo dato. Perciò :

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R - jX_c} = \frac{1}{50 - j\,300} = \frac{50 + j\,300}{50^2 + 300^2} =$$

$$= \frac{50 + j\,300}{92{,}5 \cdot 10^3} = (0{,}54 + j\,3{,}24)\,10^{-3}.$$

Ottenuto così il risultato dell'ammettenza in forma binomia, per riportarlo in forma esponenziale basterà calcolarne il modulo :

$$Y = 10^{-3}\sqrt{0{,}54^2 + 3{,}24^2} = 3{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ siemens}$$

e l'argomento :

$$\text{tg}\delta = \frac{3{,}24}{0{,}54} = 6\,, \quad \delta = 80^0\ 32'\,.$$

Pertanto si ha :

$$\bar{Y} = 0{,}00328 \cdot \varepsilon^{j\,80^0\,32'}\,.$$

Esercizio 5.63

Si trovi il modulo dell' impedenza dei due rami in parallelo riportati in fig. 5.63-1.

Soluzione

Pur essendo richiesto dal problema il solo modulo dell' impedenza equivalente dei due rami in parallelo, tuttavia è necessario impostare i calcoli con le grandezze complesse.

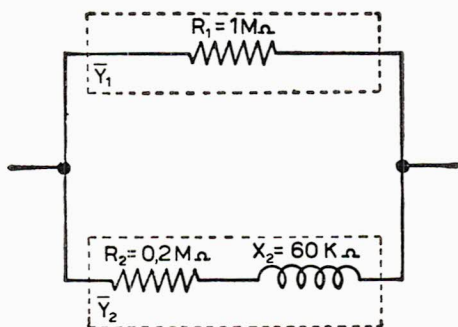



Fig. 5.63-1

Si ha così, operando con le ammettenze:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\bar{Y}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2 + jX_2}} = \frac{1}{10^{-6} + \dfrac{1}{(0,2 + j\,0,06)\,10^6}} =$$

$$= \frac{10^6}{1 + \dfrac{0,2 - j\,0,06}{0,2^2 + 0,06^2}} = \frac{10^6}{1 + 4,58 - j\,1,37} = \frac{10^6}{5,58 - j\,1,37} =$$

$$= \frac{5,58 + j\,1,37}{5,58^2 + 1,37^2}\,10^6 = \frac{5580 + j\,1370}{33}\,10^3 = (169 + j\,41,6)\,10^3 .$$

Il modulo richiesto varrà perciò:

$$Z_{eq} = 10^3 \sqrt{169^2 + 41,6^2} = 10^3 \sqrt{30\,290} = 174 \cdot 10^3 \text{ ohm} .$$

Esercizio 5.64

Si risolva l'esercizio precedente mediante l'operatore impedenza.

Soluzione

Per la soluzione si farà uso della seguente formula:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} ,$$

poiché è necessario impostare i calcoli con le grandezze complesse.
Con i dati del problema la formula scritta sopra diventa:

$$\overline{Z}_{eq} = \frac{R_1(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + jX_2} = \frac{10^6\,(0{,}2 \cdot 10^6 + j\,0{,}06 \cdot 10^6)}{1{,}2 \cdot 10^6 + j\,0{,}06 \cdot 10^6} =$$

$$= \frac{(0{,}2 + j\,0{,}06)(1{,}2 - j\,0{,}06)}{1{,}2^2 + 0{,}06^2}\,10^6 = \frac{243 + j\,60}{1{,}44} = (169 + j\,41{,}6)\,10^3\,.$$

Risultato ovviamente identico a quello trovato nell'esercizio precedente.

Esercizio 5.65

Da misure eseguite sul bipolo ohmico-induttivo riportato in figura 5.65-1, si sa che il valore della tensione ai suoi capi è di 14,1 volt

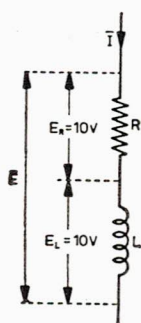
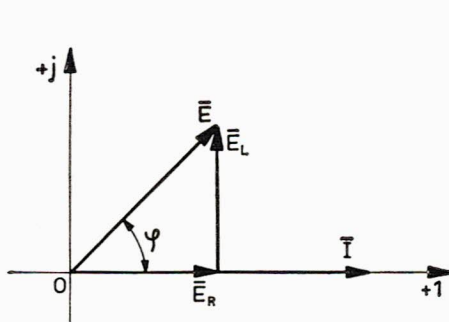



Fig. 5.65-1 *Fig. 5.65-2*

e quella ai capi di L vale 10 volt. Si trovi il valore della corrente $\overline{I}$ (modulo e fase) assorbita dal bipolo, sapendo che la resistenza R ammonta a 5 ohm.

Soluzione

Il valore della tensione ai capi della resistenza è presto calcolata, poiché :

$$E_R = \sqrt{E^2 - E_L^2} = \sqrt{14{,}1^2 - 10^2} = 10 \text{ volt}\,,$$

per cui la corrente assorbita dal bipolo ammonta a :

$$I = \frac{E_R}{R} = \frac{10}{5} = 2 \text{ ampere}\,.$$

Questa corrente d'altronde è sfasata in ritardo di 45°, come si ri-

cava assai facilmente osservando la costruzione vettoriale di fig. 5.65-2, dato che:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{E_L}{E_R} = 1\,, \qquad \varphi = 45^0\,.$$

Esercizio 5.66

Un carico, costituito da un resistore, la cui resistenza ammonta a 50 ohm, e da un condensatore della capacità di 100 μF, assorbe una corrente di 2 ampere alla frequenza di 50 per/sec. Si trovi il valore della tensione ai capi del carico e lo sfasamento nel caso in cui: *a*) il resistore è in serie al condensatore, *b*) il resistore è in parallelo al condensatore.

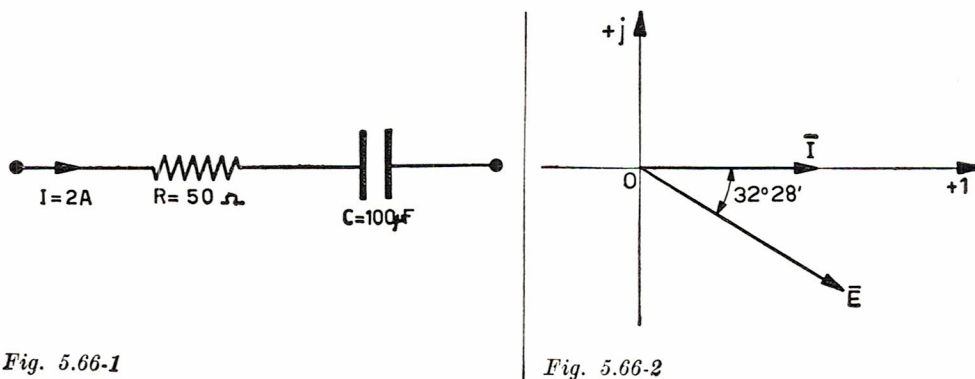
Soluzione

Per risolvere il problema è necessario calcolare modulo e fase della impedenza costituente il carico. La corrente, che risulta nota, viene naturalmente considerata sull'asse reale, cioè:

$$\overline{I} = I\varepsilon^{j\,0^0} = 2\,.$$

a) L' impedenza del carico con gli elementi in serie (vedi fig. 5.66-1) ha la seguente espressione, in forma binomia:

Fig. 5.66-1

Fig. 5.66-2

$$\overline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = 50 - j\,\frac{1}{314\cdot 10^{-4}} = 50 - j\,31{,}8\,;$$

mentre in forma esponenziale, poiché il modulo dell' impedenza vale:

$$Z = \sqrt{50^2 + 31{,}8^2} = \sqrt{3515} = 59{,}3 \text{ ohm}$$

e l'argomento risulta:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-31,8}{50} = -0,636 , \qquad \operatorname{tg} \theta = -32^0 28' ,$$

diventa:

$$\bar{Z} = 59,3 \varepsilon^{-j\,32^0\,28'} .$$

Pertanto l'espressione vettoriale della tensione ai capi del bipolo, assunta la corrente sull'asse reale, come è stato precisato più sopra, varrà:

$$\bar{E} = \bar{Z}\bar{I} = 59,3 \cdot 2\ \varepsilon^{-j\,32^0\,28'} = 118,6\ \varepsilon^{-j\,32^0\,28'} .$$

La tensione ai capi del carico è dunque di 118,6 volt ed è sfasata in ritardo di un angolo di $32^0\ 28'$ sulla corrente (fig. 5.66-2).

b) L' impedenza del carico con gli elementi in parallelo (vedi fig. 5.66-3) si può trovare molto facilmente come inverso dell'ammet-

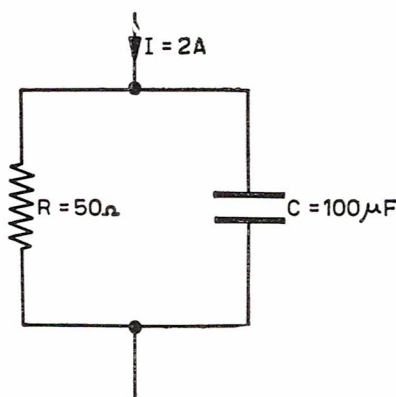
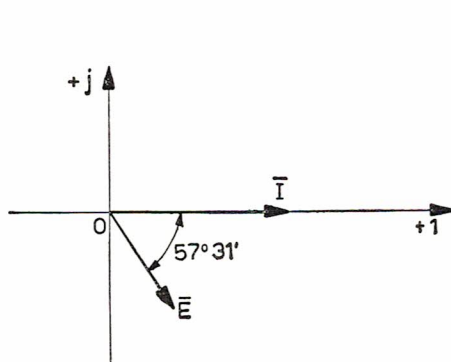



Fig. 5.66-3 *Fig. 5.66-4*

tenza, cioè:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{\dfrac{1}{50} + j\,314 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{0,02 + j\,0,0314} =$$

$$= \frac{1}{0,0372\ \varepsilon^{j\,57^0\,31'}} = 26,9\ \varepsilon^{-j\,57^0\,31'} ;$$

per cui la tensione ai capi del carico varrà:

$$\bar{E} = \bar{Z}\bar{I} = 26,9 \cdot 2\ \varepsilon^{-j\,57^0\,31'} = 53,8\ \varepsilon^{-j\,57^0\,31'} .$$

La tensione ai capi del carico è dunque di 53,8 volt e risulta sfasata in ritardo rispetto alla corrente di $57^0\ 31'$ (fig. 5.66-4).

Si noti che l' impedenza del carico poteva essere calcolata facendo il parallelo fra R ed X_c, cioè:

$$\bar{Z} = \frac{R(-jX_c)}{R - jX_c} = \frac{-j\,50 \cdot 31{,}83}{50 - j\,31{,}83} = \frac{-j\,1591\,(50 + j\,31{,}83)}{50^2 + 31{,}83^2} =$$

$$= -j\,0{,}453\,(50 + j\,31{,}83) = 14{,}45 - j\,22{,}7 = 26{,}9\,\varepsilon^{-j\,57^\circ 31'}.$$

Il calcolo però si è presentato un po' più lungo.

Esercizio 5.67

Il bipolo riportato in fig. 5.67-1 è costituito da due rami in parallelo,

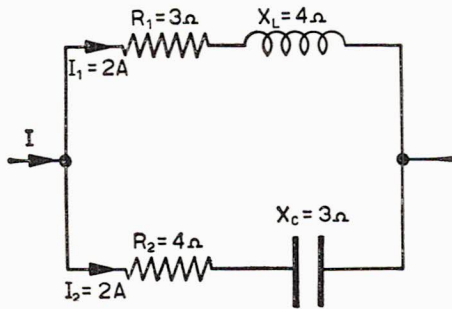



Fig. 5.67-1

in ciascuno dei quali circola una corrente di 2 ampere. Si trovi la corrente totale assorbita dal bipolo.

Soluzione

L' impedenza del primo ramo vale:

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 3 + j\,4 = 5\,\varepsilon^{j53^\circ 8'};$$

così l' impedenza del secondo ramo ammonta a:

$$\bar{Z}_2 = R_2 - jX_c = 4 - j\,3 = 5\,\varepsilon^{-j36^\circ 52'}.$$

La tensione, in modulo, ai capi del bipolo avrà pertanto il seguente valore:

$$E = Z_1 I_1 = Z_2 I_2 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ volt}.$$

Ponendo tale tensione sull'asse reale (vedi diagramma vettoriale di fig. 5.67-2), cioè prendendo tale tensione come vettore di riferimento, le correnti nei due rami saranno allora facilmente calcolabili come segue :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1} = \frac{10}{5\ \varepsilon^{j53^0 8'}} = 2\ \varepsilon^{-j53^0 8'},$$

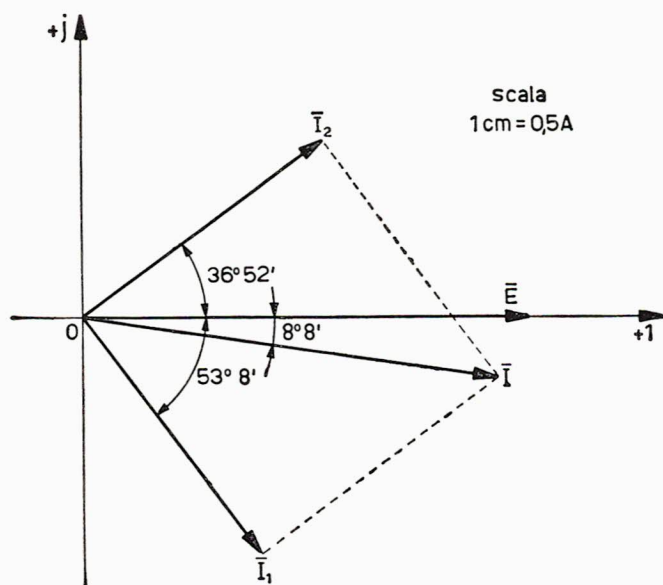



Fig. 5.67-2

cioè una corrente di 2 ampere che ritarda sulla tensione di 53⁰ 8', ed :

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_2} = \frac{10}{5\ \varepsilon^{-j36^0 52'}} = 2\ \varepsilon^{j36^0 52'},$$

cioè una corrente di 2 ampere che anticipa sulla tensione di 36^0 52'.

La corrente totale $\bar{I}$ assorbita dal bipolo varrà perciò :

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 2\,(\cos 53^0\,8' - j\,\mathrm{sen}\,53^0\,8') + 2\,(\cos 36^0\,52' +$$

$$+ j\,\mathrm{sen}\,36^0\,52') = 1{,}2 - j\,1{,}6 + 1{,}6 + j\,1{,}2 = 2{,}8 - j\,0{,}4 = 2{,}83\ \varepsilon^{-j8^0 8'},$$

cioè una corrente di 2,83 ampere in ritardo di 8^0 8' sulla tensione presente ai capi del bipolo.

Esercizio 5.68

Del bipolo riportato in fig. 5.68-1 determinare: *a*) l' impedenza $\bar{Z}_{BC}$, *b*) l' impedenza $\bar{Z}_{AC}$, *c*) la tensione $\bar{E}_{BC}$ quando il bipolo assorbe 2 ampere, *d*) la tensione $\bar{E}_{AC}$ nelle stesse condizioni, *e*) il fattore di potenza dell' intero bipolo.

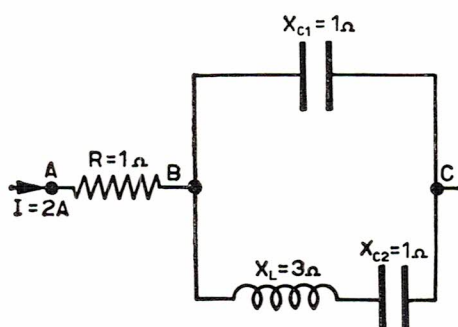
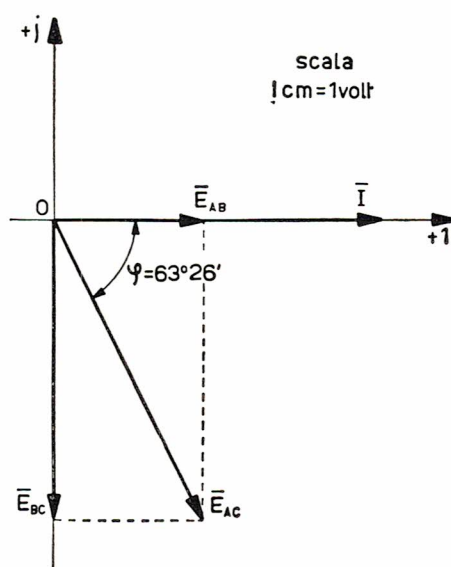



Fig. 5.68-1 *Fig. 5.68-2*

Soluzione

a) L' impedenza $\bar{Z}_{BC}$ può essere trovata come parallelo delle impedenze dei due rami. Osservando che la prima vale $\bar{Z}_1 = -j\,1$ e la seconda $\bar{Z}_2 = j\,3 - j\,1 = j\,2$, si ha quindi:

$$\bar{Z}_{BC} = \frac{-j\,1 \cdot j\,2}{-j\,1 + j\,2} = \frac{2}{j\,1} = -j\,2\,.$$

Naturalmente poteva esser calcolata anche come inverso dell'ammettenza:

$$\bar{Z}_{BC} = \frac{1}{\bar{Y}_{BC}} = \frac{1}{j\,1 - j\,\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{j\,\dfrac{1}{2}} = -j\,2\,.$$

b) L' impedenza $\bar{Z}_{AC}$ varrà perciò:

$$\bar{Z}_{AC} = \bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} = 1 - j\,2\,.$$

c) La tensione $\overline{E}_{BC}$, posto il vettore rappresentante la corrente assorbita $\overline{I}$ sull'asse reale, ammonta allora a:

$$\overline{E}_{BC} = \overline{Z}_{BC}\overline{I} = -j\,2\cdot 2 = -j\,4\,,$$

cioè 4 volt in ritardo di 90° sulla corrente $\overline{I}$.

d) La tensione $\overline{E}_{AC}$ risulta d'altronde espressa dalla seguente relazione:

$$\overline{E}_{AC} = \overline{E}_{AB} + \overline{E}_{BC} = R\overline{I} + \overline{E}_{BC} = 2 - j\,4 = 4{,}47\,\underline{|-63^0\,26'}\,,$$

cioè vale 4,47 volt ed è in ritardo di 63° 26′ sulla corrente assorbita $\overline{I}$. Si veda anche il diagramma vettoriale di fig. 5.68-2.

e) Il fattore di potenza del bipolo vale perciò:

$$\cos\varphi = \cos 63^0\,26' = 0{,}447 \text{ (in anticipo)}\,.$$

Esercizio 5.69

Nota la corrente $I = 1$ A assorbita dal bipolo riportato in fig. 5.69-1, si trovino le correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ circolanti nei due rami.

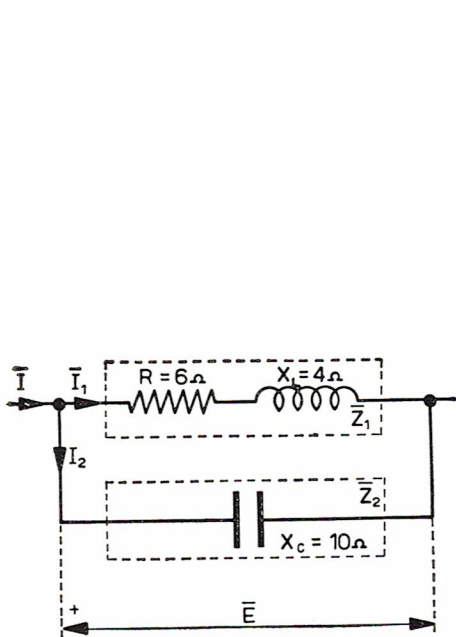



Fig. 5.69-1

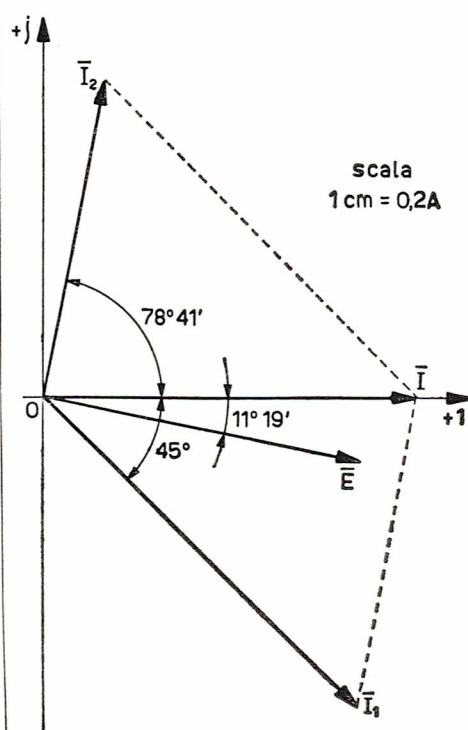



Fig. 5.69-2

Soluzione

Si incominci a calcolare l'impedenza equivalente $\bar{Z}_{eq}$ del bipolo. Si ha:

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(6 + j\,4)(-j\,10)}{6 + j\,4 - j\,10} = \frac{40 - j\,60}{6 - j\,6} = \frac{600 - j\,120}{6^2 + 6^2} =$$

$$= 8{,}34 - j\,1{,}67 = 8{,}51\ \varepsilon^{-j11^0\,19'}\,.$$

Conosciuta l'impedenza equivalente, risulterà pure nota la tensione $\bar{E}$ agente ai capi del bipolo. Posta infatti la corrente $\bar{I}$ assorbita dal bipolo sull'asse reale ($\bar{I} = 1\ \varepsilon^{j0^0}$), si ottiene immediatamente:

$$\bar{E} = \bar{Z}_{eq}\bar{I} = (8{,}51\ \ \varepsilon^{-j\,11^0\,19'})\ \text{volt}\,.$$

Per calcolare le due correnti $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ basterà allora esprimere le impedenze $\bar{Z}_1$ e $\bar{Z}_2$ in forma esponenziale:

$$\bar{Z}_1 = 6 + j\,4 = 7{,}21\,\varepsilon^{j\,33^0\,41'}\,,$$

$$\bar{Z}_2 = -j\,10 = 10\,\varepsilon^{-j\,90^0}\,,$$

e quindi eseguire i seguenti rapporti:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_1} = \frac{8{,}51\ \varepsilon^{-j\,11^0\,19'}}{7{,}21\ \varepsilon^{j\,33^0\,41'}} = 1{,}18\ \varepsilon^{-j\,45^0}\,,$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_2} = \frac{8{,}51\ \varepsilon^{-\,11^0\,19'}}{10\ \varepsilon^{-j\,90^0}} = 0{,}851\ \varepsilon^{j\,78^0\,41'}\,.$$

In fig. 5.69-2 è stato riportato il relativo diagramma vettoriale, il cui scopo è quello, tra l'altro, di permettere una verifica visiva dei risultati ottenuti.

Esercizio 5.610

Si trovi per quale valore di frequenza nella rete di fig. 5.610-1 la tensione $\bar{E}_u$ risulta in fase rispetto alla tensione di alimentazione $\bar{E}_e$.

Soluzione

La tensione $\bar{E}_u$ sarà in fase con la tensione $\bar{E}_e$ quando l'impedenza

$\bar{Z}_u$ risulterà reale, ossia quando sarà nulla la sua parte immaginaria ($X_u = 0$): ciò perché la tensione $\bar{E}_u$ è ricavata dalla $\bar{E}_e$ tramite un partitore di tensione, come appare in fig. 5.610-2.

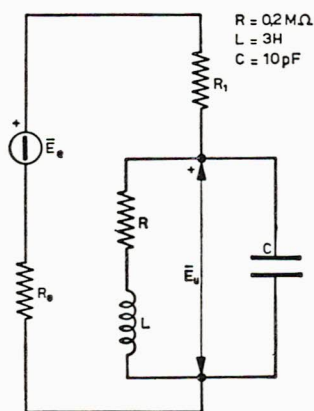
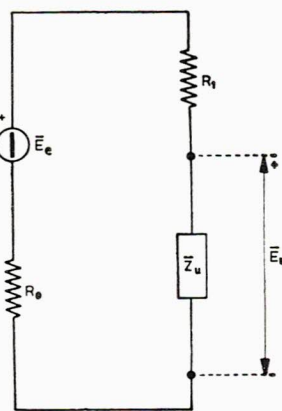



Fig. 5.610-1 *Fig. 5.610-2*

Si incominci pertanto ad esprimere analiticamente l' impedenza $\bar{Z}_u$:

$$\bar{Z}_u = \frac{\dfrac{-j}{\omega C}(R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\left(\dfrac{L}{C} - j\dfrac{R}{\omega C}\right)\left[R - j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\right]}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{RL}{C} - \dfrac{R}{\omega C}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} - j\frac{\dfrac{R^2}{\omega C} + \dfrac{L}{C}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

La condizione sopra menzionata porta dunque ad imporre che sia:

$$\frac{R^2}{\omega C} + \frac{L}{C}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 .$$

Sviluppando e semplificando si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2,$$

per cui la frequenza cercata è espressa da:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}.$$

Passando ora ai numeri si ha finalmente:

$$f = \frac{1}{6,28}\sqrt{\frac{1}{3\cdot 10\cdot 10^{-12}} - \left(\frac{2\cdot 10^5}{3}\right)^2} = 26,9\cdot 10^3 \text{ per/sec}.$$

Esercizio 5.611

Si trovi il valore, in modulo e fase, assunto dal rapporto $\bar{E}_u/\bar{E}_e$ in relazione alla rete riportata in fig. 5.611-1.

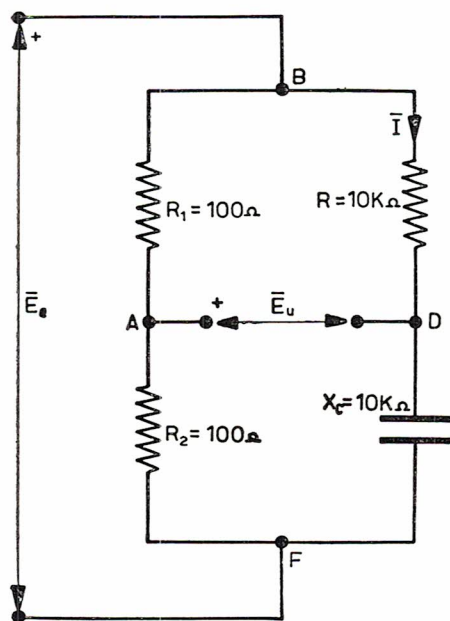
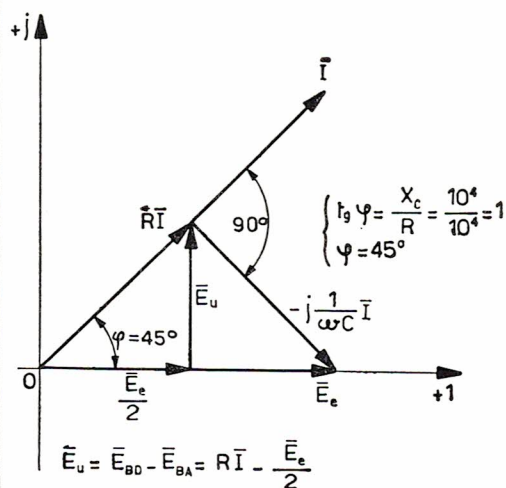



Fig. 5.611-1 *Fig. 5.611-2*

Soluzione

Per la maglia *ABDA* si potrà scrivere la seguente equazione (equilibrio delle tensioni):

$$\bar{E}_{BA} + \bar{E}_{AD} + \bar{E}_{DB} = 0.$$

D'altronde, poiché $R_1 = R_2$, si ha che:

$$\bar{E}_{BA} = \frac{1}{2}\bar{E}_e;$$

mentre ovviamente, con le polarità assegnate ad $\bar{E}_u$, risulta:

$$\bar{E}_{AD} = \bar{E}_u .$$

Osservando d'altra parte che la *d.d.p.* $- \bar{E}_{DB}$ è data dalla caduta di tensione nella resistenza R dovuta alla corrente $\bar{I}$ assorbita dal ramo $R \div C$, si ottiene facilmente che:

$$\bar{E}_{DB} = - R\bar{I} = - R \frac{\bar{E}_e}{R - j X_C} .$$

In definitiva, ricavando $\bar{E}_{AD}$, cioè $\bar{E}_u$, dall'equazione scritta più sopra, risulta:

$$\bar{E}_u = - \bar{E}_{DB} - \bar{E}_{BA} = R \frac{\bar{E}_e}{R - jX_C} - \frac{\bar{E}_e}{2} ,$$

cioè:

$$\frac{\bar{E}_u}{\bar{E}_e} = \frac{R}{R - j X_C} - \frac{1}{2} ,$$

che con i dati del problema diventa:

$$\frac{\bar{E}_u}{\bar{E}_e} = \frac{10^4}{10^4 - j\, 10^4} - \frac{1}{2} = \frac{1 + j1}{2} - \frac{1}{2} = j \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \varepsilon^{j90^\circ} .$$

La tensione di uscita $\bar{E}_u$ vale dunque la metà di quella di entrata $\bar{E}_e$ e su questa è in quadratura anticipo. Si veda anche il diagramma vettoriale di fig. 5.611-2.

Esercizio 5.612

La rete elettrica riportata in fig. 5.612-1 è alimentata con una tensione sinusoidale $\bar{E}_e$ del valore efficace di 100 volt. In queste condizioni si trovi: *a*) la corrente $\bar{I}$ assorbita (in modulo e fase); *b*) la tensione $\bar{E}_u$ all'uscita (in modulo e fase); *c*) la potenza attiva, reattiva ed apparente impegnata dall'intera rete.

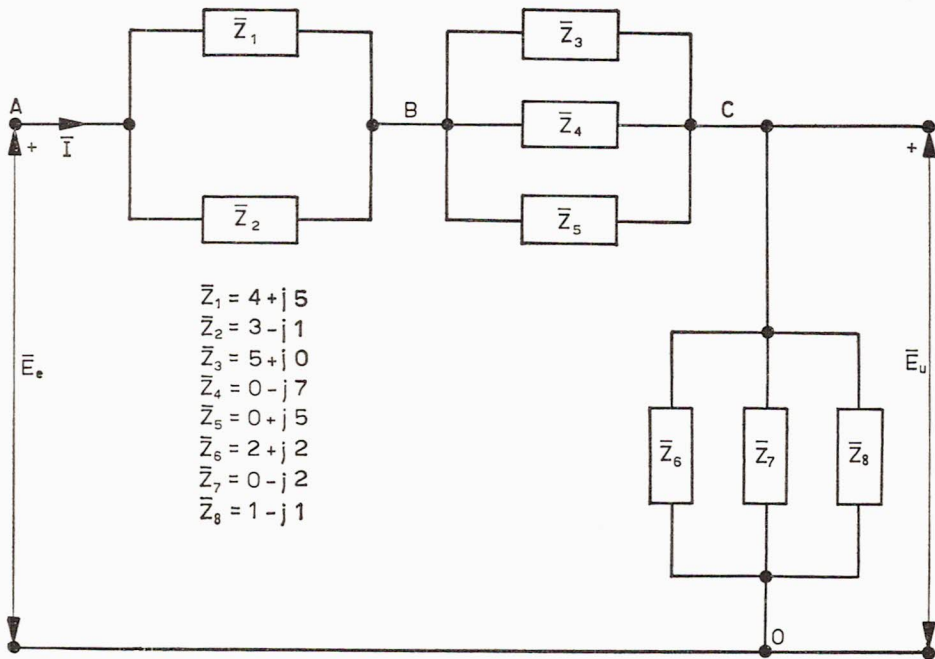



Fig. 5.612-1

Soluzione

a, b) Si incominci a semplificare la rete data, come è stato riportato in fig. 5.612-2. Si ha allora:

$$\bar{Z}_{AB} = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(4 + j\,5)\,(3 - j\,1)}{7 + j\,4} = \frac{17 + j\,11}{7 + j\,4} = \frac{163 + j\,9}{65} =$$

$$= 2{,}51 + j\,0{,}138\,,$$

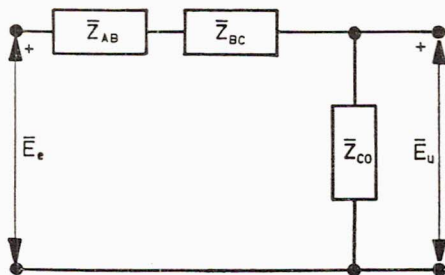



Fig. 5.612-2

$$\bar{Z}_{BC} = \frac{1}{\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4 + \bar{Y}_5} = \frac{1}{0,200 + j\,0,143 - j\,0,200} = \frac{1}{0,200 - j\,0,057} =$$

$$= \frac{0,200 + j\,0,057}{0,0432} = 4,64 + j\,1,32\,.$$

Per cui:

$$\bar{Z}_{AC} = \bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} = 2,51 + j\,0,138 + 4,64 + j\,1,32 = 7,15 + j\,1,46\,.$$

D'altronde:

$$\bar{Z}_{CO} = \frac{1}{\bar{Y}_6 + \bar{Y}_7 + \bar{Y}_8} = \frac{1}{0,25 - j\,0,25 + j\,0,50 + 0,50 + j\,0,50} =$$

$$= \frac{1}{0,75 + j\,0,75} = \frac{0,75 - j\,0,75}{1,12} = 0,67 - j\,0,67 = 0,947\,\varepsilon^{-j45^0}\,.$$

Pertanto la corrente $\bar{I}$ assorbita vale:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_e}{\bar{Z}_{AC} + \bar{Z}_{CO}} = \frac{100}{7,82 + j\,0,79} = 12,7 - j\,1,3 = 12,75\,\varepsilon^{-j\,5^0 50'}.$$

cioè ammonta a 12,75 ampere e ritarda di $5^0\,50'$ sulla tensione $\bar{E}_e$; mentre la tensione $\bar{E}_u$ risulta:

$$\bar{E}_u = \bar{Z}_{CO}\bar{I} = 0,947\,\varepsilon^{-j45^0}\cdot 12,75\,\varepsilon^{-j5^0 50'} = 12,1\,\varepsilon^{-j\,50^0 50'}\,,$$

cioè ammonta a 12,1 volt e ritarda sulla tensione di entrata $\bar{E}_e$ di $50^0\,50'$.

c) Per il calcolo delle potenze, poiché ad esempio è noto l'angolo di sfasamento ($\varphi = -5^0\,50'$), si farà uso delle seguenti espressioni:

$$P = E_e I \cos\varphi \quad = 100\cdot 12,75\cdot 0,995 = 1268 \text{ W}\,,$$

$$Q = E_e I \operatorname{sen}\varphi \quad = -100\cdot 12,75\cdot 0,101 = -128,5 \text{ VAR}\,,$$

$$A = E_e I \quad = 100\cdot 12,75 \quad = 1275 \text{ VA}\,.$$

N. B. I risultati ora trovati possono essere controllati naturalmente con il teorema di Boucherot ($P = \Sigma RI^2 = 7,82\cdot 12,75^2$; $Q = \Sigma XI^2 = 0,79\cdot 12,75^2$, $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$).

Esercizio 5.613

Una linea monofase lunga 100 metri, costituita da due conduttori in rame del diametro di 3,6 mm e distanti 1 m, funziona alla frequenza di 50 per/sec.

Si trovi quale valore deve avere la tensione alla partenza della linea affinché all'arrivo si abbiano 220 volt con un carico il quale, sotto l'azione di questa tensione, assorbe una corrente di 20 ampere con cos $\varphi = 0{,}8$ in ritardo.

Soluzione

Una linea monofase, essendo costituita da un conduttore di andata e uno di ritorno, ciascuno di resistenza R ed induttanza L, verrà schematizzata come in fig. 5.613-1.

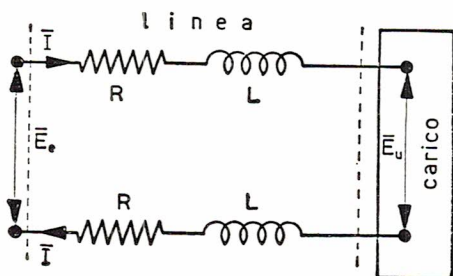



Fig. 5.613-1

D'altronde la resistenza R di ciascun conduttore potrà essere calcolata con la formula 1.46-1 vista nel primo capitolo, cioè:

$$R = \rho \frac{l}{S} = 0{,}0175 \frac{100}{10{,}2} = 0{,}173 \text{ ohm} ;$$

così come l'induttanza $2L$ dell'insieme dei due conduttori potrà essere computata con la formula 4.48-5 del capitolo quarto, cioè:

$$2L = \frac{\mu l}{2\pi} \left[0{,}50 + 2{,}30 \log \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{6{,}28} \left(0{,}50 + 4{,}60 \log \frac{1}{1{,}8 \cdot 10^{-3}} \right) = 0{,}263 \cdot 10^{-3} \text{ H} .$$

Per l'impostazione del calcolo della tensione E_e presente alla partenza della linea basterà fare riferimento al circuito costituito dall'in-

sieme linea-carico, si veda la fig. 5.613-2*a*, o al diagramma vettoriale qualitativo riportato in fig. 5.613-2*b*, dove con E_l si intende la caduta di tensione nella linea e dove l'angolo φ è quello corrispondente al fattore di potenza del carico.

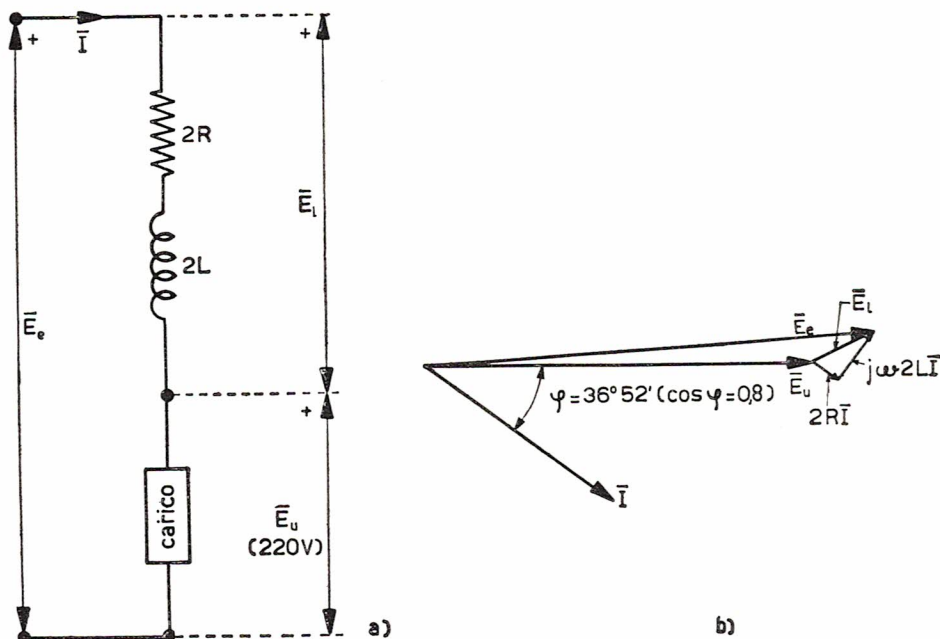



Fig. 5.613-2

È facile scrivere allora che:

$$|\bar{E}_e| = |\bar{E}_u + \bar{E}_l| = |\bar{E}_u + (2R + j\,\omega 2L)\bar{I}|,$$

dove:

$$\bar{I} = I\varepsilon^{-j\varphi} = I\,(\cos\varphi - j \operatorname{sen}\varphi) = 20\,(0{,}80 - j\,0{,}60) = 16 - j\,12\,.$$

Pertanto, passando ai numeri e sviluppando la relazione sopra scritta, ricordando inoltre che la tensione $\bar{E}_u$ è sull'asse reale, si ottiene:

$$|\bar{E}_e| = |220 + (0{,}346 + j\,0{,}083)\,(16 - j\,12)| = |226{,}5 - j\,2{,}84| =$$

$$= \sqrt{226{,}5^2 + 2{,}84^2} = 226{,}5 \text{ volt}\,.$$

Esercizio 5.614

Un generatore di corrente sinusoidale, del valore $I_0 = 10$ mA, alimenta la rete riportata in fig. 5.614-1. Trovare modulo e fase della tensione ai capi di R_2.

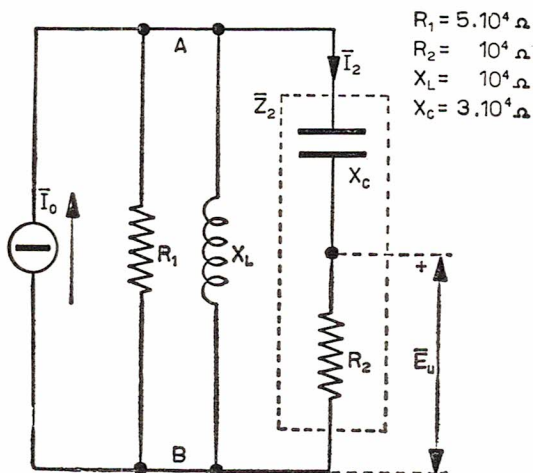



Fig. 5.614-1

Soluzione

La tensione $\bar{E}_u$ cercata avrà la seguente espressione (indicando con $\bar{Z}_p$ il parallelo di R_1 ed X_L):

$$\bar{E}_u = \bar{I}_0 \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_p + \bar{Z}_2} R_2 .$$

Si incominci dunque a calcolare l'impedenza $\bar{Z}_p$. Questa vale:

$$\bar{Z}_p = \frac{jR_1X_L}{R_1 + jX_L} = \frac{j5\cdot 10^4\cdot 10^4}{(5+j1)\,10^4} = \frac{j5\cdot 10^4\,(5-j1)}{5^2+1^2} =$$

$$= \frac{(5+j25)\,10^4}{26} = (0{,}192 + j0{,}96)\,10^4 = 0{,}98\cdot 10^4\ \varepsilon^{j\,78^0\,43'} .$$

Mentre per $\bar{Z}_p + \bar{Z}_2$ risulta:

$$\bar{Z}_p + \bar{Z}_2 = 0{,}192\cdot 10^4 + j\,0{,}96\cdot 10^4 + 10^4 - j\,3\cdot 10^4 =$$

$$= (1{,}192 - j\,2{,}04)\,10^4 = 2{,}36\cdot 10^4\ \varepsilon^{-j\,59^0\,40'} .$$

Pertanto per la tensione $\bar{E}_u$ si ha:

$$\bar{E}_u = \bar{I}_0 \frac{\bar{Z}_p}{\bar{Z}_p + \bar{Z}_2} R_2 = 10^{-2} \frac{0{,}98\cdot 10^4\ \varepsilon^{j\,78^0\,43'}}{2{,}36\cdot 10^4\ \varepsilon^{-j\,59^0\,40'}}\, 10^4 =$$

$$= \frac{98}{2{,}36}\ \varepsilon^{j\,(78^0\,43' + 59^0\,40')} = 41{,}5\ \varepsilon^{j\,138^0\,23'} ,$$

cioè la tensione ai capi di R_2 ammonta a 41,5 volt ed è sfasata in anticipo di $138^0\,23'$ rispetto alla corrente $\overline{I}_0$.

Si veda per maggior comprensione il diagramma vettoriale di fig. 5.614-2, dove è stata riportata anche la tensione $\overline{E}_{AB}$, la quale

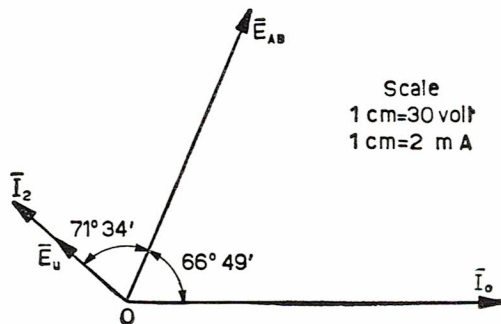



Fig. 5.614-2

anticipa sulla corrente $\overline{I}_0$ di $66^0\,49'$, cioè dell'argomento della $\overline{Z}_{eq}$ della rete intera, e la $\overline{I}_2$ che anticipa a sua volta rispetto alla suddetta tensione dell'angolo $71^0\,34'$, cioè dell'argomento della $\overline{Z}_2$.

Esercizio 5.615

Un bipolo, alimentato in corrente alternata, sotto la *d.d.p.* del valore di 220 volt assorbe una corrente avente l' intensità di 10 ampere e dissipa una potenza attiva di 1000 watt.

Trovare la potenza reattiva ed apparente impegnata dal bipolo, nonché i suoi parametri attivi e reattivi nella schematizzazione di tipo parallelo (ammettenza).

Soluzione

Dalla seguente relazione delle potenze:

$$A^2 = P^2 + Q^2 \; ,$$

si ricaverà l'espressione della potenza reattiva in funzione della potenza attiva ($P = 1000$ W) e di quella apparente, facilmente calcolabile come segue: $A = EI = 220 \cdot 10 = 2200$ VA. Si ottiene così:

$$Q = \sqrt{A^2 - P^2} = 10^3 \sqrt{2{,}2^2 - 1} = 1959 \text{ VAR} \; .$$

Poiché il bipolo, che è completamente passivo, deve essere schema-

tizzato con un'ammettenza, come appare in fig. 5.615-1, sarà caratterizzato da:

$$G = \frac{P}{E^2} = \frac{1000}{220^2} = 20{,}6 \text{ mS}$$

$$B = \frac{Q}{E^2} = \frac{1959}{220^2} = 40{,}5 \text{ mS}\,.$$

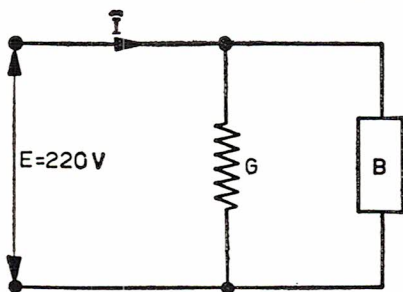



Fig. 5.615-1

Esercizio 5.616

Si trovi il valore della potenza reattiva di una batteria di condensatori necessari per rifasare completamente ($\cos\varphi' = 1$) un carico [$\bar{Z}_u = (10 + j\,12)$ ohm] alimentato a 130 volt.

Soluzione

La potenza reattiva induttiva Q_L del carico ammonta a:

$$Q_L = X_u I^2 = X_u \frac{E^2}{Z_u^2} = \frac{X_u}{R_u^2 + X_u^2} E^2 = \frac{12}{10^2 + 12^2} 130^2 = 831 \text{ VAR}\,.$$

Pertanto la batteria di condensatori da installare in parallelo al carico dovrà avere la seguente potenza reattiva:

$$Q_C = Q_L = 831 \text{ VAR}\,.$$

Esercizio 5.617

Si trovi il fattore di potenza determinato da due carichi collegati fra loro in parallelo, la cui caratteristica è quella di avere la stessa potenza apparente ($A_1 = A_2 = 3000$ VA) ma il fattore di potenza differente ($\cos\varphi_1 = 0{,}4$, $\cos\varphi_2 = 0{,}9$, entrambi in ritardo).

Soluzione

Per il teorema di Boucherot, il parallelo dei due carichi assorbirà la seguente potenza attiva:

$$P = P_1 + P_2 = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = 3000\,(0{,}4 + 0{,}9) = 3900 \text{ W}$$

e reattiva:

$$Q = Q_1 + Q_2 = A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = 3000\,(0{,}916 + 0{,}436) =$$
$$= 4056 \text{ VAR} .$$

Pertanto, poiché la tangente trigonometrica del nuovo angolo φ risulta:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{4056}{3900} = 1{,}04 \ , \qquad \varphi = 46^0\,7' \ ,$$

si ha che a questo valore corrisponderà il seguente fattore di potenza:

$$\cos \varphi = \cos 46^0\,7' = 0{,}693 \ .$$

Esercizio 5.618

Un motore assorbe dalla rete elettrica, che lo alimenta a 220 volt 50 per/sec, una corrente di 15 ampere. Si trovi il fattore di potenza del motore e quindi il valore della capacità per il rifasamento completo ($\cos \varphi' = 1$) sapendo che la potenza meccanica fornita in queste condizioni è di 2 kW con un rendimento $\eta = 0{,}80$.

Soluzione

Attraverso i dati del problema si conosce la potenza elettrica apparente del motore:

$$A = 220 \cdot 15 = 3300 \text{ VA} \ ,$$

e la potenza elettrica attiva assorbita dal motore. Questa infatti vale la potenza meccanica resa all'asse divisa per il rendimento, perciò:

$$P = \frac{P_{mecc}}{\eta} = \frac{2000}{0{,}80} = 2500 \text{ W} \ .$$

Il fattore di potenza del motore risulta allora come segue:

$$\cos \varphi = \frac{P}{A} = \frac{2500}{3300} = 0{,}758 \ .$$

D'altronde in questa situazione la potenza reattiva (induttiva) impegnata dal motore vale, poiché $\operatorname{sen} \varphi = 0{,}652$, :

$$Q_{mot} = A \operatorname{sen} \varphi = 3300 \cdot 0{,}652 = 2150 \text{ VAR} .$$

Dovendo rifasare completamente, dovrà verificarsi la condizione:

$$Q_c = \omega C E^2 = Q_{mot} \ ,$$

dalla quale si ricava appunto:

$$C = \frac{Q_{mot}}{\omega E^2} = \frac{2150}{314 \cdot 220^2} \cong 140 \ \mu\text{F} \ .$$

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

6

6.1 Cenni sui vari sistemi di unità

La necessità di disporre di una *unità di misura* per ogni grandezza fisica che s' incontra nello studio dei vari fenomeni scientifici è sentita tutte le volte che si deve esprimere quantitativamente un certo risultato. A tale proposito si comprende assai facilmente che, mentre per ciascuna grandezza, quando questa si presenta isolata, potrebbe essere fissata qualsiasi unità a piacere, per più grandezze che entrano in diversi fenomeni e quindi che devono apparire in più relazioni analitiche (formule) l' indipendenza delle varie unità di misura comporterebbe per ciascuna relazione la presenza di coefficienti diversi fra loro al variare delle unità di misura fissate.

La scelta delle varie unità di misura deve essere dunque razionale. Essa terrà pertanto conto, pur essendo molte le grandezze fisiche, della necessità che le relative unità di misura costituiscano un insieme *coerente*, cioè un *insieme di unità* tale da semplificare al massimo i risultati numerici delle relazioni che interpretano le varie leggi fisiche.

Ora, in sostanza, un sistema è *coerente* quando viene assunto il minor numero possibile di unità fondamentali. A questo riguardo è stato dimostrato che per i fenomeni meccanici tre sono le grandezze fondamentali, per quelli elettrici e magnetici ne sono necessarie quattro: precisamente le tre meccaniche più una da scegliere fra le grandezze del gruppo elettrico o magnetico.

Le grandezze scelte per dare luogo alle unità fondamentali sono, lo si comprende bene, arbitrarie purché esse (sole) non risultino legate fra loro da relazioni (che toglierebbero altrimenti la necessaria indipendenza). È noto a tale proposito che per i fenomeni meccanici la scelta è caduta già da tempo sulle seguenti tre grandezze: lunghezza, massa, tempo; mentre per i fenomeni dovuti all'elettricità la grandezza da assumere per quarta unità ha maggiore libertà: ciò verrà accennato nel prossimo paragrafo.

A questo punto è importante ricordare come, nel passato, la situa-

zione in fatto di sistemi di unità di misura fosse complicata e confusa poiché, mentre per i sistemi meccanici i fisici avevano raggiunto una univocità (sistema C.G.S., cioè centimetro, grammo-massa, secondo), per i fenomeni dovuti all'elettricità si preferiva fare ricorso al sistema C.G.S. elettrostatico (ove la quarta unità risulta essere la costante dielettrica del vuoto ε_0, però posta eguale ad 1) se i fenomeni erano elettrostatici, mentre si faceva ricorso al sistema C.G.S. elettromagnetico (ove la quarta unità è la permeabilità magnetica del vuoto μ_0, però posta eguale ad 1) per i fenomeni magnetici e per quelli relativi alle correnti.

Si deve ancora aggiungere che i tecnici, trovando poco rispondenti ai bisogni pratici i risultati numerici ottenuti da molte formule usanti le unità dei vari sistemi C.G.S., crearono un loro sistema, il cosiddetto *sistema tecnico*, assumendo per i fenomeni elettrici nuove unità di più comodo impiego (come il joule e il volt, per cui le unità elettriche derivate risultarono il coulomb, l'ampere, l'ohm, ecc. ....) ; mentre per i fenomeni magnetici furono adottate ancora le unità del sistema C.G.S. elettromagnetico (necessitando così di coefficienti di ragguaglio).

Attualmente nella scienza e nella tecnica la confusione e le complicazioni dovute alle unità di misura non esistono più poiché viene impiegato ormai da diversi anni un solo sistema di unità di misura che soddisfa egualmente bene tanto il campo scientifico come quello applicativo. È questo il sistema dovuto all' italiano Giovanni Giorgi, il quale nel 1935 lo vide ufficialmente riconosciuto dal congresso internazionale dell'Aja. In seguito il sistema fu denominato appunto *sistema Giorgi*, in riconoscimento degli alti meriti dello scienziato italiano.

6.2 Sistema Giorgi

Il sistema Giorgi riunisce in un unico sistema *coerente* le unità di misura di tutte le grandezze fisiche che caratterizzano qualsiasi fenomeno ([1]), nello stesso tempo impiega come unità fondamentali meccaniche quelle assai di uso corrente del sistema M.K.S. (metro, chilogrammo-massa, secondo), abbandonando perciò quelle del sistema C.G.S. meno comode. Il nuovo sistema ha permesso così il riferimento ai campioni conservati presso gli Uffici Internazionali Pesi e Misure e nello stesso tempo ha consentito di mantenere come unità derivate alcune unità di

---

([1]) Per i fenomeni calorifici è però necessario introdurre un'altra unità di misura, precisamente il *grado Kelvin* ; mentre per i fenomeni ottici è stata assunta la *candela* come unità dell' intensità luminosa. In realtà dunque sono sei le unità fondamentali del sistema Giorgi avente carattere generale e cioè tre meccaniche, una elettrica o magnetica, una termica e una ottica.

misura pratiche di ormai universale e comodo impiego (ad esempio il joule e il watt). Come quarta unità fondamentale necessaria per i fenomeni dovuti all'elettricità il sistema Giorgi stabilisce che essa può essere qualsiasi purché scelta fra le grandezze elettriche o magnetiche.

Sostanzialmente la quarta grandezza fondamentale nel sistema Giorgi è la permeabilità magnetica. Ragioni contingenti fanno però sì che, a seconda dei casi, venga impiegata come quarta unità di misura il coulomb (sistema M.K.S.C.), oppure l'ohm (sistema M.K.S.Ω.), o più modernamente, dopo l'entrata in vigore (1948) delle nuove norme stabilite in proposito dal Comitato Internazionale Pesi e Misure, l'ampere (sistema M.K.S.A.). Naturalmente tutti questi sistemi sono completamente equivalenti fra loro poiché, assunto ad esempio il coulomb oppure l'ohm o l'ampere ecc. come unità fondamentale, le rimanenti altre diventano semplicemente unità derivate. La sola differenza fra i vari sistemi M.K.S. sta nelle relazioni dimensionali delle grandezze fisiche usate. Si vedano ad esempio le due ultime colonne della tabella 6.3.

È importante osservare ancora che, quando vengono trattati problemi relativi ai sistemi di unità di misura, i fattori che determinano la scelta delle unità sono concettualmente indipendenti da quelli che presiedono alla determinazione dei relativi *campioni*, perché si comprende bene come quest'ultimo problema sia in stretta dipendenza con la precisione di controllo realizzabile in pratica nei laboratori di misura e quindi come possa essere sottoposto a revisione.

Così è avvenuto abbastanza recentemente che il Comitato Internazionale Pesi e Misure, stabilendo precisamente che dal 1948 fosse aggiornato il valore della permeabilità magnetica assoluta del vuoto (in sostanza questa è la quarta unità fondamentale del sistema Giorgi, come si è accennato più sopra), assegnandole il valore di $4\pi \cdot 10^{-7}$ henry/metro (che prima del 1948 risultava di valore leggermente diverso), abbia determinato il ritocco di tutte le altre unità di misura elettriche e magnetiche. Per questo motivo le nuove unità di misura, quelle cioè che si sono adeguate alla deliberazione del Comitato Internazionale Pesi e Misure (accettato in tutto il mondo ; in Italia vige a tale proposito il decreto legge n. 370 del 21 marzo 1948), risultano leggermente differenti da quelle che erano in vigore precedentemente (congresso internazionale di Chicago) e che erano state indicate come unità *internazionali*.

Le nuove unità, quelle cioè oggi in vigore, sono state denominate invece *assolute*. La tabella 6.2 riporta i valori di ragguaglio con quelle internazionali. Come ci si può rendere conto, la differenza fra queste ultime e le unità assolute è assai modesta (inferiore all'uno per mille), tale da riguardare perciò non le misure industriali (così i voltmetri, gli ampermetri, ecc. costruiti prima del 1948 non hanno risentito minimamente del cambiamento) ma solamente le misure di laboratorio (quindi ad esempio i campioni di resistenza, d' induttanza, di tensione, ecc. ....).

Si vuole ancora aggiungere che, col passaggio dalle unità di misura internazionali a quelle assolute, sono cambiate pure alcune definizioni. Ad esempio l'ampere internazionale risulta definito come l' intensità di quella corrente costante che determina al catodo di un voltametro al

nitrato d'argento il deposito di $1{,}118 \cdot 10^{-6}$ kg d'argento al secondo, mentre l'ampere assoluto viene definito come l' intensità di quella corrente costante che, mantenuta in due conduttori paralleli, rettilinei, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, nel vuoto, produrrebbe tra questi conduttori una forza eguale a $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro di lunghezza.

TABELLA 6.2. — *Ragguaglio fra unità internazionali ed assolute.*

Grandezza fisica	Denominazione	$\frac{\text{unità internaz.}}{\text{unità assoluta}}$
Quantità di elettricità	coulomb	0,99985
Intensità di corrente	ampere	0,99985
Resistenza elettrica	ohm	1,00049
D.d.p., *f.e.m.*, tensione	volt	1,00034
Campo elettrico	volt/metro	1,00034
Capacità	farad	0,99951
Campo magnetico	amperspira/metro	0,99985
Permeabilità magnetica	henry/metro	1,00049
Induzione magnetica	weber/metro^2	1,00034
Flusso magnetico	weber	1,00034
Auto e mutua induzione	henry	1,00049

6.3 Razionalizzazione delle formule

Si vuole qui accennare ad una questione generale che può essere messa in discussione con qualunque sistema di unità di misura usato.

Si tratta di questo : nell'elettrostatica e nell'elettromagnetismo alcune formule mostrano un fattore numerico eguale a 4π $\Big[$vedi ad esempio formule 3.111-10 $\left(K = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$, 3.115-1 $(C = 4\pi\varepsilon_0 r)$, 4.15-1 $\left(H = \dfrac{I}{2\pi d} = \dfrac{2I}{4\pi d}\right)\Big]$, mentre altre non presentano tale fattore $\Big[$vedi ad

esempio formule 3.112-5 $\left(C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\right)$, 4.17-2 $\left(\int H_0 dl = NI\right)$, 4.48-3 $\left(L = \frac{\mu N^2 S}{l}\right)\Big]$. Osservando meglio, ci si può accorgere d'altronde che il fattore numerico 4π non dà di solito, nelle formule dove esso compare, alcun inconveniente (concettuale) mentre lo darebbe in quelle espressioni che ora appaiono senza. Infatti, ad esempio, nella formula 3.111-10, che permette il calcolo del campo elettrico $\left(K = \frac{Q}{4\pi r \cdot \varepsilon_0}\right)$, il fattore 4π, se associato ad r, dà l'idea della superficie $(4\pi r)$ passante per il punto ove viene calcolato il valore del campo K, superficie attraverso la quale passano tutte le linee di forza generate dalla carica Q; la stessa cosa può dirsi per la formula 3.115-1 che dà la capacità $(C = = 4\pi r \cdot \varepsilon_0)$ di un corpo sferico (di superficie $4\pi r$) posto nel vuoto (ε_0).

Si può precisare a questo proposito come tutte le formule riportate nel testo, che sono quelle impiegate comunemente oggi giorno e che derivano in sostanza dal fatto di aver assegnato alla costante k della formula 3.12-1 $\left(F = k \frac{Q_1 Q_2}{d^2}\right.$, legge di Coulomb) l'espressione:

6.3-1 $$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

cioè di aver dato alla costante dielettrica ε_0 il valore:

6.3-2 $$\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \text{ farad/metro},$$

siano dette *razionalizzate* in contrapposto a quelle cosiddette *classiche* o *non razionalizzate* che diversi anni fa venivano ancora usate. Queste ultime derivavano dall'avere posto eguale ad $1/\varepsilon_0$ la costante k della formula 3.12-1, per cui risultava di conseguenza $\varepsilon_0 = 4\pi \cdot 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ farad/metro.

Naturalmente va subito detto che la razionalizzazione delle formule ha portato in pratica diversi benefici (infatti ha fatto sparire il fattore 4π da molte formule di uso corrente; tuttavia esso è comparso, ad onor del vero, in altre formule, però di minore applicazione pratica) determinando nello stesso tempo maggiore *simmetria* fra elettrostatica ed elettromagnetismo.

Siccome dunque con la razionalizzazione delle formule la costante dielettrica assoluta del vuoto assume il valore dato in 6.3-2, si può dedurre che il nome di *razionalizzato* spetta pure all'attuale sistema Giorgi, che fornisce appunto alla costante ε_0 tale valore.

Concludendo, il sistema Giorgi oggi impiegato è quello razionalizzato e usa le unità *assolute*, come accennato nel precedente paragrafo. La tabella 6.3 ne riporta un quadro riassuntivo per tutte le grandezze fisiche incontrate nello studio dell'Elettrotecnica.

TABELLA 6.3. — *Quadro riassuntivo delle unità di misura.*

Grandezza fisica	Simbolo	Unità sistema Giorgi razionalizzato		Dimensioni	
		Denominazione	Abbreviaz.	M.K.S.Ω.	M.K.S.A.
Lunghezza	l	metro	m	L	L
Massa	m	chilogrammo-massa	kg	M	M
Tempo	t	secondo	sec	T	T
Velocità	u	metro/secondo	m/sec	LT^{-1}	LT^{-1}
Velocità angolare	ω	radiante/sec.	rad/sec	T^{-1}	T^{-1}
Forza	F	newton	N	LMT^{-2}	LMT^{-2}
Lavoro, energia	W	joule	J	L^2MT^{-2}	L^2MT^{-2}
Potenza	P	watt	W	L^2MT^{-3}	L^2MT^{-3}
Quantità di elettricità	Q	coulomb	C	$LM^{1/2}T^{-1/2}R^{-1/2}$	TA
Intensità di corrente	I	ampere	A	$LM^{1/2}T^{-3/2}R^{-1/2}$	A
Densità di corrente	σ	ampere/metro²	A/m²	$L^{-1}M^{1/2}T^{-3/2}R^{-1/2}$	$L^{-2}A$
Resistenza elettrica	R	ohm	Ω	R	$L^2MT^{-3}A^{-2}$
Resistività elettrica	ρ	ohm·metro	Ω·m	LR	$L^3MT^{-3}A^{-2}$
Conduttanza elettrica	G	siemens	S	R^{-1}	$L^{-2}M^{-1}T^3A^2$
Conducibilità elettrica	γ	siemens/metro	S/m	$L^{-1}R^{-1}$	$L^{-3}M^{-1}T^3A^2$
D.d.p., *f.e.m.*, tensione	V	volt	V	$LM^{1/2}T^{-3/2}R^{1/2}$	$L^2MT^{-3}A^{-1}$
Campo elettrico	K	volt/metro	V/m	$M^{1/2}T^{-3/2}R^{1/2}$	$LMT^{-3}A^{-1}$
Costante dielettrica	ε	farad/metro	F/m	$L^{-1}TR^{-1}$	$L^{-3}M^{-1}T^4A^2$
Induzione elettrica	D	coulomb/metro²	C/m²	$L^{-1}M^{1/2}T^{-1/2}R^{-1/2}$	$L^{-2}TA$
Capacità	C	farad	F	TR^{-1}	$L^{-2}M^{-1}T^4A^2$
Campo magnetico	H	ampersp./metro	Asp/m	$M^{1/2}T^{-3/2}R^{-1/2}$	$L^{-1}A$
Forza magnetomotrice	$\mathfrak{F}$	amperspira	Asp	$LM^{1/2}T^{-3/2}R^{-1/2}$	A
Permeabilità magnetica	μ	henry/metro	H/m	$L^{-1}TR$	$LMT^{-2}A^{-2}$
Induzione magnetica	B	weber/metro²	Wb/m²	$L^{-1}M^{1/2}T^{-1/2}R^{1/2}$	$MT^{-2}A^{-1}$
Flusso magnetico	$\Phi(B)$	weber	Wb	$LM^{1/2}T^{-1/2}R^{1/2}$	$L^2MT^{-2}A^{-1}$
Riluttanza	$\mathfrak{R}$	henry⁻¹	H⁻¹	$T^{-1}R^{-1}$	$L^{-2}M^{-1}T^2A^2$
Permeanza	$\mathfrak{P}$	henry	H	TR	$L^2MT^{-2}A^{-2}$
Auto e mutua induzione	L, M	henry	H	TR	$L^2MT^{-2}A^{-2}$

RETI ELETTRICHE LINEARI IN REGIME SINUSOIDALE 7

7.1 Introduzione

In questo capitolo si esporranno alcune proprietà ed applicazioni della teoria dei circuiti, con particolare riguardo alle reti elettriche lineari in regime sinusoidale. Scopo del presente capitolo è quindi quello di ampliare le nozioni sui circuiti elettrici a corrente alternata al fine di fornire i mezzi più idonei e più facili per la loro risoluzione.

E' importante notare subito a questo proposito che tutti i principi enunciati per le reti in regime di corrente continua (*capitolo* 2) *in virtù del criterio generale di Kennelly-Steinmetz si estendono anche alle reti elettriche in corrente alternata.*

Pertanto, ad esempio, il principio della sovrapposizione degli effetti, i principi di Thévenin, di Norton e di Millman, i principi di sostituzione, compensazione e reciprocità non verranno ora nè enunciati nè illustrati, essendo assai semplice la loro applicazione ai circuiti a corrente alternata, come mostreranno infatti gli esercizi riportati alla fine di questo paragrafo.

Naturalmente i su richiamati principi e quelli che verranno enunciati possono applicarsi solamente se la rete è lineare, cioè se gli elementi che la compongono sono lineari. Benché la definizione di elemento lineare in corrente alternata sia facile in base al criterio di Kennelly-Steinmetz, e quindi potrebbe essere omessa, tuttavia si preferisce, per maggiore chiarezza e comodità, riportare e precisare quanto segue:

Elementi passivi

Sono elementi lineari passivi quelli che ubbidiscono ad una legge come quella riportata in fig. 7.1-1. Ciò avviene quando l'impedenza $\overline{Z}$ o l'ammettenza $\overline{Y}$ di ciascun elemento è costante, cioè indipendente dal valore della corrente che lo attraversa o della tensione ad esso applicata. In particolare si ricorda che gli elementi circuitali risultano caratterizzati in pratica da combinazioni (serie-parallelo) di alcuni o anche di tutti i seguenti quattro parametri elettrici fondamentali:

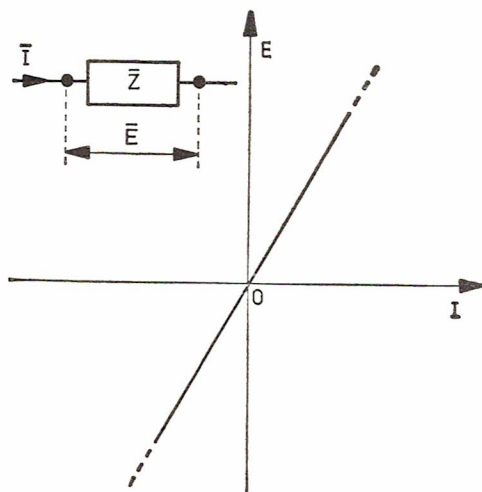



Fig. 7.1-1

— resistenza (legge di proporzionalità: $\overline{E} = R\overline{I}$);
— induttanza (legge di proporzionalità: $\overline{E} = j\,\omega L\overline{I}$);
— capacità (legge di proporzionalità: $\overline{E} = -j\,\dfrac{1}{\omega C}\,\overline{I}$)
— mutua induttanza (legge di proporzionalità: $\overline{E}_1 = -j\,\omega M\overline{I}_2$, $\overline{E}_2 = -j\,\omega M\overline{I}_1$).

Se dunque i su richiamati parametri sono costanti, gli elementi circuitali allora risulteranno lineari. D'altronde, ad esempio, affinché la resistenza di un corpo si possa considerare costante occorrerà che questo nel riscaldarsi vari di poco la sua resistenza, affinché l'induttanza di un circuito risulti costante occorrerà che la permeabilità del mezzo in cui si sviluppa il flusso magnetico sia costante, che il circuito durante il funzionamento non abbia a cambiare le sue dimensioni geometriche, ecc..

Elementi attivi

Gli elementi attivi sono costituiti dai generatori di energia elettrica. Questi, nella teoria dei circuiti, possono essere considerati, a seconda delle circostanze, come generatori di tensione o di corrente; mentre essi saranno lineari solo se la loro caratteristica si presenterà come in fig. 7.1-2. Cioè un generatore di tensione è lineare quando la caduta di tensione, dovuta all'impedenza interna $\overline{Z}_0$, risulta proporzionale alla corrente erogata; così un generatore di corrente è lineare quando la corrente derivata dall'ammettenza interna $\overline{Y}_0$ risulta proporzionale alla tensione esistente ai suoi morsetti.

Si noti che, come già fu precisato nel capitolo 2, un qualsiasi generatore reale di energia, purché lineare, può essere schematizzato indifferentemente:

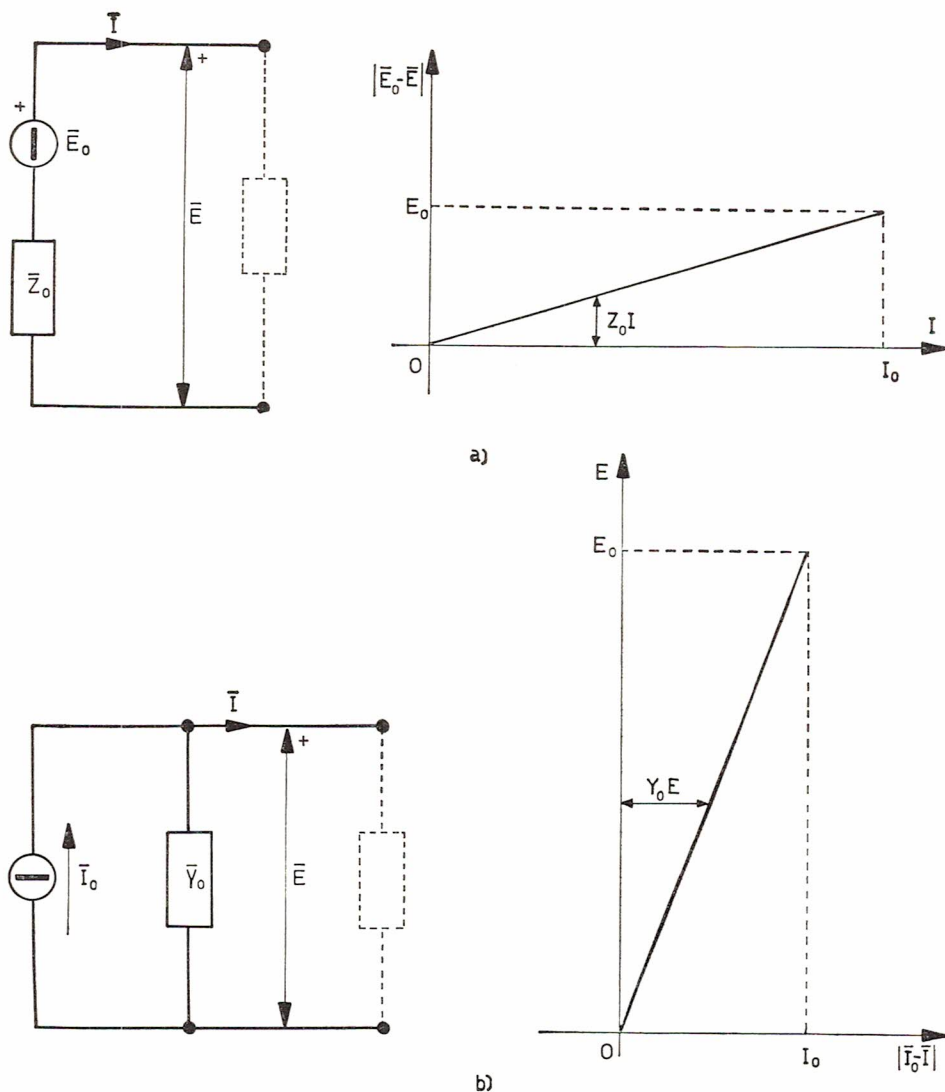



Fig. 7.1-2

— con un generatore ideale di tensione di *f.e.m.* $\overline{E}_0$ avente in serie un' impedenza $\overline{Z}_0$ (vedi fig. 7.1-2*a*) ;

— con un generatore ideale di corrente di intensità $\overline{I}_0$ avente in parallelo un'ammettenza $\overline{Y}_0$ (vedi fig. 7.1-2*b*).

La perfetta equivalenza delle due schematizzazioni si basa sul fatto che un qualsiasi generatore reale, purché lineare, presenta una tensione a vuoto $\overline{E}_0$ e una corrente di cortocircuito $\overline{I}_0$ ben determinate e legate fra di loro dalle seguenti semplici relazioni :

7.1-1 $$\overline{E}_0 = \overline{Z}_0 \overline{I}_0 \qquad \overline{I}_0 = \overline{Y}_0 \overline{E}_0 ,$$

dove:

7.1-2 $$\overline{Y}_0 = \frac{1}{\overline{Z}_0} .$$

Esercizio 7.11 (Sovrapposizione degli effetti)

Si trovi la corrente assorbita dall' impedenza di carico $\overline{Z}_u$ facente parte della rete riportata in fig. 7.11-1.

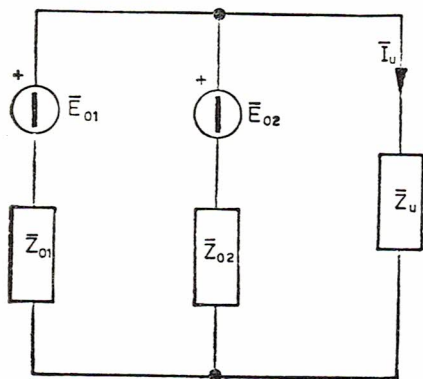



Fig. 7.11-1

Soluzione

Volendo applicare il principio della sovrapposizione degli effetti (metodo che in questo caso non è il più celere), basterà calcolare separatamente le due correnti $\overline{I}'_u$ ed $\overline{I}''_u$ che compaiono nelle due reti di fig. 7.11-2*a* e *b* e quindi eseguirne la somma *vettoriale*.

Sarà perciò, con riferimento alla rete di fig. 7.11-2*a* (dove il generatore E_{02} risulta cortocircuitato):

$$\overline{I}'_u = \frac{\overline{E}_{01}}{\overline{Z}_{01} + \dfrac{\overline{Z}_{02}\overline{Z}_u}{\overline{Z}_{02} + \overline{Z}_u}} \; \frac{\overline{Z}_{02}}{\overline{Z}_{02} + \overline{Z}_u} ,$$

espressione che si può notevolmente semplificare poiché $\overline{Z}_{01} = \overline{Z}_{02}$. Si ha così:

$$\overline{I}'_u = \frac{\overline{E}_{01}}{\overline{Z}_{02} + 2\,\overline{Z}_u} = \frac{100}{2 + j\,10 + 2\,(5 + j\,20)} = \frac{100}{12 + j\,50} =$$

$$= \frac{100\,(12 - j\,50)}{12^2 + 50^2} = 0{,}454 - j\,1{,}89 .$$

Con riferimento alla rete di fig. 7.11-**2**b, ove è il generatore E_{01} che ora viene cortocircuitato, la corrente $\bar{I}''_u$ risulta come segue:

$$\bar{I}''_u = \frac{\bar{E}_{02}}{\bar{Z}_{02} + \dfrac{\bar{Z}_{01}\bar{Z}_u}{\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_u}} \; \frac{\bar{Z}_{01}}{\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_u} .$$

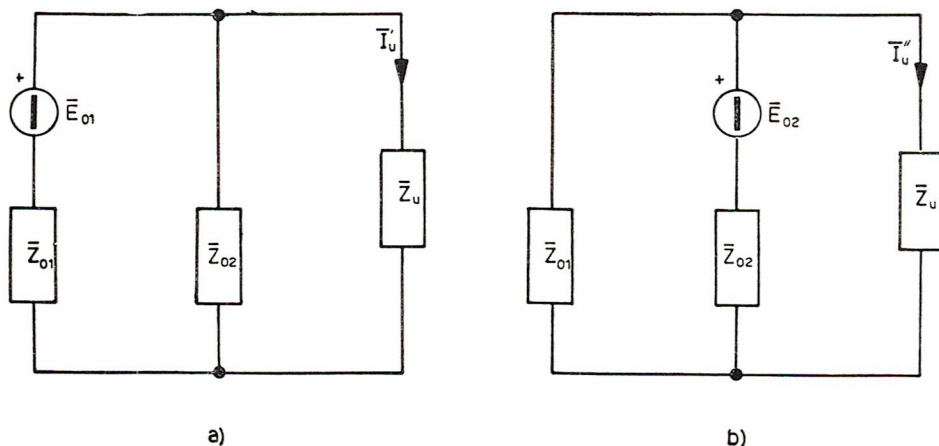



Fig. 7.11-2

Questa espressione si semplifica notevolmente poiché $\bar{Z}_{01} = \bar{Z}_{02}$. Pertanto si ottiene:

$$\bar{I}''_u = \frac{\bar{E}_{02}}{\bar{Z}_{01} + 2\,\bar{Z}_u} = \frac{100 + j\,100}{2 + j\,10 + 2\,(5 + j\,20)} = \frac{100 + j\,100}{12 + j\,50} =$$

$$= \frac{(100 + j\,100)(12 - j\,50)}{12^2 + 50^2} = \frac{6200 - j\,3800}{2644} = 2{,}343 - j\,1{,}44 .$$

In definitiva, per ottenere la corrente $\bar{I}_u$ basterà eseguire la somma vettoriale di $\bar{I}'_u$ e $\bar{I}''_u$, poiché queste correnti hanno lo stesso verso. Risulta dunque:

$$\bar{I}_u = \bar{I}'_u + \bar{I}''_u = 0{,}454 - j\,1{,}89 + 2{,}343 - j\,1{,}44 = 2{,}796 - j\,3{,}33 =$$

$$= 4{,}35\,\underline{|-49^0\,56'} .$$

Esercizio 7.12 (Principio di Thévenin)

Si risolva l'esercizio precedente 7.11 col principio di Thévenin.

Soluzione

Applicando il principio di Thévenin fra i punti A e B della rete assegnata (vedi fig. 7.12-1a), si ha che questa può essere ridotta al semplice circuito riportato in fig. 7.12-1b, dove:

— $\bar{E}_0$ rappresenta la *d.d.p.* fra i punti A e B in assenza di $\bar{Z}_u$, che con i dati del problema, ammonta a (vedi fig. 7.12-2a):

$$\bar{E}_0 = \bar{E}_{02} + \frac{\bar{E}_{01} - \bar{E}_{02}}{\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_{02}} \bar{Z}_{02} = 100 + j\,100 + \frac{100 - (100 + j\,100)}{2} =$$

$$= 100 + j\,50\,;$$

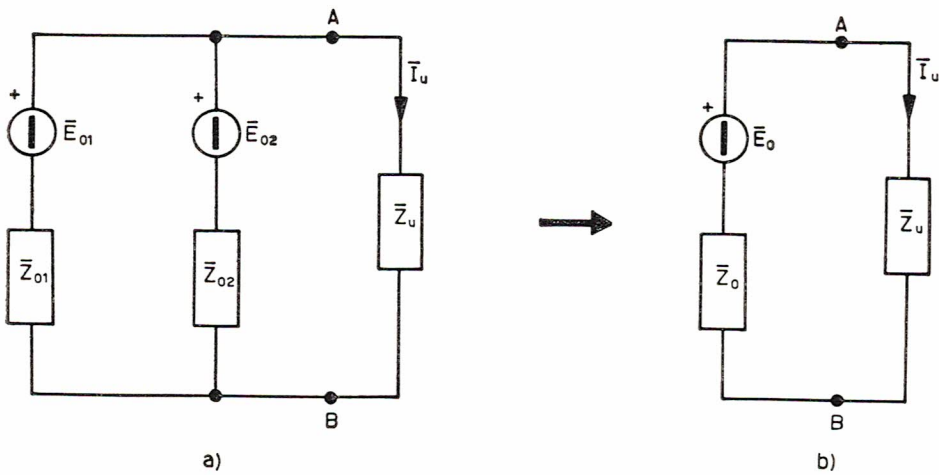
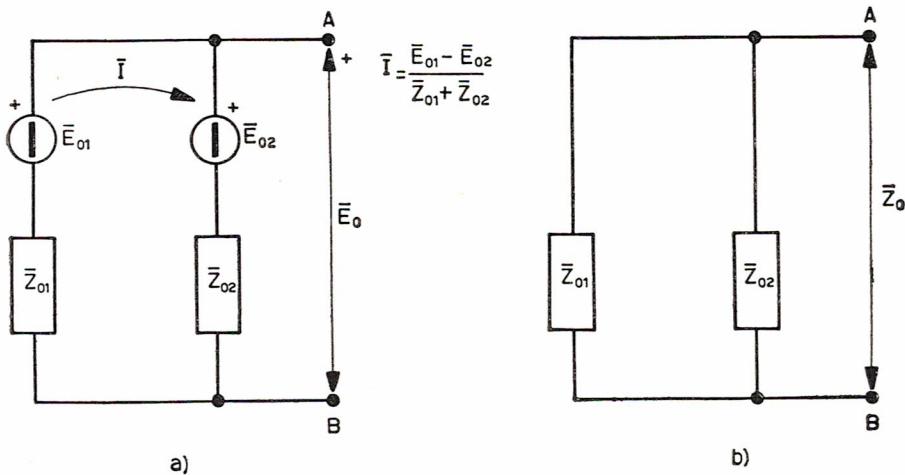



Fig. 7.12-1

Fig. 7.12-2

— $\overline{Z}_0$ rappresenta l' impedenza interna del generatore equivalente che vale (vedi fig. 7.12-2*b*):

$$\overline{Z}_0 = \frac{\overline{Z}_{01}\overline{Z}_{02}}{\overline{Z}_{01} + \overline{Z}_{02}} = \frac{\overline{Z}_{01}}{2} = 1 + j\,5\ ,$$

poiché $\overline{Z}_{01} = \overline{Z}_{02}$.

Pertanto la corrente nel carico $\overline{Z}_u$, con riferimento al circuito di fig. 7.12-1*b*, si potrà ora calcolare facilmente come segue:

$$\overline{I}_u = \frac{\overline{E}_0}{\overline{Z}_0 + \overline{Z}_u} = \frac{100 + j\,50}{1 + j\,5 + 5 + j\,20} = \frac{100 + j\,50}{6 + j\,25} =$$

$$= \frac{(100 + j\,50)(6 - j\,25)}{6^2 + 25^2} = \frac{1850 - j\,2200}{661} = 2{,}80 - j\,3{,}33 =$$

$$= 4{,}35 \underline{|-49^0\,56'}\ .$$

Esercizio 7.13 (Principio di Norton)

Si risolva l'esercizio 7.11 mediante il principio di Norton, anziché col principio di Thévenin.

Soluzione

Col principio di Norton è possibile schematizzare quella parte di rete che sta a sinistra del carico $\overline{Z}_u$ mediante un unico generatore ideale di corrente $\overline{I}_0$ avente in parallelo un'unica impedenza $\overline{Z}_0$, come appare in fig. 7.13-1.

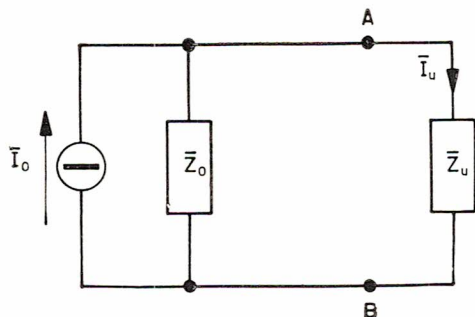



Fig. 7.13-1

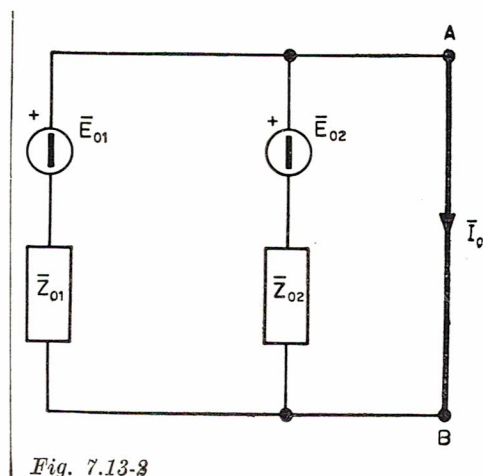



Fig. 7.13-2

Per calcolare la corrente di cortocircuito $\bar{I}_0$ basterà sostituire allora, nel circuito di fig. 7.11-1, all'impedenza di carico $\bar{Z}_u$ un collegamento privo di impedenza, come è stato fatto in fig. 7.13-2, e quindi cercare l'espressione della corrente che transita in tale collegamento.

Questo calcolo è assai facile poiché, ricorrendo al principio della sovrapposizione degli effetti, la corrente $\bar{I}_0$ di cortocircuito risulterà essere la somma (vettoriale) delle correnti inviate separatamente dai due generatori. Pertanto:

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}_{01}}{\bar{Z}_{01}} + \frac{\bar{E}_{02}}{\bar{Z}_{02}} = \frac{100}{2 + j\,10} + \frac{100 + j\,100}{2 + j\,10} = \frac{200 + j\,100}{2 + j\,10}.$$

D'altronde $\bar{Z}_0$ è il parallelo di $\bar{Z}_{01}$ e $\bar{Z}_{02}$, cioè, essendo $\bar{Z}_{01} = \bar{Z}_{02}$:

$$\bar{Z}_0 = \frac{1}{2}\,\bar{Z}_{01} = \frac{1}{2}(2 + j\,10)\,.$$

La corrente $\bar{I}_u$ nel carico $\bar{Z}_u$ varrà quindi, poiché gli elementi del circuito di fig. 7.13-1 sono tutti definiti, :

$$\bar{I}_u = \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_u}\,\bar{I}_0 = \frac{200 + j\,100}{2 + j\,10}\;\frac{\frac{1}{2}(2 + j\,10)}{1 + j\,5 + 5 + j\,20} =$$

$$= \frac{100 + j\,50}{6 + j\,25} = \frac{(100 + j\,50)(6 - j\,25)}{6^2 + 25^2} = 2{,}80 - j\,3{,}33 = 4{,}35\,\underline{|-49^0\,56'}.$$

Esercizio 7.14 (Principio di Millman)

Si trovi il valore (in modulo e fase) della tensione esistente fra i punti O ed O' della rete riportata in fig. 7.14-1*a*, sapendo che le tre tensioni $\bar{E}_a$, $\bar{E}_b$, $\bar{E}_c$ sono eguali in modulo (220 volt) ma sfasate fra di loro di 120^0, come appare nel diagramma di fig. 7.14-1*b*.

Soluzione

Applicando il teorema di Millman si ha immediatamente che:

$$\bar{E}_{00'} = \frac{\dfrac{\bar{E}_a}{\bar{Z}_a} + \dfrac{\bar{E}_b}{\bar{Z}_b} + \dfrac{\bar{E}_c}{\bar{Z}_c}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_a} + \dfrac{1}{\bar{Z}_b} + \dfrac{1}{\bar{Z}_c}}.$$

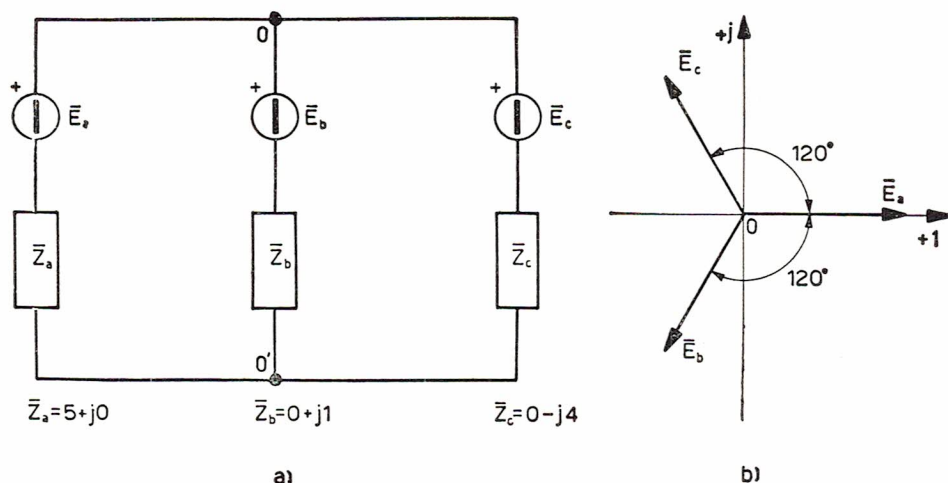



Fig. 7.14-1

D'altronde, per le tensioni dei tre generatori, con riferimento al diagramma vettoriale di fig. 7.14-1*b*, risulta che:

$$\bar{E}_b = \bar{E}_a\, \varepsilon^{-j\,120^0} = 220\,(\cos 120^0 - j \text{sen } 120^0) = -110 - j\,190{,}5 \;,$$

$$\bar{E}_c = \bar{E}_a\, \varepsilon^{j\,120^0} = 220\,(\cos 120^0 + j \text{sen } 120^0) = -110 + j\,190{,}5 \;.$$

Pertanto, sostituendo nella formula sopra scritta, si ottiene:

$$\bar{E}_{00'} = \frac{\dfrac{220}{5} + \dfrac{-110 - j\,190{,}5}{j\,1} + \dfrac{-110 + j\,190{,}5}{-j\,4}}{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{j\,1} + \dfrac{1}{-j\,4}} =$$

$$= \frac{-194{,}1 + j\,82{,}5}{0{,}20 - j\,0{,}75} = -\frac{100{,}7 + j\,128{,}9}{0{,}60} = -(168 + j\,215)\,.$$

Il modulo di questa tensione vale dunque:

$$E_{00'} = \sqrt{168^2 + 215^2} = 273 \text{ volt}$$

e l'argomento ξ, essendo:

$$\text{tg } \xi' = \frac{215}{168} = 1{,}28 \qquad \xi' = 52^0\,,$$

ammonta a:

$$\xi = 52^0 + 180^0 = 232^0 = -128^0\,.$$

7.2 Legge di Ohm e principi di Kirchhoff

Assegnato un circuito elettrico chiuso, ad esempio come quello che appare in fig. 7.2-1, la legge di Ohm, espressione dell'equilibrio fra le varie *d.d.p.* presenti nel circuito, porta a scrivere la seguente ben nota relazione:

7.2-1 $$\Sigma\bar{E}_0 - \Sigma\bar{E}_{0c} = \bar{I}\Sigma\bar{Z}\,,$$

che, nel caso del circuito sopra menzionato, diventa:

7.2-2 $$\bar{E}_{01} - \bar{E}_{02} - \bar{E}_{03} = (\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{02} + \bar{Z}_{03})\bar{I}\,.$$

Si noti che per poter scrivere quest'equazione si è fatto uso delle normali convenzioni già note per i circuiti a corrente continua. In sostanza si è imposto alla corrente $\bar{I}$ un verso arbitrario (ad esempio quello destrogiro), si è poi scelto un verso di percorrenza (coincidente con quello assegnato alla corrente in maniera che le cadute di tensione risultino positive), quindi si è osservato quali tensioni dei generatori sono da considerarsi forze elettromotrici e quali controelettromotrici.

Per poter compiere quest' ultima operazione necessita però che i morsetti dei generatori presentino una polarità ben definita. Ma, dato che i generatori sono in corrente alternata, qual è il significato (cioè quale la convenzione) di queste polarità?

La polarità (+) assegnata ad un morsetto, ad esempio al morsetto P del generatore 1 del circuito di fig. 7.2-1, ha il significato di indicare semplicemente che la tensione del generatore viene intesa come *d.d.p.* fra il morsetto indicato col segno (+) (cioè il morsetto P) e quello indicato col segno (—) (cioè il morsetto M), ossia nel caso di fig. 7.2-1

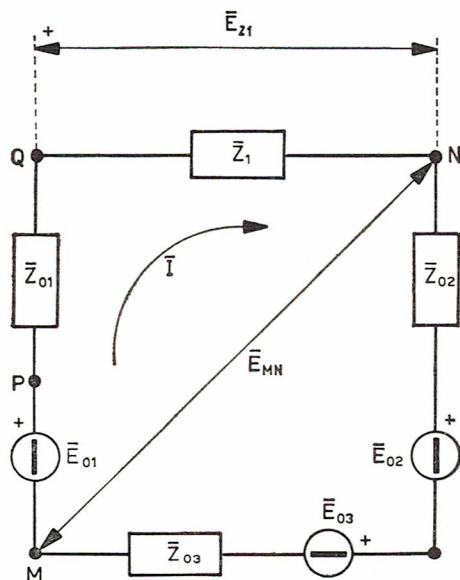



Fig. 7.2-1

che $\bar{E}_{01} = \bar{E}_{PM}$. Ciò è necessario appunto perché le tensioni altro non sono che delle differenze di potenziale (siano queste costanti o variabili non importa) [1].

Starà ovviamente a chi fornisce i dati del problema l'assicurarsi se le tensioni assegnate ai generatori con certe polarità corrisponderanno effettivamente alle *d.d.p.* rilevate [cioè se P è stato indicato positivo rispetto ad M si deve intendere che la *d.d.p.* è relativa ai morsetti contrassegnati rispettivamente con i simboli (+) e (—) e non rispettivamente con il (—) e (+)]. Si veda l'esercizio 7.21, che servirà ad illustrare ancor meglio quanto qui è stato precisato.

Le stesse cose potranno essere ripetute a proposito delle cadute di tensione nei diversi bipoli passivi che costituiscono il circuito, poiché tali cadute non sono altro che delle *d.d.p.*. Infatti, ad esempio, l'attribuire un segno (+) alla caduta di tensione $\bar{E}_{z1}$ (che appare in fig. 7.2-1) là dove entra la corrente $\bar{I}$, significa semplicemente che la tensione $\bar{E}_{z1}$ esprime la *d.d.p.* fra i punti Q ed N, cioè che $\bar{E}_{z1} = \bar{E}_{QN}$.

Naturalmente per un tronco di circuito sarà ancora valida la legge generale di Ohm, la quale in corrente alternata, in analogia a quanto visto nel § 1.52, si scriverà:

7.2-3 $$\bar{E}_{MN} = \Sigma \pm \bar{E}_0 + \Sigma \bar{Z}\bar{I}$$

se la corrente $\bar{I}$ ha il verso da M ad N (vedi anche fig. 7.2-2*a*), e che ad

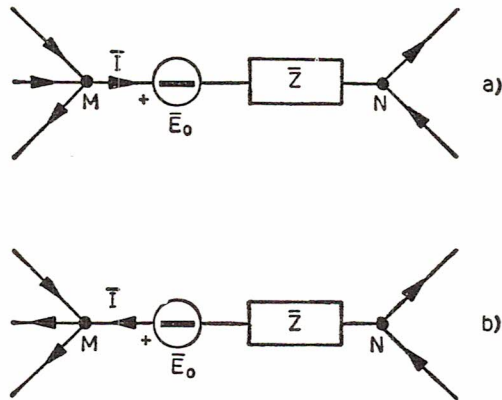



Fig. 7.2-2

esempio nel caso del tronco $MPQN$ di fig. 7.2-1 diventa:

7.2-4 $$\bar{E}_{MN} = -\bar{E}_{01} + (\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_1)\bar{I} \; ;$$

oppure:

---

[1] Infatti se ne è già fatto uso (vedi ad esempio § 5.52) anche per le grandezze sinusoidali espresse ai valori istantanei, oltre che espresse in forma simbolica (vedi ad esempio § 5.54).

7.2-5 $$\bar{E}_{MN} = \Sigma \pm \bar{E}_0 - \Sigma \bar{Z} \bar{I}$$

se la corrente $\bar{I}$ ha il verso da N ad M (vedi fig. 7.2-2*b*).

Quando il circuito risulta più complesso si dovrà fare uso naturalmente dei principi di Kirchhoff, dei quali già si è parlato nel § 5.56. Ciò che qui interessa mettere ancora in risalto è che per le reti elettriche in regime sinusoidale valgono (in base al criterio di Kennelly-Steinmetz) le stesse proprietà, le stesse regole, le stesse convenzioni viste a suo tempo a proposito delle reti elettriche a corrente continua, come gli esercizi riportati in fine di paragrafo mostrano chiaramente.

Perciò, prima di accingersi alla soluzione, occorrerà che i generatori siano noti non soltanto nei loro valori della tensione o della corrente, ma anche nelle polarità o nei versi di queste; occorrerà poi assegnare alle correnti dei vari rami, se queste sono incognite, dei versi arbitrari. Solo dopo tali operazioni preliminari sarà possibile accingersi a scrivere il primo principio e, dopo aver fissato il verso (arbitrario) di percorrenza delle maglie, il secondo principio. Sarà bene quindi, alla fine della risoluzione, tracciare per i nodi i diagrammi vettoriali delle correnti, e per le maglie quelli delle tensioni. Ciò servirà di controllo, poiché ovviamente si potrà verificare, per i nodi, la condizione $\Sigma \bar{I} = 0$ e per le maglie la condizione $\Sigma \bar{E} - \Sigma \bar{Z} \bar{I} = 0$.

Esercizio 7.21

Si trovi la differenza di potenziale fra i punti B ed O del circuito elettrico riportato in fig. 7.21-1*a*. Le tensioni dei due generatori sinusoi-

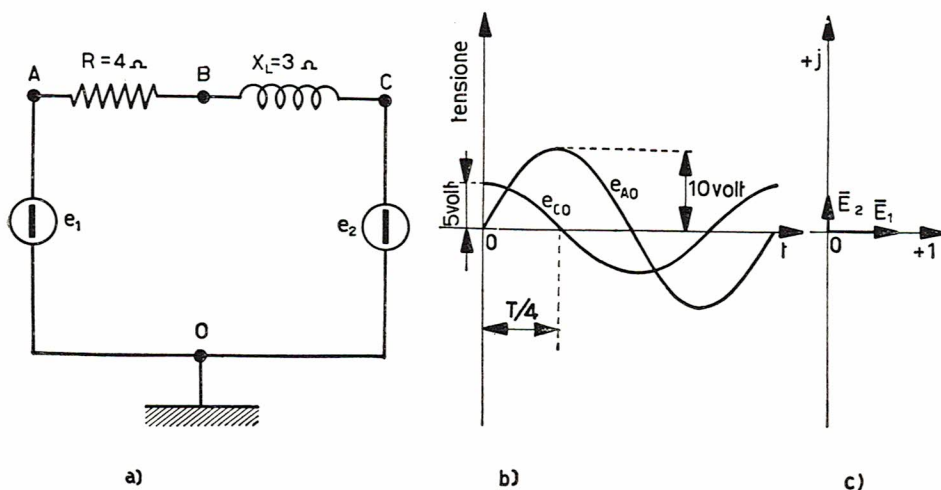



Fig. 7.21-1

dali isofrequenziali sono state misurate rispetto a massa (punto O) ed appaiono nel diagramma di fig. 7.21-1*b*.

Soluzione

Al diagramma delle tensioni istantanee riportato in fig. 7.21-1*b* corrisponde il diagramma vettoriale di fig. 7.21-1*c*, purché come tensione $\bar{E}_1$ si intenda la tensione $\bar{E}_{AO}$ (cioè la *d.d.p.* fra i punti A ed O): per questo motivo al morsetto A del generatore 1 si assegnerà la polarità positiva; così ragionando analogamente per l'altra tensione $\bar{E}_2$ risulterà positivo il morsetto C del generatore 2.

Il circuito di fig. 7.21-1*a* diventa allora, dopo quanto è stato precisato e con le solite notazioni simboliche, come quello riportato in fig. 7.21-2,

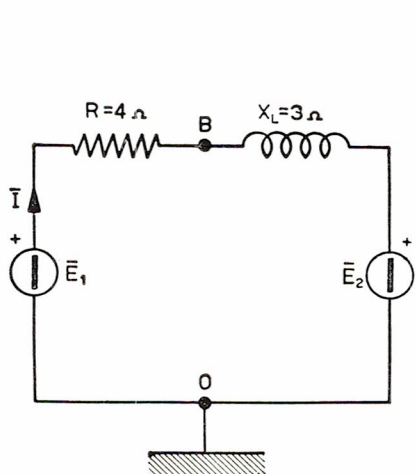



Fig. 7.21-2

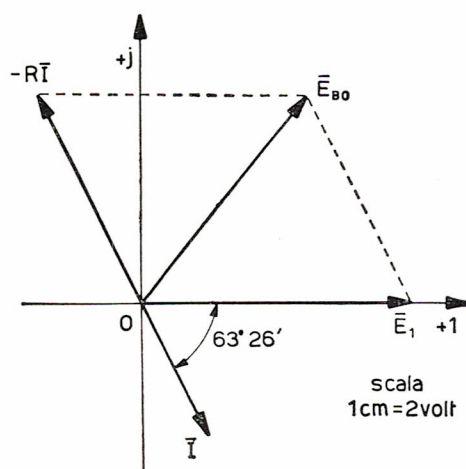



Fig. 7.21-3

ove con E_1 ed E_2 si intendono i valori efficaci delle tensioni date. Pertanto $\bar{E}_1 = \dfrac{10}{\sqrt{2}} + j\,0$, $\bar{E}_2 = 0 + j\,\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

La soluzione è, a questo punto, assai facile. Assunto come verso della corrente $\bar{I}$ quello destrogiro, per la legge di Ohm si ha:

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = (R + j\,X_L)\,\bar{I}\,,$$

da cui risulta:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{R + j\,X_L} = \frac{10 - j\,5}{\sqrt{2}\,(4 + j\,3)} = 0{,}707 - j\,1{,}41\,.$$

Applicando ora la formula 7.2-5 all'arco BAO, la *d.d.p.* $\bar{E}_{BO}$ cercata varrà:

$$\bar{E}_{BO} = -R\bar{I} + \bar{E}_1 = -4\,(0{,}707 - j\,1{,}41) + 7{,}07 = 4{,}24 + j\,5{,}64 =$$
$$= 7{,}07 \,\underline{|\,53^0\,8'}\,.$$

Per controllo si è tracciato il relativo diagramma vettoriale. Questo appare in fig. 7.21-3.

Esercizio 7.22

Si trovi la differenza di potenziale fra i due punti B e D della rete riportata in fig. 7.22-1, quando essa è alimentata con una tensione sinusoidale $E = 100$ volt.

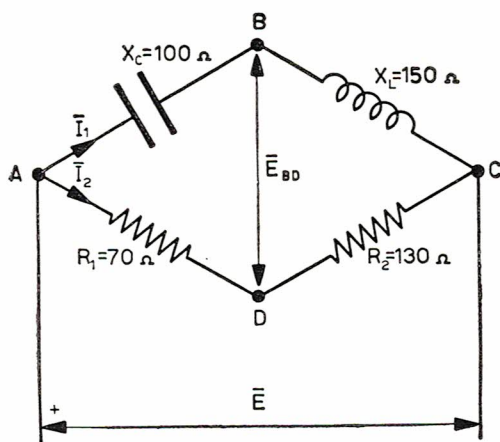



Fig. 7.22-1

Soluzione

La *d.d.p.* fra i punti B e D (tensione $\bar{E}_{BD}$) verrà riferita alla tensione di alimentazione $\bar{E}$, la quale pertanto potrà essere posta sull'asse reale. D'altronde la *d.d.p.* $\bar{E}_{BD}$ si calcolerà ad esempio osservando che per la *maglia* $ABDA$ si può scrivere:

$$\bar{E}_{AB} + \bar{E}_{BD} + \bar{E}_{DA} = 0\,,$$

da cui quindi:

$$\bar{E}_{BD} = -\bar{E}_{AB} - \bar{E}_{DA} = -\bar{E}_{AB} + \bar{E}_{AD}\,.$$

Ma le tensioni $\bar{E}_{AB}$ ed $\bar{E}_{AD}$ altro non sono che le cadute di tensione nella capacità e nella resistenza R_1 le quali, in base alla polarità positiva assegnata dal problema alla tensione di alimentazione $\bar{E}$ e quindi per i conseguenti versi delle correnti nei due rami, valgono (vedi circuito di fig. 7.22-1):

$$\bar{E}_{AB} = -jX_c\,\bar{I}_1 = -jX_c\,\frac{E}{j\,(X_L - X_c)} = \frac{-j\,100\cdot 100}{j\,(150 - 100)} = -200 + j\,0\,,$$

$$\bar{E}_{AD} = R_1\bar{I}_2 = R_1\,\frac{E}{R_1 + R_2} = 70\,\frac{100}{70 + 130} = 35 + j\,0\,.$$

Perciò, in definitiva, la *d.d.p.* da trovare ammonta a:

$$\bar{E}_{BD} = -(-200) + 35 = 235 \text{ volt}\,.$$

Essa risulta in fase con la tensione di alimentazione. Si veda anche il diagramma vettoriale relativo alla rete data, che è stato riportato in fig. 7.22-2.

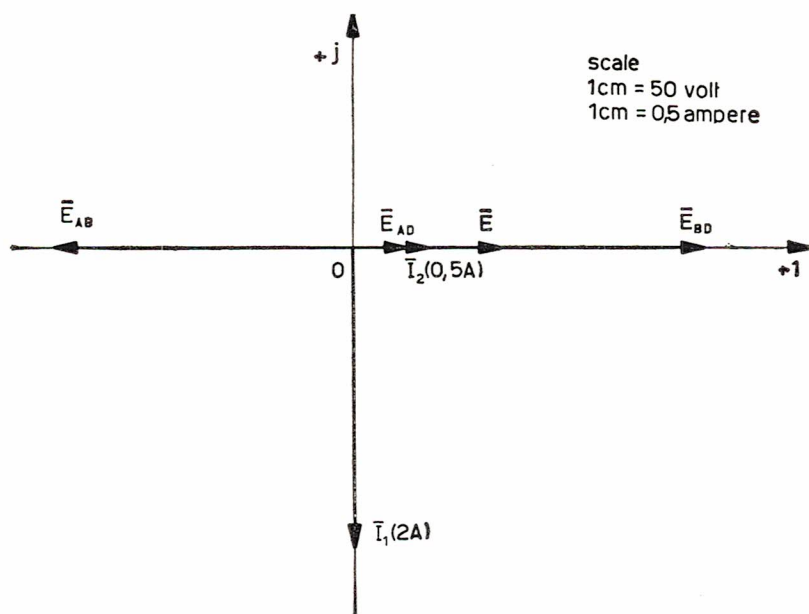



Fig. 7.22-2

Esercizio 7.23

Mediante i principi di Kirchhoff si risolva completamente la rete elettrica riportata nell'esercizio 7.11.

Soluzione

Assegnate alle correnti dei tre rami costituenti la rete data i versi che appaiono in fig. 7.23-1, si potrà scrivere il seguente sistema di equazioni:

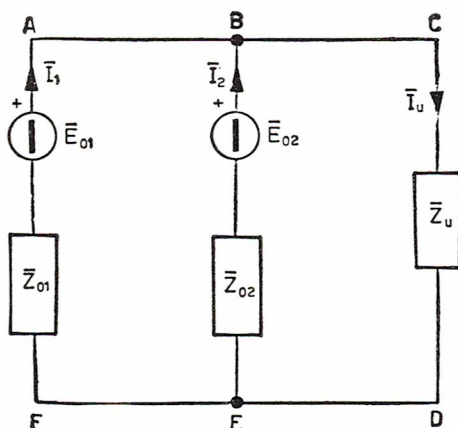



Fig. 7.23-1

$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_u$ (1° principio, nodo B),

$\bar{E}_{01} - \bar{E}_{02} = \bar{Z}_{01}\bar{I}_1 - \bar{Z}_{02}\bar{I}_2$ (2° principio, maglia $ABEFA$),

$\bar{E}_{01} = \bar{Z}_{01}\bar{I}_1 + \bar{Z}_u\bar{I}_u$ (2° principio, maglia $ACDFA$).

Nell' ultima equazione è possibile però eliminare la corrente incognita $\bar{I}_u$, e ciò in base alla prima equazione. Si ha così:

$$\bar{E}_{01} = (\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_u)\bar{I}_1 + \bar{Z}_u\bar{I}_2 .$$

Ricavando ora da quest'equazione l'espressione della corrente $\bar{I}_2$:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_{01} - (\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_u)\bar{I}_1}{\bar{Z}_u}$$

e andandola a sostituire nella seconda equazione del sistema, si ottiene la seguente relazione nella sola incognita $\bar{I}_1$:

$$\bar{E}_{01} - \bar{E}_{02} = \bar{Z}_{01}\bar{I}_1 - \frac{\bar{Z}_{02}}{\bar{Z}_u}\bar{E}_{01} + \frac{\bar{Z}_{02}}{\bar{Z}_u}(\bar{Z}_{01} + \bar{Z}_u)\bar{I}_1 ,$$

dalla quale si ricava:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_{01} - \bar{E}_{02} + \dfrac{\bar{Z}_{02}}{\bar{Z}_u}\bar{E}_{01}}{\bar{Z}_{01} + \dfrac{\bar{Z}_{01}\bar{Z}_{02}}{\bar{Z}_u} + \bar{Z}_{02}} =$$

$$= \frac{100 - (100 + j\,100) + \dfrac{2 + j\,10}{5 + j\,20}\,100}{2 + j\,10 + \dfrac{(2 + j\,10)(2 + j\,10)}{5 + j\,20} + 2 + j\,10} =$$

$$= \frac{49{,}4 - j\,97{,}6}{4{,}78 + j\,25} = \frac{(49{,}4 - j\,97{,}6)(4{,}78 - j\,25)}{22{,}8 + 625} = -\,(3{,}41 + j\,2{,}62).$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione che fornisce la corrente $\overline{I}_2$, si ottiene:

$$\overline{I}_2 = \frac{100 + (2 + j\,10 + 5 + j\,20)(3{,}41 + j\,2{,}62)}{5 + j\,20} =$$

$$= \frac{100 + (7 + j\,30)\,(3{,}41 + j\,2{,}62)}{5 + j\,20} = \frac{45{,}25 + j\,120{,}5}{5 + j\,20} =$$

$$= \frac{(45{,}25 + j\,120{,}5\,)(5 - j\,20)}{25 + 400} = 6{,}20 - j\,0{,}71\,.$$

La corrente $\overline{I}_u$ vale perciò:

$$\overline{I}_u = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = -\,3{,}41 - j\,2{,}62 + 6{,}20 - j\,0{,}71 = 2{,}79 - j\,3{,}33\,,$$

valore questo del tutto eguale a quello già trovato per la stessa corrente nell'esercizio 7.11.

Come controllo dei risultati ottenuti (facendo astrazione dal fatto che in questo caso l'esercizio è stato risolto precedentemente per altra via) si potrà tracciare il diagramma vettoriale che interpreta il 1° principio di Kirchhoff e almeno una delle due equazioni derivanti dal 2° principio di Kirchhoff, ad esempio la terza del sistema di equazioni di partenza. Si veda a tale proposito la fig. 7.23-2.

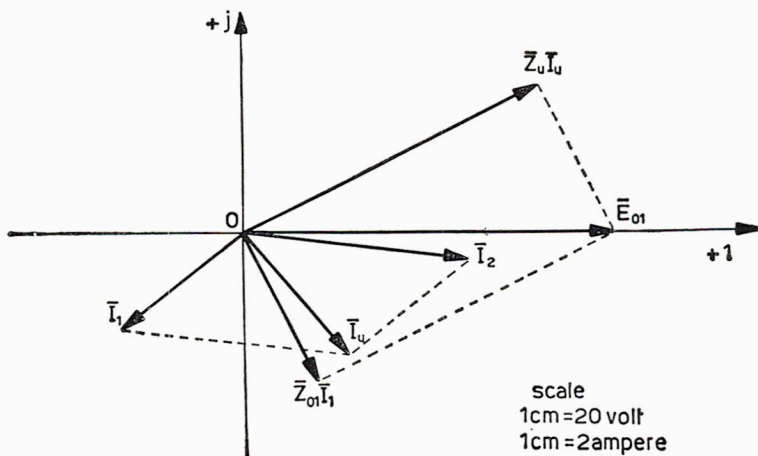



Fig. 7.23-2

7.3 Trasformazione triangolo-stella e stella-triangolo di impedenze e di ammettenze

Nel § 11 del secondo capitolo è stato indicato come sia sempre possibile sostituire tre resistenze, colleganti a triangolo tre punti ben determinati di una rete elettrica, con tre resistenze fra loro collegate a stella, facenti capo agli stessi tre punti che costituiscono i vertici del triangolo, e così viceversa come sia sempre possibile sostituire ad una stella di resistenze un triangolo equivalente di resistenze.

Ora, in regime sinusoidale, in base al criterio generale di Kennelly-Steinmetz, è possibile estendere l'equivalenza sopra enunciata al caso di tre qualsiasi impedenze collegate a stella o a triangolo. Pertanto

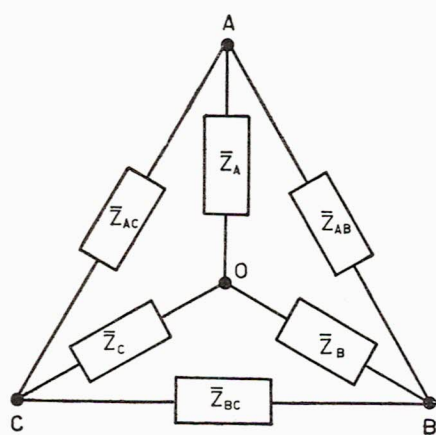



Fig. 7.3-1

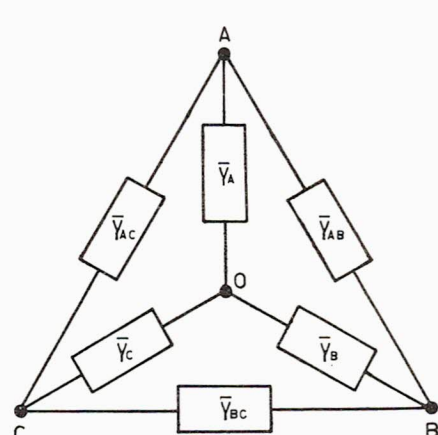



Fig. 7.3-2

le formule di trasformazione che consentono il passaggio dal triangolo alla stella equivalente (fig. 7.3-1) risultano, in analogia con le formule 2.11-1, 2, 3, come segue:

7.3-1
$$\bar{Z}_A = \frac{\bar{Z}_{AB}\bar{Z}_{AC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}}$$

7.3-2
$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{Z}_{AB}\bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}}$$

7.3-3
$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{Z}_{AC}\bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}};$$

mentre, sempre per la trasformazione triangolo-stella di ammettenze (fig. 7.3-2), risulta di conseguenza:

7.3-4 $$\overline{Y}_A = \overline{Y}_{AB} + \overline{Y}_{AC} + \frac{\overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC}}{\overline{Y}_{BC}}$$ (1)

7.3-5 $$\overline{Y}_B = \overline{Y}_{AB} + \overline{Y}_{BC} + \frac{\overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{BC}}{\overline{Y}_{AC}}$$

7.3-6 $$\overline{Y}_C = \overline{Y}_{BC} + \overline{Y}_{AC} + \frac{\overline{Y}_{BC}\,\overline{Y}_{AC}}{\overline{Y}_{AB}}.$$

Il passaggio invece dalla stella di impedenze al suo triangolo equivalente è retto da formule analoghe a quelle viste in 2.11-4, 5, 6. Perciò risulta :

7.3-7 $$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_A + \overline{Z}_B + \frac{\overline{Z}_A\overline{Z}_B}{\overline{Z}_C}$$

7.3-8 $$\overline{Z}_{BC} = \overline{Z}_B + \overline{Z}_C + \frac{\overline{Z}_B\overline{Z}_C}{\overline{Z}_A}$$

7.3-9 $$\overline{Z}_{AC} = \overline{Z}_A + \overline{Z}_C + \frac{\overline{Z}_A\overline{Z}_C}{\overline{Z}_B},$$

dalle quali è facile dedurre che, per la trasformazione stella-triangolo di ammettenze, valgono le seguenti formule :

---

(1) Questa espressione è stata ricavata dalla corrispondente 7.3-1. Infatti :

$$\overline{Y}_A = \frac{1}{\overline{Z}_A} = \frac{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} + \overline{Z}_{AC}}{\overline{Z}_{AB}\,\overline{Z}_{AC}} = \frac{\dfrac{1}{\overline{Y}_{AB}} + \dfrac{1}{\overline{Y}_{BC}} + \dfrac{1}{\overline{Y}_{AC}}}{\dfrac{1}{\overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\overline{Y}_{BC}\,\overline{Y}_{AC} + \overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC} + \overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{BC}}{\overline{Y}_{AB}\overline{Y}_{BC}\,\overline{Y}_{AC}}}{\dfrac{1}{\overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC}}} = \frac{\overline{Y}_{BC}\,\overline{Y}_{AC} + \overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC} + \overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{BC}}{\overline{Y}_{BC}} =$$

$$= \overline{Y}_{AB} + \overline{Y}_{AC} + \frac{\overline{Y}_{AB}\,\overline{Y}_{AC}}{\overline{Y}_{BC}}.$$

Così analogamente per le espressioni 7.3-5 e 6.

$$\overline{Y}_{AB} = \frac{\overline{Y}_A \, \overline{Y}_B}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C} \tag{7.3-10}$$ (2)

$$\overline{Y}_{BC} = \frac{\overline{Y}_B \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C} \tag{7.3-11}$$

$$\overline{Y}_{AC} = \frac{\overline{Y}_A \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C}. \tag{7.3-12}$$

È importante notare che tutte le formule sopra riportate sono valevoli per qualsiasi frequenza di lavoro ; ma è altresì importante ricordare che le impedenze costituenti la stella o il triangolo di partenza variano di valore al variare della frequenza per cui, ad esempio, una certa stella e il suo triangolo equivalente sono in realtà equivalenti fra loro sola-

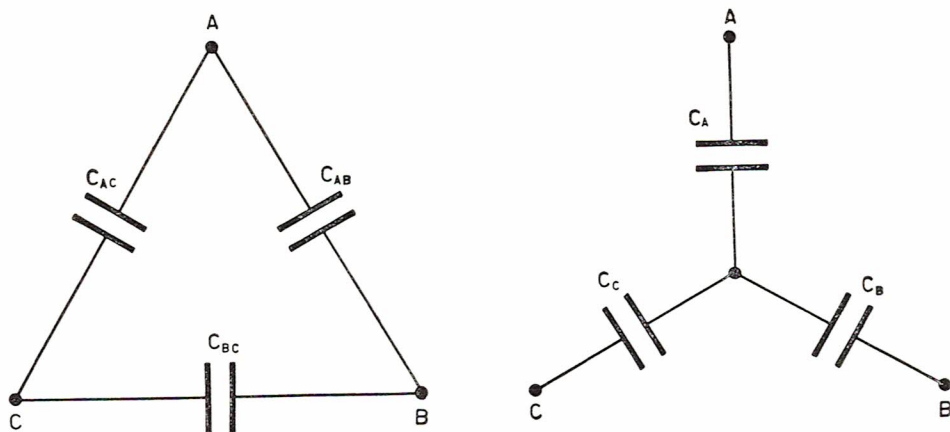



Fig. 7.3-3

---

(2) Questa espressione è stata ricavata dalla corrispondente 7.3-7. Infatti :

$$\overline{Y}_{AB} = \frac{1}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{\overline{Z}_C}{\overline{Z}_A \, \overline{Z}_C + \overline{Z}_B \, \overline{Z}_C + \overline{Z}_A \, \overline{Z}_B} = \frac{\dfrac{1}{\overline{Y}_C}}{\dfrac{1}{\overline{Y}_A \, \overline{Y}_C} + \dfrac{1}{\overline{Y}_B \, \overline{Y}_C} + \dfrac{1}{\overline{Y}_A \, \overline{Y}_B}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\overline{Y}_C}}{\dfrac{\overline{Y}_B + \overline{Y}_A + \overline{Y}_C}{\overline{Y}_A \, \overline{Y}_B \, \overline{Y}_C}} = \frac{\overline{Y}_A \, \overline{Y}_B}{\overline{Y}_A + \overline{Y}_B + \overline{Y}_C}.$$

Nello stesso modo si procederà per le formule 7.3-11 e 12.

mente ad una frequenza ben determinata, precisamente quella che definisce i valori delle impedenze o delle ammettenze della stella di partenza.

Solamente nel caso in cui i rami costituenti il triangolo o la stella sono tutti costituiti da un unico parametro e sempre lo stesso (triangolo di capacità, triangolo di induttanze) quanto più sopra notato non è più valido. Si consideri infatti, ad esempio, un triangolo di pure capacità (vedi fig. 7.3-3); le capacità della stella equivalente risultano allora:

7.3-13 $$C_A = C_{AB} + C_{AC} + \frac{C_{AB} C_{AC}}{C_{BC}} \ (^3)$$

7.3-14 $$C_B = C_{AB} + C_{BC} + \frac{C_{AB} C_{BC}}{C_{AC}}$$

7.3-15 $$C_C = C_{BC} + C_{AC} + \frac{C_{BC} C_{AC}}{C_{AB}};$$

e per la trasformazione stella-triangolo:

7.3-16 $$C_{AB} = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B + C_C}$$

7.3-17 $$C_{BC} = \frac{C_B C_C}{C_A + C_B + C_C}$$

7.3-18 $$C_{AC} = \frac{C_A C_C}{C_A + C_B + C_C}.$$

Queste formule di trasformazione sono risultate dunque indipendenti dalla frequenza. Ciò significa che l'equivalenza è valida sempre, quindi anche in *corrente continua* e di conseguenza nell' Elettrostatica.

Naturalmente la trasformazione stella-triangolo, della quale si è fino ad ora trattato, risulta un caso particolare di una trasformazione più generale, quella cioè stella-poligono. Di questa si è parlato nel § 12 del secondo capitolo: la sua estensione alle reti in regime sinusoidale risulta possibile ed assai facile in base al criterio di Kennelly-Steinmetz.

---

(3) Questa espressione deriva dalla formula 7.3-4. Infatti si ha:

$$j\omega C_A = j\omega C_{AB} + j\omega C_{AC} + \frac{j\omega C_{AB}\, j\omega C_{AC}}{j\omega C_{BC}},$$

dalla quale si ricava facilmente, poiché il fattore $j\omega$ è comune, l'espressione 7.3-13. Così analogamente per le espressioni 7.3-14 e 15. Lo stesso procedimento potrà essere ripetuto a proposito delle formule 7.3-16, 17, 18.

Esercizio 7.31

Si trovino le correnti erogate dai tre generatori E_a, E_b, E_c, facenti parte della rete elettrica studiata nell'esercizio 7.14.

Soluzione

Per il calcolo delle correnti $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$, $\bar{I}_c$, qualora non sia nota la tensione (in modulo e fase) esistente fra i punti O ed O', può essere conve-

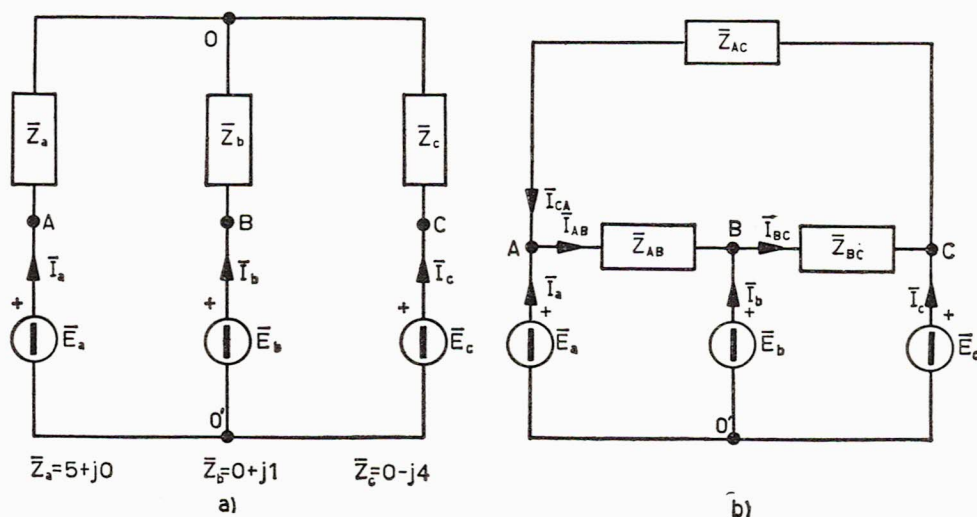



Fig. 7.31-1

niente la trasformazione stella-triangolo delle tre impedenze di carico $\bar{Z}_a$, $\bar{Z}_b$, $\bar{Z}_c$: la rete elettrica passa quindi dalla struttura di fig. 7.31-1*a* a quella equivalente di fig. 7.31-1*b*, ove:

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_b + \frac{\bar{Z}_a \bar{Z}_b}{\bar{Z}_c} = 5 + j\,1 + \frac{j\,5}{-j\,4} = 3{,}75 + j\,1$$

$$\bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_b + \bar{Z}_c + \frac{\bar{Z}_b \bar{Z}_c}{\bar{Z}_a} = +j\,1 - j\,4 + \frac{4}{5} = 0{,}8 - j\,3$$

$$\bar{Z}_{AC} = \bar{Z}_a + \bar{Z}_c + \frac{\bar{Z}_a \bar{Z}_c}{\bar{Z}_b} = 5 - j\,4 + \frac{-j\,20}{j\,1} = -15 - j\,4\,.$$

Le correnti circolanti nel triangolo valgono pertanto, applicando il 2° principio di Kirchhoff:

$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{E}_a - \overline{E}_b}{\overline{Z}_{AB}} = \frac{220 + 100 + j\,190{,}5}{3{,}75 + j\,1} = 94{,}8 + j\,25{,}6$$

$$\overline{I}_{BC} = \frac{\overline{E}_b - \overline{E}_c}{\overline{Z}_{BC}} = \frac{-110 - j\,190{,}5 + 110 - j\,190{,}5}{0{,}8 - j\,3} = 118{,}5 - j\,31{,}6$$

$$\overline{I}_{CA} = \frac{\overline{E}_c - \overline{E}_a}{\overline{Z}_{AC}} = \frac{-110 + j\,190{,}5 - 220}{-15 - j\,4} = 17{,}4 - j\,17{,}4\,.$$

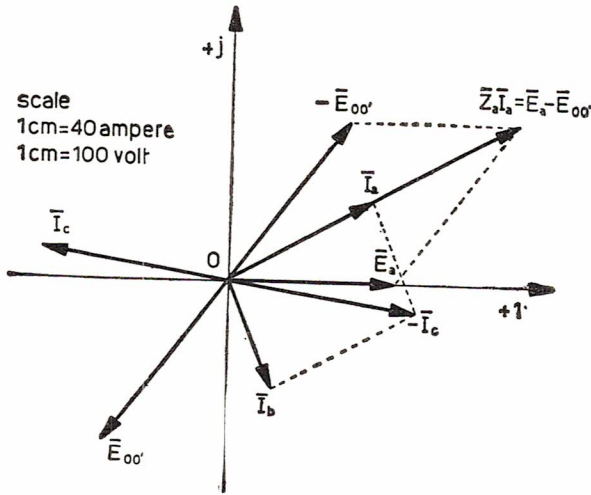



Fig. 7.31-2

Con questi dati, le correnti erogate da ciascun generatore ammontano a (1° principio di Kirchhoff):

$$\overline{I}_a = \overline{I}_{AB} - \overline{I}_{CA} = 94{,}8 + j\,25{,}6 - (17{,}4 - j\,17{,}4) = 77{,}4 + j\,43$$

$$\overline{I}_b = \overline{I}_{BC} - \overline{I}_{AB} = 118{,}5 - j\,31{,}6 - (94{,}8 + j\,25{,}6) = 23{,}7 - j\,57{,}2$$

$$\overline{I}_c = \overline{I}_{CA} - \overline{I}_{BC} = 17{,}4 - j\,17{,}4 - (118{,}5 - j\,31{,}6) = -101{,}1 + j\,14{,}2\,.$$

In fig. 7.31-2 è stato riportato il diagramma vettoriale relativo alla rete data.

Esercizio 7.32

Si risolva l'esercizio 3.47 riportato nel capitolo terzo (Elettrostatica).

Soluzione

Il problema chiede il valore della tensione ai capi del condensatore C_1 facente parte della rete elettrica riportata in fig. 7.32-1*a*. A tale scopo si operi una trasformazione stella-triangolo, come è stato indicato in

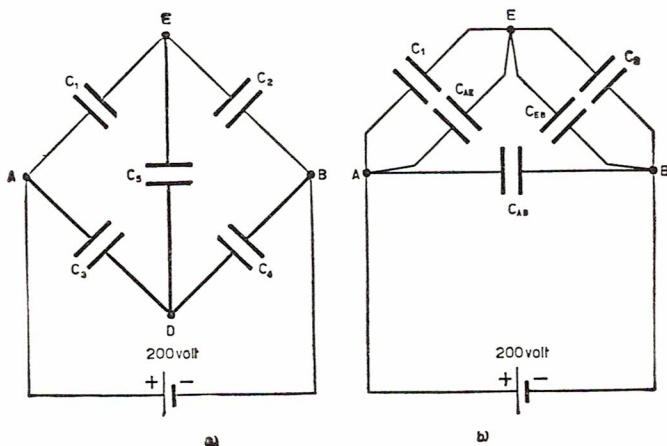



Fig. 7.32-1

fig. 7.32-1*b*, dove le due capacità equivalenti in parallelo a C_1 e C_2 valgono:

$$C_{AE} = \frac{C_3 C_5}{C_3 + C_4 + C_5} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3}\, 10^{-6}\ \mathrm{F}\,,$$

$$C_{EB} = \frac{C_4 C_5}{C_3 + C_4 + C_5} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3}\, 10^{-6}\ \mathrm{F}\,.$$

Poiché tali capacità equivalenti sono risultate eguali fra di loro, anche i due paralleli rispettivamente della capacità C_1 con C_{AE} e della capacità C_2 con C_{EB}, dato che $C_1 = C_2$, risulteranno di eguale valore. La tensione ai capi di C_1 varrà perciò la metà di quella applicata fra i punti A e B. Quindi:

$$V_{C_1} = \frac{1}{2} = V_{AB} = 100\ \text{volt}\,.$$

7.4 Quadripoli

Una rete elettrica qualsiasi che venga utilizzata fra due coppie di punti distinti costituisce un quadripolo: in tal caso le due coppie di punti considerati prendono il nome rispettivamente di entrata e di uscita del quadripolo. In sostanza, il quadripolo è dunque una rete elettrica la quale è accessibile all'esterno mediante due morsetti di entrata e due di uscita. È necessario però che almeno tre dei quattro morsetti siano

distinti, cioè facciano capo a punti differenti della rete (1). I due esempi di quadripoli riportati in fig. 7.4-1*a* e *b* sono abbastanza chiari. D'altronde la rappresentazione schematica di un quadripolo, quando cioè non interessa esplicitamente conoscere la sua struttura, viene effettuata con un semplice rettangolo e due coppie di morsetti come appare in fig. 7.4-1*c*.

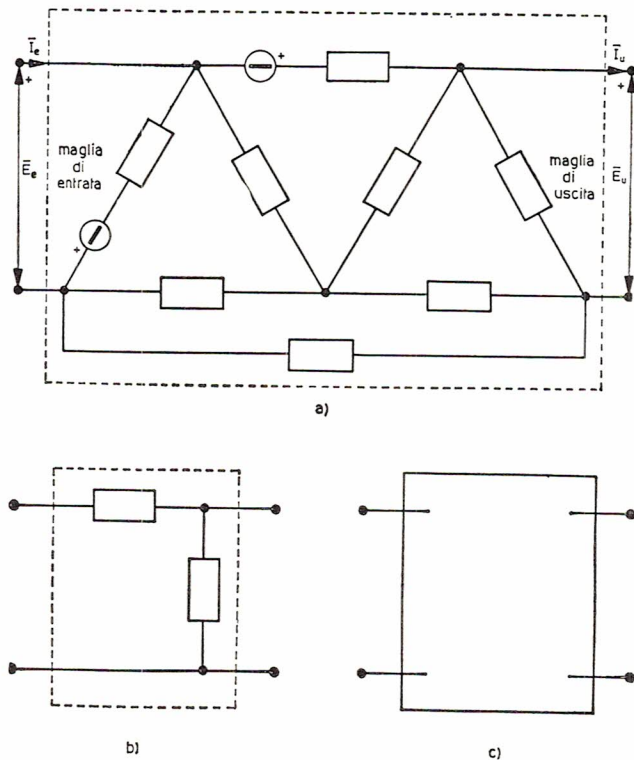



Fig. 7.4-1

Prima di esaminare le equazioni che esprimono il funzionamento di un quadripolo sarà bene richiamare brevemente le convenzioni che usualmente vengono impiegate. Si noti anzitutto che il quadripolo, essendo

(1) Occorre cioè che si verifichino contemporaneamente le condizioni $\bar{I}_e \neq \bar{I}_u$ ed $\bar{E}_e \neq \bar{E}_u$. In altre parole si escludono i cosiddetti quadripoli elementari, le cui strutture appaiono in fig. 7.4-1′.

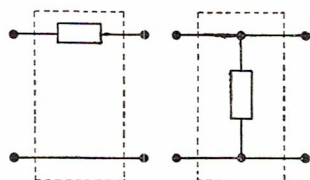



Fig. 7.4-1′

una rete elettrica, sarà formato da un certo numero di maglie, due delle quali fanno parte rispettivamente del circuito di entrata e di uscita (vedi fig. 7.4-1*a*). La convenzione vista a suo tempo per le reti porta allora ad osservare che le correnti circolano in dette maglie in senso destrogiro; per questo motivo la corrente $\bar{I}_e$ entrerà nel quadripolo, mentre la corrente $\bar{I}_u$ uscirà dal quadripolo (fig. 7.4-1*a*). È tuttavia molto usata per le reti elettroniche, per ragioni di praticità, la convenzione, che qui *non* verrà adottata, per la quale anche la corrente $\bar{I}_u$ viene considerata entrante nel quadripolo (2). Per quanto riguarda le tensioni $\bar{E}_e$ ed $\bar{E}_u$, rispettivamente di entrata e di uscita, è convenzione generale considerarle con la polarità positiva in alto.

Ora, per il quadripolo ha grande importanza il poter scrivere delle equazioni nelle quali compaiono direttamente le tensioni e le correnti di entrata e di uscita. Queste equazioni sono ovviamente in numero di due, poiché due sono le maglie interessate. Nel caso di un quadripolo attivo esse possono prendere la seguente forma:

7.4-1 $$\bar{E}_e = \bar{A}\bar{E}_u + \bar{B}\bar{I}_u + \bar{H}$$

7.4-2 $$\bar{I}_e = \bar{C}\bar{E}_u + \bar{D}\bar{I}_u + \bar{K}\,,$$

dove $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ sono costanti che dipendono dagli elementi passivi costituenti il quadripolo dato, mentre $\bar{H}$ e $\bar{K}$ dipendono dagli elementi attivi. Nel caso che il quadripolo sia passivo, dette equazioni si riducono semplicemente a:

7.4-3 $$\bar{E}_e = \bar{A}\,\bar{E}_u + \bar{B}\,\bar{I}_u$$

7.4-4 $$\bar{I}_e = \bar{C}\bar{E}_u + \bar{D}\bar{I}_u\,;$$

oppure risolvendo rispetto ad $\bar{E}_u$ e $\bar{I}_u$:

7.4-5 $$\bar{E}_u = \bar{D}\bar{E}_e - \bar{B}\bar{I}_e$$

7.4-6 $$\bar{I}_u = -\bar{C}\bar{E}_e + \bar{A}\bar{I}_e\,;$$

o anche risolvendo rispetto ad $\bar{E}_e$ ed $\bar{E}_u$:

7.4-7 $$\bar{E}_e = \frac{\bar{A}}{\bar{C}}\,\bar{I}_e - \frac{1}{\bar{C}}\,\bar{I}_u$$

---

(2) Le formule relative a questo tipo di quadripolo differiranno da quelle qui adoperate solamente per un segno meno davanti a ciascun termine contenente la corrente $\bar{I}_u$.

7.4-8 $$\bar{E}_u = \frac{1}{\bar{C}}\,\bar{I}_e - \frac{\bar{D}}{\bar{C}}\,\bar{I}_u\,;$$

o ancora risolvendo rispetto ad $\bar{I}_e$ e $\bar{I}_u$:

7.4-9 $$\bar{I}_e = \frac{\bar{D}}{\bar{B}}\,\bar{E}_e - \frac{1}{\bar{B}}\,\bar{E}_u$$

7.4-10 $$\bar{I}_u = \frac{1}{\bar{B}}\,\bar{E}_e - \frac{\bar{A}}{\bar{B}}\,\bar{E}_u\,.$$

Tutte formule queste assai comode a seconda delle applicazioni.

È bene richiamare subito l'attenzione sul fatto che le quattro costanti $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ non sono indipendenti fra di loro, bensì legate dalla seguente relazione, detta di unimodularità:

7.4-11 $$\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1\,,$$

valida qualunque sia il quadripolo, purché passivo. Resta così dimostrato che un quadripolo passivo è perfettamente individuato da tre sole costanti per cui esso, comunque risulti la sua struttura reale, potrà essere sempre reso equivalente, ai fini dei suoi morsetti di entrata e di uscita, ad un quadripolo formato da tre impedenze, in generale differenti, collegate fra di loro a triangolo (detto anche π) (vedi fig. 7.4-2) o a stella (detta anche T) (vedi fig. 7.4-3).

Nel caso inoltre che il quadripolo si presenti simmetrico, cioè che sia indifferente l'uso di una delle due coppie di morsetti come entrata, si dimostra che si aggiunge alla 7.4-11 anche la condizione $\bar{A} = \bar{D}$, per cui i parametri indipendenti si riducono in questo caso a due. Nella schematizzazione a triangolo ciò porta ad avere allora $\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_{22}$, in quella a stella invece $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$.

Molto importante per le reti a struttura quadripolare è il concetto di impedenza di entrata, di impedenza di uscita e di impedenza di trasferimento.

Si definisce impedenza di entrata il rapporto fra la tensione applicata all'entrata e la corrente di entrata, cioè:

7.4-12 $$\bar{Z}_e = \frac{\bar{E}_e}{\bar{I}_e}\,.$$

Si definisce impedenza di uscita il rapporto fra la tensione che risulta all'uscita e la corrente di uscita, cioè:

7.4-13 $$\bar{Z}_u = \frac{\bar{E}_u}{\bar{I}_u}\,.$$

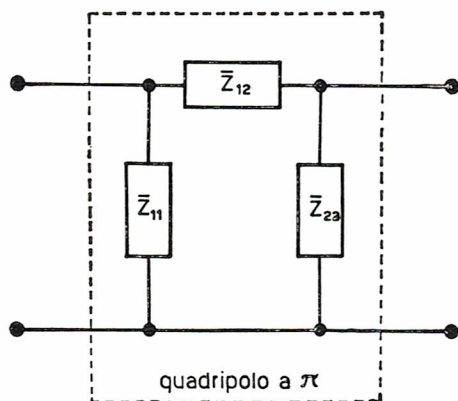
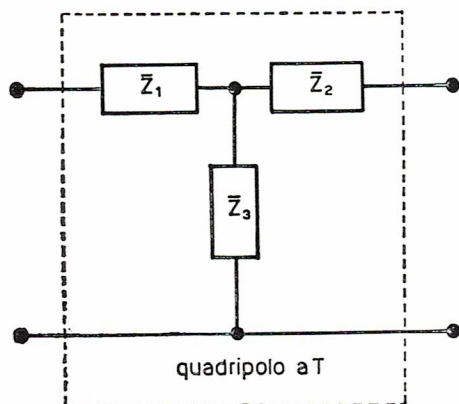



Fig. 7.4-2

$$\bar{A} = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{B} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{D} = 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

Fig. 7.4-3

Si noti che l' impedenza di entrata e di uscita sono legate fra di loro dalla relazione:

7.4-14
$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{A}\,\bar{Z}_u + \bar{B}}{\bar{C}\bar{Z}_u + \bar{D}} .$$

Si definisce invece impedenza di trasferimento il rapporto fra la tensione applicata all'entrata e la corrente di uscita, cioè:

7.4-15
$$\bar{Z}_{tr} = \frac{\bar{E}_e}{\bar{I}_u} ;$$

tale impedenza, nel caso di un quadripolo chiuso su di una impedenza $\bar{Z}_u$, è espresso dalla seguente semplice relazione:

$$\bar{Z}_{tr} = \bar{A}\bar{Z}_u + \bar{B}, \tag{7.4-16}$$

che si ricava facilmente dalla 7.4-3 purché al posto di $\bar{E}_u$ si ponga $\bar{Z}_u\bar{I}_u$.

L'espressione ora trovata (7.4-16) dimostra che *per il carico* $\bar{Z}_u$, cioè in sostanza per il calcolo della corrente di uscita (3), il quadripolo si comporta come una sola impedenza in serie, il cui valore è espresso dalla seguente formula: $(\bar{A}\bar{Z}_u + \bar{B}) - \bar{Z}_u = (\bar{A} - 1)\,\bar{Z}_u + \bar{B}$ e che quindi risulta perfettamente valida la schematizzazione riportata in fig. 7.4-4.

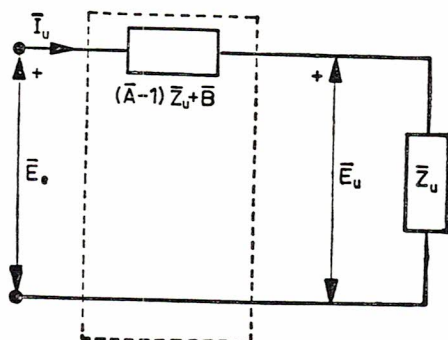



Fig. 7.4-4

Si osservi ancora che le formule 7.4-15 e 16 possono servire per trovare direttamente il rapporto fra la tensione di uscita $\bar{E}_u$ e quella di entrata $\bar{E}_e$, per una condizione di carico $\bar{Z}_u$ qualsiasi. Poiché infatti $\bar{E}_u = \bar{Z}_u\bar{I}_u$, dalla 7.4-15 si ha subito che $\bar{E}_u = \dfrac{\bar{Z}_u}{\bar{Z}_{tr}}\,\bar{E}_e$ e quindi, per la 7.4-16, in definitiva che:

$$\bar{E}_u = \frac{\bar{Z}_u}{\bar{A}\,\bar{Z}_u + \bar{B}}\,\bar{E}_e, \tag{7.4-17}$$

formula questa assai comoda.

---

(3) Si noti dunque che la corrente di uscita dipende solamente dalle costanti $\bar{A}$ e $\bar{B}$ del quadripolo. La corrente di entrata dipende invece da tutte e quattro le costanti, come appare dalla formula 7.4-14.

Esercizio 7.41

Si calcolino le costanti $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ del quadripolo (ponte di Wheatstone) riportato in fig. 7.41-1 (¹).

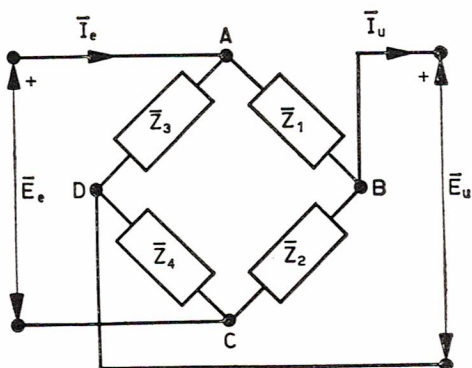



Fig. 7.41-1

Soluzione

Per il calcolo delle costanti $\overline{A}$ e $\overline{B}$ si potrà fare ricorso, poiché il quadripolo è passivo, all'equazione fondamentale 7.4-3 in quanto questa relazione non contiene le altre due costanti $\overline{C}$ e $\overline{D}$.

Calcolo della costante $\overline{A}$

Ponendo $\overline{I}_u = 0$ nell'equazione sopra citata si ottiene che:

$$\overline{A} = \left(\frac{\overline{E}_e}{\overline{E}_u}\right)_{\overline{I}_u=0} .$$

(¹) Il quadripolo *ponte di Wheatstone* viene molte volte indicato col nome di quadripolo a *lattice* e disegnato allora come in fig. 7.41-1′.

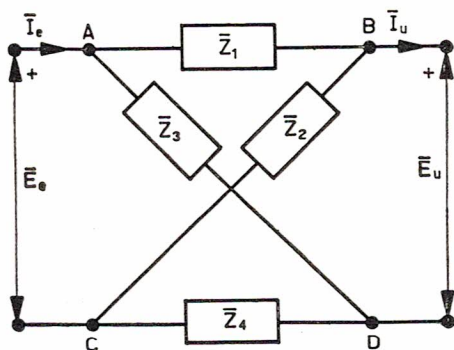



Fig. 7.41-1′

Ciò significa che la costante $\bar{A}$ si può calcolare come rapporto fra la tensione di entrata $\bar{E}_e$ e quella di uscita $\bar{E}_u$, quando il quadripolo è senza carico ($I_u = 0$).

Nel nostro caso la tensione $\bar{E}_u$, a vuoto, vale (vedi fig. 7.41-2):

$$\bar{E}_u = \bar{E}_{BD} = -\bar{E}_{AB} + \bar{E}_{AD} = \frac{-\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{E}_e + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}\,\bar{E}_e\,;$$

quindi risulta:

$$\bar{A} = \frac{\bar{E}_e}{\bar{E}_u} = \frac{1}{\dfrac{-\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} + \dfrac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}}\,.$$

Calcolo della costante $\bar{B}$

Ponendo $\bar{E}_u = 0$ nell'equazione 7.4-3 del testo si ottiene che:

$$\bar{B} = \left(\frac{\bar{E}_e}{\bar{I}_u}\right)_{\bar{E}_u=0}\,.$$

Ciò significa che la costante $\bar{B}$ si può calcolare come rapporto fra la tensione di entrata $\bar{E}_e$ e la corrente di uscita $\bar{I}_u$ quando l' uscita è cortocircuitata ($E_u = 0$) (vedi fig. 7.41-3).

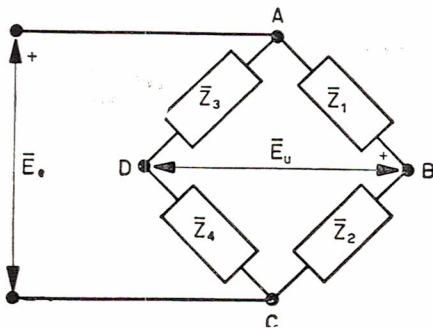



Fig. 7.41-2

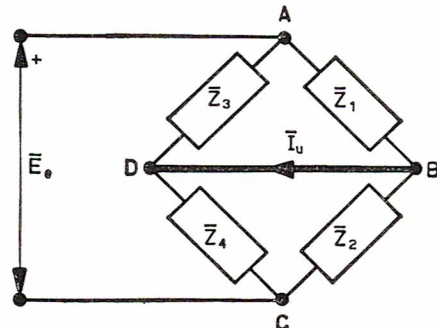



Fig. 7.41-3

Nel nostro caso la corrente di cortocircuito $\bar{I}_u$ vale, applicando ad esempio il teorema di Thévenin (2):

---

(2) Supponendo, per semplicità, che la *d.d.p.* $\bar{E}_e$ sia dovuta ad un generatore ideale di tensione di *f.e.m.* $\bar{E}_e$.

$$\overline{I}_u = \frac{(\overline{E}_{BD})_{\overline{I}u=0}}{\overline{Z}_{interna}} = \frac{\left(\dfrac{-\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}\right)\overline{E}}{\dfrac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{Z}_3\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}} ;$$

quindi sarà:

$$\overline{B} = \frac{\dfrac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{Z}_3\overline{Z}_4}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}}{\dfrac{-\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{Z}_3}{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}} = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2(\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4) + \overline{Z}_3\overline{Z}_4(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)}{\overline{Z}_2\overline{Z}_3 - \overline{Z}_1\overline{Z}_4} .$$

Per il calcolo invece delle costanti $\overline{C}$ e $\overline{D}$ si potrà fare ricorso alla seconda equazione fondamentale del quadripolo, cioè alla 7.4-4, poiché questa non contiene le costanti $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

Calcolo della costante $\overline{C}$

Ponendo $\overline{I}_u = 0$ nell'equazione sopra citata si ottiene:

$$\overline{C} = \left(\frac{\overline{I}_e}{\overline{E}_u}\right)_{\overline{I}_u=0} .$$

Ciò significa che la costante $\overline{C}$ può essere calcolata come rapporto fra la corrente $\overline{I}_e$ assorbita all'entrata dal quadripolo e la tensione presente all'uscita $\overline{E}_u$ quando il quadripolo è senza carico ($\overline{I}_u = 0$).

Con riferimento pertanto al circuito di fig. 7.41-4, per la tensione $\overline{E}_u$ si potrà scrivere la seguente espressione (2° principio di Kirchhoff):

$$\overline{E}_u = \overline{E}_{BD} = -\overline{Z}_1\overline{I}' + \overline{Z}_3\overline{I}'' ,$$

la quale, ricordando che:

$$\overline{I}' = \frac{\overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}\,\overline{I}_e$$

$$\overline{I}'' = \frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 + \overline{Z}_4}\,\overline{I}_e ,$$

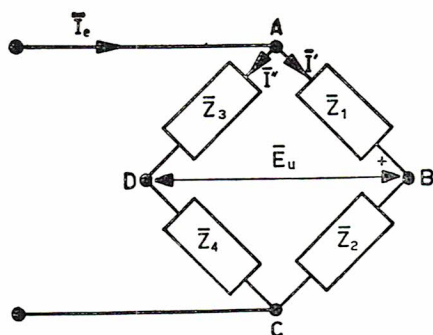
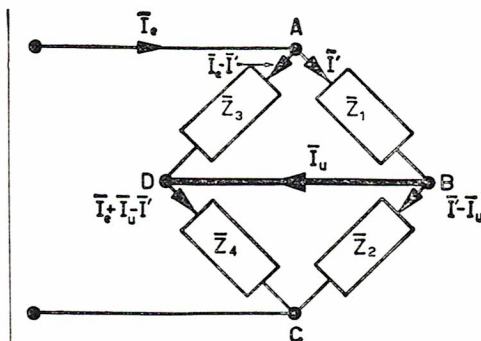



Fig. 7.41-4 *Fig. 7.41-5*

diventa:

$$\bar{E}_u = \left(-\bar{Z}_1 \frac{\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4} + \bar{Z}_3 \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}\right) \bar{I}_e .$$

Da questa, dopo aver semplificato, si ricava per la costante $\bar{C}$ la seguente formula:

$$\bar{C} = \frac{\bar{I}_e}{\bar{E}_u} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4}{\bar{Z}_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_1\bar{Z}_4}.$$

Calcolo della costante $\bar{D}$

Ponendo $\bar{E}_u = 0$ nell'equazione 7.4-4 del testo si ottiene:

$$\bar{D} = \left(-\frac{\bar{I}_e}{\bar{I}_u}\right)_{\bar{E}=0} .$$

Ciò significa che la costante $\bar{D}$ può essere calcolata come rapporto fra la corrente di entrata $\bar{I}_e$ e la corrente di uscita $\bar{I}_u$ quando l' uscita è cortocircuitata.

Con riferimento pertanto alla rete di fig. 7.41-5, si potranno scrivere le seguenti due equazioni:

$$\bar{Z}_1\bar{I}' = \bar{Z}_3(\bar{I}_e - \bar{I}')$$

$$\bar{Z}_4(\bar{I}_e + \bar{I}_u - \bar{I}') = \bar{Z}_2(\bar{I}' - \bar{I}_u).$$

Ricavando ora dalla prima di queste equazioni l'espressione della corrente $\bar{I}'$, cioè $\bar{I}' = \dfrac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}\,\bar{I}_e$, ed andando a sostituirla nella se-

conda, dopo aver ordinato, si ottiene:

$$\left(\frac{\bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_3}+\frac{\bar{Z}_3\bar{Z}_4}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_3}-\bar{Z}_4\right)\bar{I}_e=(\bar{Z}_2+\bar{Z}_4)\bar{I}_u.$$

Per la costante $\bar{D}$ risulta quindi la seguente formula:

$$\bar{D}=\frac{\bar{I}_e}{\bar{I}_u}=\frac{(\bar{Z}_1+\bar{Z}_3)(\bar{Z}_2+\bar{Z}_4)}{\bar{Z}_2\bar{Z}_3-\bar{Z}_1\bar{Z}_4}.$$

Esercizio 7.42

Si risolva l'esercizio 2.53 del capitolo 2 mediante la teoria dei quadripoli.

Soluzione

La rete da risolvere, si veda anche la fig. 7.42-1, è costituita da un quadripolo (ponte di Wheatstone squilibrato), quindi si potrà applicare la formula 7.4-15 del testo risolta rispetto alla corrente $\bar{I}_u$. Si ha allora,

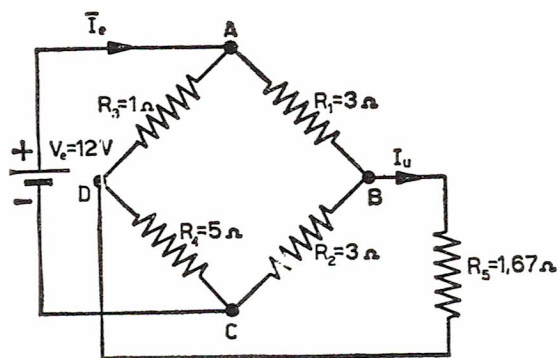



Fig. 7.42-1

ricordando che la rete è in regime di corrente continua e non sinusoidale:

$$I_u=\frac{V_e}{R_{tr}}=\frac{V_e}{AR_5+B},$$

dove con R_{tr} si intende la resistenza di trasferimento.

Per il calcolo delle costanti A e B si ricorrerà naturalmente alle formule dell'esercizio precedente (7.41) per cui, essendo qui $\bar{Z}_1=R_1$, $\bar{Z}_2=R_2$, ... , si ha:

$$A = \frac{1}{\dfrac{-R_1}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3}{R_3 + R_4}} = \frac{1}{\dfrac{-3}{3+3} + \dfrac{1}{1+5}} = -3\,,$$

$$B = \frac{R_1R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4(R_1 + R_2)}{R_2R_3 - R_1R_4} = \frac{3\cdot 3\,(1+5) + 5(3+3)}{3 - 3\cdot 5} = -7.$$

In definitiva si ottiene:

$$I_u = \frac{12}{-3\cdot 1{,}67 - 7} = -1 \text{ ampere}.$$

Il segno meno sta ad indicare che la corrente in realtà fluisce in senso opposto a quello fissato, per convenzione, in fig. 7.42-1.

Esercizio 7.43

Si calcoli l' impedenza di entrata del quadripolo riportato in figura 7.43-1 il quale funziona alla pulsazione $\omega = 250$ rad/sec.

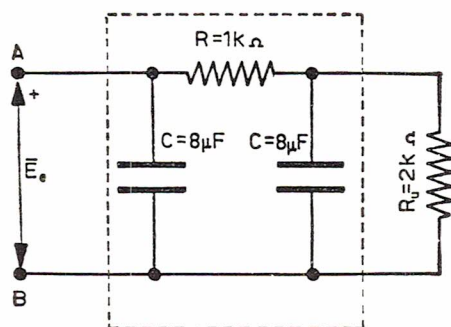



Fig. 7.43-1

Soluzione

Il calcolo dell' impedenza di entrata $\bar{Z}_e$ del quadripolo assegnato può essere impostato facendo ricorso alla formula 7.4-14 riportata nel testo (1).

Allora, poiché il quadripolo è del tipo a π, le costanti $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ valgono, con riferimento alle formule che appaiono a fianco della fig. 7.4-2:

$$\bar{A} = 1 + \frac{\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{22}} = 1 + j\,\omega CR = 1 + j\,250\cdot 8\cdot 10^{-6}\cdot 10^{3} = 1 + j\,2\,,$$

(1) Il calcolo dell' impedenza di entrata può essere impostato naturalmente anche in altro modo, precisamente come ricerca dell' impedenza equivalente $\bar{Z}_{AB}$ (quadripolo + carico = bipolo AB).

$$\bar{B} = \bar{Z}_{12} = R = 1000 ,$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_{11}} + \frac{1}{\bar{Z}_{22}} + \frac{\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}} = j\,\omega C + j\,\omega C - \omega^2 C^2 R =$$

$$= j\,250 \cdot 8 \cdot 10^{-6} + j\,250 \cdot 8 \cdot 10^{-6} - 6{,}25 \cdot 10^4 \cdot 64 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 =$$

$$= (-4 + j\,4)\,10^{-3} .$$

D'altronde $\bar{D} = \bar{A}$, poiché il quadripolo è simmetrico.
L' impedenza di entrata $\bar{Z}_e$ ammonta perciò a:

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{A}\,\bar{Z}_u + \bar{B}}{\bar{C}\,\bar{Z}_u + \bar{D}} = \frac{(1 + j\,2)\,2000 + 1000}{(-4 + j\,4)\,10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 + 1 + j\,2} =$$

$$= \frac{3 + j\,4}{-7 + j\,10}\,10^3 = 127{,}5 - j\,389 = 409 \underline{|-71^0\,51'} .$$

Trattasi di un' impedenza capacitiva, ovviamente.

7.5 Reti elettriche con mutue induttanze

Una certa complicazione nel calcolo delle reti elettriche può essere costituita dalla presenza di mutue induttanze in alcuni rami. Ciò avviene quando essi sono magneticamente accoppiati ad altri rami della stessa rete o di altre reti . La fig. 7.5-1 fornisce un esempio assai chiaro. Prima però di scrivere le equazioni per questo nuovo tipo di rete, si ritiene necessario premettere alcune considerazioni sul segno da attribuire ai coefficienti di mutua induzione.

Quando in un circuito è presente una mutua induttanza i casi

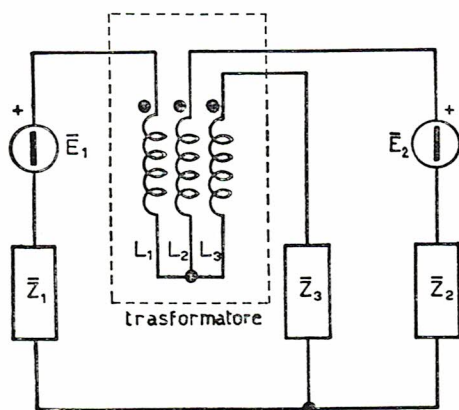



Fig. 7.5-1

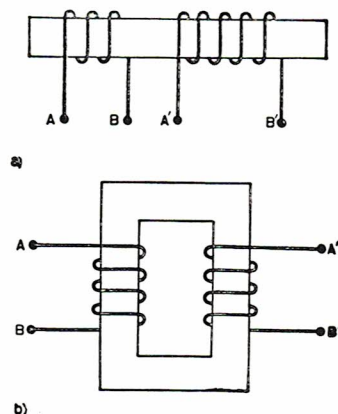



Fig. 7.5-2

sono due: o essa è stata schematizzata in quel circuito nei suoi fondamenti costruttivi (ad esempio, se si tratta di un trasformatore, come sono fatti e come sono disposti i suoi avvolgimenti sul nucleo, si veda la figura 7.5-2) oppure essa è stata indicata semplicemente a mezzo del suo simbolo grafico, come appare in fig. 7.5-3*a*.

Nel primo caso (fig. 7.5-2) il segno della mutua induttanza risulta ben definibile in quanto, non appena conosciuti i versi delle correnti circolanti nei due circuiti (avvolgimenti), sarà altrettanto ben determinata la situazione dei relativi flussi magnetici (nel nucleo). È noto infatti che, se i flussi magnetici sono concordi, il coefficiente di mutua induzione M è da considerarsi di segno positivo; viceversa, se i flussi sono discordi, M dovrà essere considerato di segno negativo.

Nel secondo caso (fig. 7.5-3*a*), cioè quando la mutua induttanza appare col suo simbolo grafico, il segno della mutua induttanza non può essere definito salvo il caso in cui non siano stati contrassegnati chiaramente i *morsetti corrispondenti*. Tale corrispondenza viene generalmente indicata con una coppia di punti, si veda la fig. 7.5-3*b*, i quali stanno a significare semplicemente, secondo una convenzione generalmente accettata, che, se le correnti entrano negli avvolgimenti in quei punti, i relativi flussi magnetici sono da considerarsi concordi. In questo caso il segno da attribuire alla mutua induttanza è quello positivo; se invece una corrente entra e l'altra esce dai *punti corrispondenti* il segno da attribuire alla mutua induttanza è quello negativo.

La conclusione risulta dunque la seguente: non si può stabilire il segno da attribuire ad una mutua induttanza finché non sono stabiliti i *morsetti corrispondenti* e i versi delle correnti che percorrono gli avvolgimenti.

Un caso assai semplice di mutua induttanza è ad esempio quello riportato in fig. 7.5-4 che rappresenta una bobina, con presa intermedia, percorsa da corrente nello stesso senso in tutte le sue spire. Fra i due avvolgimenti costituenti la bobina vi è allora una mutua induzione di segno positivo appunto perché, siccome la corrente percorre tutta la bobina sempre nello stesso verso, le linee di flusso magnetico dovuto alle varie spire presentano tutte la stessa direzione. E in questo caso il segno di

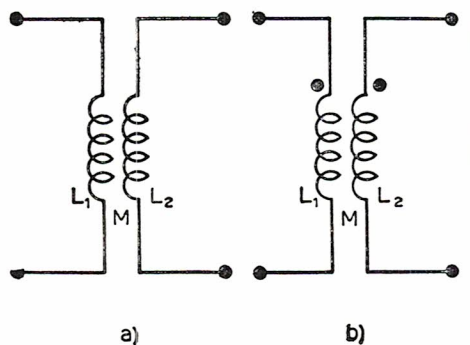
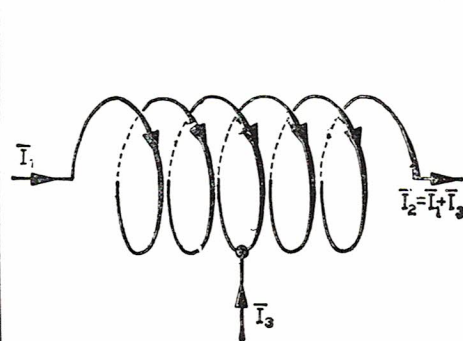



Fig. 7.5-3 *Fig. 7.5-4*

M non potrà dipendere ovviamente dal particolare verso col quale la corrente percorrerà le spire della bobina poiché, per ipotesi, si è detto che le correnti $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ sono sempre equiverse.

Conviene vedere a questo punto anzitutto quali sono le relazioni tensione-corrente in presenza di accoppiamenti induttivi per qualche caso semplice, ad esempio per un trasformatore (1) alimentato con una tensione sinusoidale $\bar{E}_1$ e chiuso al secondario su di un' impedenza di carico $\bar{Z}_u$ (vedi fig. 7.5-5). Si suppongono noti naturalmente i morsetti corrispondenti del trasformatore. Ora, per poter scrivere le due

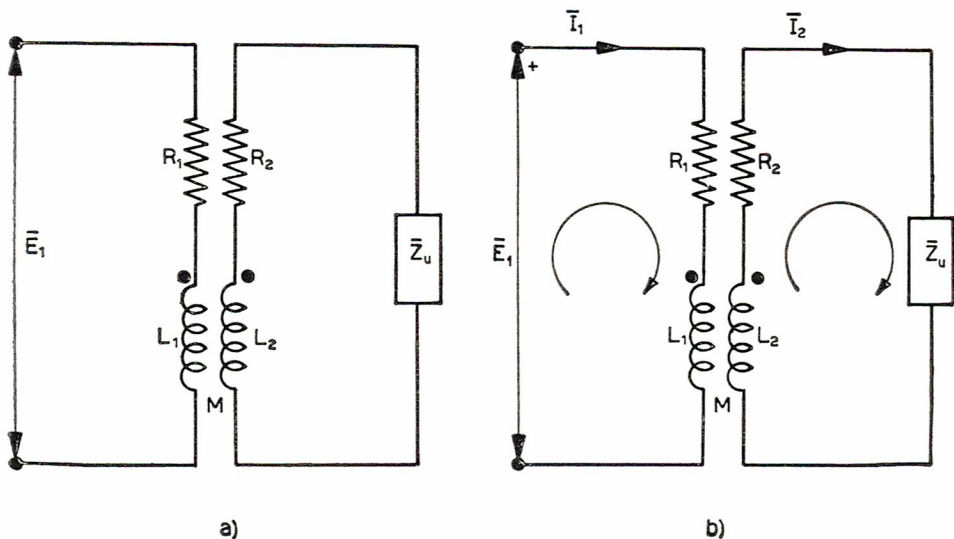



Fig. 7.5-5

equazioni che si deducono dal secondo principio di Kirchhoff applicato rispettivamente al circuito primario e secondario, sarà necessario:

— assegnare una polarità alla tensione $\bar{E}_1$, polarità del tutto arbitraria. Di solito si segna con un + il morsetto più alto;

— imporre un verso alla corrente nella maglia primaria e secondaria. Questi versi sono anch'essi del tutto arbitrari. Di solito si assume per entrambi quello destrogiro, qualora il trasformatore venga considerato come una rete elettrica solita (o anche come un quadripolo);

— assumere un verso di percorrenza. Anche questo è arbitrario; di solito è lo stesso di quello assegnato alla corrente, quindi destrogiro; dopodiché sarà facile scrivere, con riferimento al circuito di figura 7.5-5*b*,

(1) È questa la più semplice rete elettrica con mutua induttanza. Essa serve appunto per mostrare praticamente come si deve impostare rigorosamente la questione delle mutue induttanze.

che è lo stesso di quello assegnato in fig. 7.5-5a, ma dove appare chiaramente quanto è stato precisato sopra, per il circuito primario:

7.5-1 $$\overline{E}_1 = R_1\overline{I}_1 + j\,\omega L_1\overline{I}_1 - j\,\omega M\overline{I}_2\,,$$

e per il circuito secondario:

7.5-2 $$0 = R_2\overline{I}_2 + j\,\omega L_2\overline{I}_2 + \overline{Z}_u\overline{I}_2 - j\,\omega M\overline{I}_1\,.$$

Il coefficiente di mutua induzione M risulta negativo poiché, dal circuito di fig. 7.5-5b, si vede che le correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ non entrano (od escono) entrambe dai punti *corrispondenti.*

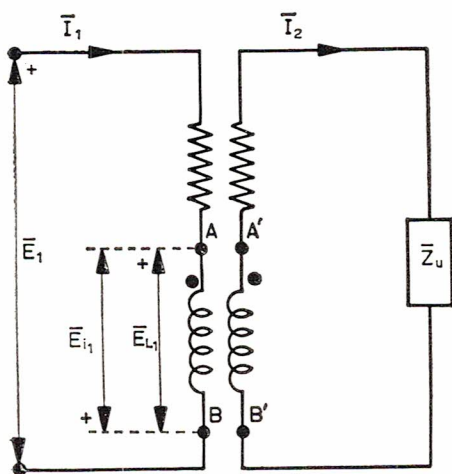



Fig. 7.5-6

Naturalmente per il segno da attribuire ad M si può ragionare anche in modo un po' differente da quello più sopra indicato, precisamente considerando il segno che si deve attribuire alla *f.e.m.* mutua indotta in un avvolgimento ($j\,\omega M\overline{I}$) quando l'altro avvolgimento è percorso da corrente. Con riferimento ad esempio al circuito primario di fig. 7.5-6, il quale altro non è che quello di fig. 7.5-5b ridisegnato per maggiore comprensione, si vede che la polarità da attribuire alla *f.e.m.* mutua indotta $\overline{E}_{i1}$ è di segno opposto a quello da attribuire alla caduta di tensione induttiva $\overline{E}_{L_1}$ [2]. Questa situazione si ha quando appunto M è negativo.

---

[2] La corrente $\overline{I}_2$ entra infatti per il punto B' (fig. 7.5-6), quindi B' è più positivo di A'. D'altronde B è il morsetto *corrispondente* di B' per cui anche il punto B sarà più positivo di A, per quanto riguarda la *f.e.m.* mutua indotta. La tensione mutua indotta $\overline{E}_{i_1}$ si dovrà considerare perciò positiva nel punto B.

Si consideri finalmente la rete elettrica di fig. 7.5-1, dove il trasformatore ha tre avvolgimenti, ciascuno di induttanza rispettivamente L_1 , L_2, L_3, e fra i quali esistono anche ben definiti coefficienti di mutua induttanza, precisamente M_{12} fra gli avvolgimenti 1 e 2, M_{13} fra gli avvolgimenti 1 e 3 ed M_{23} fra gli avvolgimenti 2 e 3. I tre avvolgimenti sono d'altronde tutti *concordi* onde sarà sufficiente per ciascun avvolgimento, in relazione agli altri due, un solo *punto di corrispondenza*. Per la soluzione di questa rete, cioè per il calcolo delle correnti erogate dai due generatori e di quella assorbita dall' impedenza $\bar{Z}_3$, si farà ricorso ai principi di Kirchhoff, osservando che accanto alle cadute di tensione nei vari rami si dovranno introdurre anche le *f.e.m.* mutue indotte negli stessi rami.

Assegnati allora i versi alle correnti che percorrono i tre rami della rete (per comodità in fig. 7.5-7 è stato riportato il circuito di fig. 7.5-1 completato di quanto è necessario per poter applicare i suddetti principi),

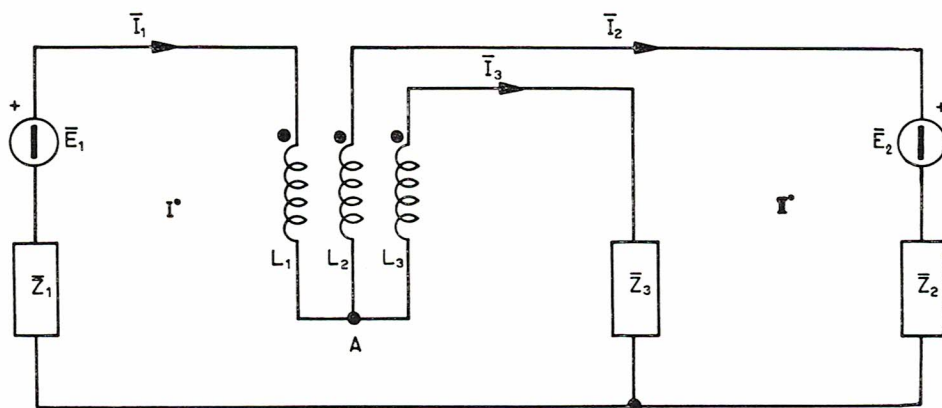



Fig. 7.5-7

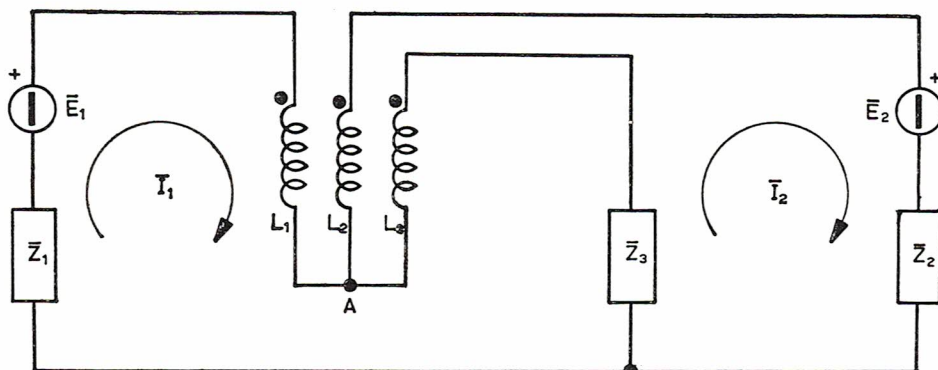



Fig. 7.5-8

si scriveranno per il nodo A e per le due maglie indipendenti I e II le seguenti equazioni:

7.5-3 $$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3,$$

7.5-4 $$\bar{E}_1 = j\,\omega L_1\bar{I}_1 - j\,\omega M_{12}\bar{I}_2 - j\,\omega M_{13}\bar{I}_3 + j\,\omega L_3\bar{I}_3 -$$
$$- j\,\omega M_{13}\bar{I}_1 + j\,\omega M_{23}\bar{I}_2 + \bar{Z}_3\bar{I}_3 + \bar{Z}_1\bar{I}_1,$$

7.5-5 $$-\bar{E}_2 = \bar{Z}_2\bar{I}_2 - \bar{Z}_3\bar{I}_3 - j\,\omega L_3\bar{I}_3 + j\,\omega M_{13}\bar{I}_1 - j\,\omega M_{23}\bar{I}_2 +$$
$$+ j\,\omega L_2\bar{I}_2 - j\,\omega M_{12}\bar{I}_1 + j\,\omega M_{23}\bar{I}_3;$$

che sono del tutto sufficienti per la risoluzione della rete data.

Ma questa, essendo *piana*, può essere risolta anche col metodo di Maxwell, precisamente col metodo delle correnti di maglia. In tal caso si considererà la prima maglia percorsa dalla corrente fittizia $\bar{I}_1$ e la seconda dalla corrente fittizia $\bar{I}_2$, entrambe destrogire, come appare in fig. 7.5-8. Le equazioni saranno ora naturalmente soltanto due, cioè:

7.5-6 $$\bar{E}_1 = j\,\omega L_1\bar{I}_1 + j\,\omega L_3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) - j\,\omega M_{13}\bar{I}_1 - j\,\omega M_{13}(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) -$$
$$- j\,\omega M_{12}\bar{I}_2 + j\,\omega M_{23}\bar{I}_2 + \bar{Z}_1\bar{I}_1 + \bar{Z}_3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2),$$

7.5-7 $$-\bar{E}_2 = \bar{Z}_2\bar{I}_2 + \bar{Z}_3(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + j\,\omega L_3(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + j\,\omega L_2\bar{I}_2 -$$
$$- j\,\omega M_{23}(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) - j\,\omega M_{23}\bar{I}_2 - j\,\omega M_{12}\bar{I}_1 + j\,\omega M_{13}\bar{I}_1;$$

la soluzione si ridurrà naturalmente ad una successione di non difficili calcoli numerici.

Esercizio 7.51

Si calcoli l'induttanza equivalente di due induttanze L_1 ed L_2 collegate in serie, come appare in fig. 7-51-1, fra le quali esiste una mutua induttanza M.

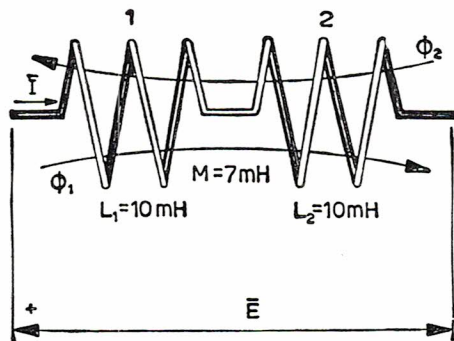



Fig. 7.51-1

Soluzione

Per il bipolo dato, se considerato sottoposto all'azione di una tensione sinusoidale $\overline{E}$ di pulsazione ω e quindi percorso da una corrente $\overline{I}$, si potrà scrivere la seguente equazione:

$$\overline{E} = j\,\omega L_1\overline{I} + j\,\omega L_2\overline{I} - j\,\omega M_{12}\overline{I} - j\,\omega M_{21}\overline{I}\ (^1)\,,$$

essendo $j\,\omega M_{12}\,\overline{I}$ la *f.e.m.* mutua indotta nell'avvolgimento 2 ad opera della corrente che percorre l'avvolgimento 1 ed $j\,\omega M_{21}\overline{I}$ la *f.e.m.* mutua indotta nell'avvolgimento 1 ad opera della corrente che percorre l'avvolgimento 2. Poiché d'altra parte, come è noto, $M_{12} = M_{21}$, l'equazione scritta sopra si ridurrà alla seguente semplice espressione:

$$\overline{E} = j\,\omega(L_1 + L_2 - 2M)\overline{I}\,,$$

relazione che lega la tensione applicata $\overline{E}$ e la corrente $\overline{I}$ alle caratteristiche del circuito.

D'altronde, per definizione, l'induttanza equivalente L_{eq} del circuito assegnato avrà quel valore per il quale la sua reattanza ωL_{eq} determinerà con la tensione $\overline{E}$ la stessa corrente $\overline{I}$ assorbita dal bipolo dato, cioè:

$$\overline{E} = j\,\omega L_{eq}\overline{I}\,.$$

Dal confronto fra queste due ultime relazioni, si deduce allora che:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M\ (^2)\,.$$

Con i dati del problema si ha perciò:

$$L_{eq} = (10 + 10 - 2\cdot 7)\,10^{-3} = 6\ \text{mH}\,.$$

---

(1) Poiché i flussi magnetici generati dalle due induttanze sono discordi (fig. 7.51-1) il coefficiente M è da considerarsi negativo.

(2) La formula dell' induttanza equivalente di due induttanze collegate in serie (percorse quindi dalla stessa corrente i), fra le quali esiste mutua induzione, può essere fatta derivare dall'espressione dell'energia riportata in 4.412-1, dalla quale si deduce appunto che:

$$w = \frac{1}{2}\,(L_1 i^2 + L_2 i^2 \pm 2Mi^2) = \frac{1}{2}\,i^2(L_1 + L_2 \pm 2M) = \frac{1}{2}\,i^2 L_{eq}\,,$$

da cui:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M\,.$$

Esercizio 7.52

Si calcoli l' induttanza equivalente del bipolo riportato in fig. 7.52-1, costituito da due induttanze L_1 ed L_2 fra di loro in parallelo e fra le quali esiste un accoppiamento induttivo M.

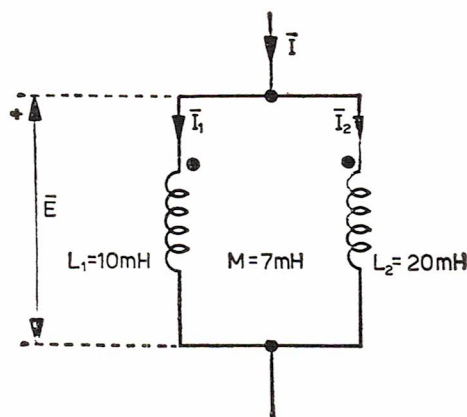



Fig. 7.52-1

Soluzione

Il bipolo dato, sottoposto all'azione di una tensione $\bar{E}$ sinusoidale di pulsazione ω, assorbirà una corrente $\bar{I}$ somma vettoriale delle due correnti $\bar{I}_1$ ed $\bar{I}_2$ circolanti in ciascun ramo L_1 ed L_2. Queste correnti sono legate fra di loro dalle seguenti tre equazioni (si noti che M risulta positivo, poiché le correnti $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ entrano per i morsetti *corrispondenti*):

7.52-1 $$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad ,$$

7.52-2 $$\bar{E} = j\,\omega L_1 \bar{I}_1 + j\,\omega M \bar{I}_2 \, ,$$

7.52-3 $$\bar{E} = j\,\omega L_2 \bar{I}_2 + j\,\omega M \bar{I}_1 \, ,$$

D'altronde, per definizione, l' induttanza equivalente L_{eq} del bipolo dato dovrà esser tale da determinare sotto l'azione della tensione $\bar{E}$ la stessa corrente $\bar{I}$, cioè si potrà scrivere appunto che:

7.52-4 $$\bar{E} = j\,\omega L_{eq} \bar{I} \, .$$

Per il calcolo dell' induttanza equivalente è quindi necessario ricavare dalle tre equazioni scritte sopra un' unica relazione che leghi le sole grandezze $\bar{E}$ ed $\bar{I}$. Ciò si ottiene facilmente, poiché, dal sistema costituito dalle due equazioni 7.52-2 e 3 nelle due incognite $\bar{I}_2$ e $\bar{I}_3$, si ricava che:

$$\bar{I}_1 = \frac{j\bar{E}(M - L_2)}{\omega(L_1 L_2 - M^2)} \qquad \bar{I}_2 = \frac{j\bar{E}(M - L_1)}{\omega(L_1 L_2 - M^2)};$$

l'equazione 7.52-1 diventa così, dopo aver sviluppato e separato i termini di tensione e corrente, :

$$\bar{E} = j\,\omega\,\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\,\bar{I}\,.$$

Pertanto, confrontando con la 7.52-4, si ottiene subito che:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\,.$$

Con i dati del problema si ha quindi:

$$L_{eq} = \frac{(10\cdot 20 - 7^2)\,10^{-6}}{(10 + 20 - 2\cdot 7)10^{-3}} = 9{,}45\ \text{mH}\,.$$

Esercizio 7.53

Si trovi il valore della corrente assorbita da un carico ohmico $R_u = 1000$ ohm inserito in una rete contenente due trasformatori a tre avvolgimenti, collegati nel modo che appare in fig. 7.53-1, e alimentati

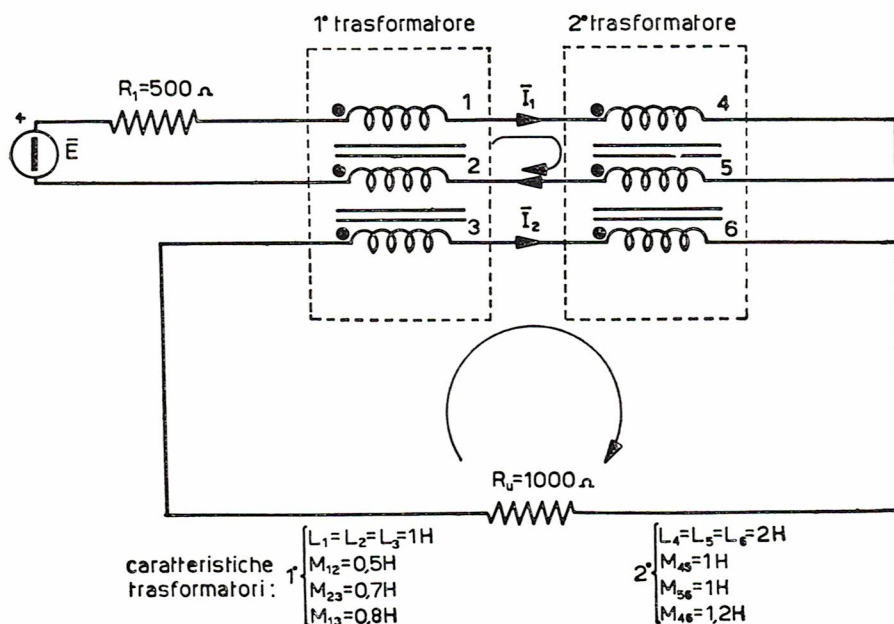



Fig. 7.53-1

con una tensione sinusoidale del valore di 100 volt alla frequenza di 50 per/sec.

Soluzione

Sul circuito di fig. 7.53-1 sono stati fissati i versi (arbitrari) alle due correnti $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ che percorrono le due maglie costituenti la rete, nonché il verso destrogiro di percorrenza per entrambe le maglie. Sarà perciò possibile scrivere il secondo principio di Kirchhoff. Per la prima maglia si ricava così l'equazione:

$$\overline{E} = R_1\overline{I}_1 + j\,\omega(L_1 + L_2 + L_4 + L_5)\overline{I}_1 - j\,2\,\omega M_{12}\overline{I}_1 - j\,2\,\omega M_{45}\overline{I}_1 +$$
$$+ j\,\omega M_{13}\overline{I}_2 + j\,\omega M_{46}\overline{I}_2 - j\,\omega M_{23}\overline{I}_2 - j\,\omega M_{56}\overline{I}_2\,;$$

mentre, analogamente, per la seconda maglia si ha:

$$0 = R_u\overline{I}_2 + j\,\omega(L_3 + L_6)\overline{I}_2 + j\,\omega M_{13}\overline{I}_1 + j\,\omega M_{46}\overline{I}_1 - j\,\omega M_{23}\overline{I}_1 -$$
$$- j\,\omega M_{56}\overline{I}_1\,.$$

Sviluppando e raccogliendo, si otterranno le seguenti due equazioni, nelle due incognite $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$:

$$\overline{E} = [R_1 + j\,\omega(L_1 + L_2 + L_4 + L_5 - 2\,M_{12} - 2\,M_{45})]\overline{I}_1 + j\,\omega(M_{13} +$$
$$+ M_{46} - M_{23} - M_{56})\overline{I}_2$$
$$0 = j\,\omega(M_{13} + M_{46} - M_{23} - M_{56})\overline{I}_1 + [R_u + j\,\omega(L_3 + L_6)]\overline{I}_2\,.$$

Pertanto con i dati del problema, ponendo la tensione $\overline{E}$ sull'asse reale, si avrà il seguente sistema:

$$100 = (500 + j\,942)\overline{I}_1 + j\,94{,}2\,\overline{I}_2$$
$$0 = j\,94{,}2\,\overline{I}_1 + (1000 + j\,942)\overline{I}_2\,,$$

che basterà risolvere rispetto alla corrente $\overline{I}_2$, perché questa è la corrente assorbita dal carico e che si deve appunto calcolare. Ricavando allora dalla seconda equazione del sistema l'espressione della corrente $\overline{I}_1$:

$$\overline{I}_1 = -\frac{1000 + j\,942}{j\,94{,}2}\,\overline{I}_2\,,$$

e sostituendola nella prima:

$$100 = -\frac{(500 + j\,942)\,(1000 + j\,942)}{j\,94{,}2}\,\overline{I}_2 + j\,94{,}2\,\overline{I}_2\,,$$

si ottiene un'equazione nella sola corrente $\overline{I}_2$, che fornisce la soluzione cercata:

$$\overline{I}_2 = \frac{j\,0{,}942}{37{,}84 - j\,141{,}3} = -\,0{,}00621 + j\,0{,}00166\,.$$

La corrente assorbita dal carico R_u ammonta perciò a:

$$I_2 = 10^{-3}\,\sqrt{6{,}21^2 + 1{,}66^2} = 6{,}43\ \text{mA}$$

e ritarda sulla tensione per più di 180°, precisamente di 194° 57'.

7.6 Risonanza

7.61 Introduzione

Per alcuni particolari valori di frequenza, o per alcuni particolari valori assegnati agli elementi reattivi costituenti una rete elettrica, in questa si può manifestare il cosiddetto fenomeno della risonanza. Ma che cosa s' intende per risonanza elettrica? Generalmente si intende quella particolare condizione per la quale la corrente risulta *in fase* con la tensione; mentre fuori risonanza la corrente non è mai in fase con la tensione. In sostanza la risonanza è quella particolare condizione di funzionamento in regime sinusoidale per la quale l' impedenza equivalente del circuito presenta argomento nullo.

Si deduce da ciò che un circuito per poter risuonare deve possedere elementi reattivi di entrambi i segni (cioè sia induttivi che capacitivi) affinché, per certe condizioni, il loro effetto sia nullo per il circuito stesso il quale diventa così ohmico a causa delle sue inevitabili perdite di energia elettrica. A questo proposito si può affermare che quanto più piccole saranno le perdite causate dalla parte reale del circuito altrettanto più grandi risulteranno gli effetti del fenomeno della risonanza. D'altra parte questo si manifesta con modalità differenti a seconda che gli elementi reattivi siano in serie (risonanza serie) o in parallelo (risonanza parallelo).

Data la grande importanza pratica dei due tipi di risonanza si rende necessario soffermarsi separatamente su entrambi i casi. Ciò verrà fatto nei tre prossimi paragrafi.

7.62 Risonanza serie

Generalità

Si consideri il più semplice bipolo risonante passivo: una resistenza R_s in serie ad un' induttanza L e ad una capacità C (vedi fig. 7.62-1), alimentato con un generatore di tensione avente *f.e.m.* $\overline{E}_0$, pulsazione ω ed impedenza interna ohmica R_0 [quindi $\overline{Z}_0 = R_0$ (1)].

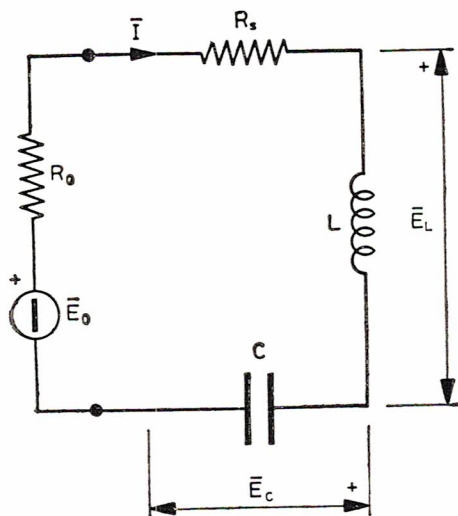



Fig. 7.62-1

Questo bipolo potrà essere realizzato in pratica collegando in serie una bobina ed un condensatore. In tal caso la resistenza R_s rappresenterà le perdite della bobina, poiché le perdite del condensatore sono di solito trascurabili rispetto a quelle della bobina.

La corrente che circola in questo bipolo avrà allora la seguente espressione, indicando con $\overline{Z}_s$ l' impedenza dell' intero circuito:

7.62-1
$$\overline{I} = \frac{\overline{E}_0}{\overline{Z}_s} = \frac{\overline{E}_0}{R_s + R_0 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}.$$

Perché il circuito dato possa entrare in risonanza, cioè affinché la corrente $\overline{I}$ abbia a risultare in fase con la *f.e.m.* $\overline{E}_0$, la quale è l'unica tensione agente nel circuito, dovrà essere ovviamente reale il denominatore

---

(1) Molti generatori soddisfano questa condizione con buona approssimazione soprattutto quelli elettronici.

dell'espressione 7.62-1. Questa condizione si ha dunque quando:

7.62-2 $$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

e sarà soddisfatta, ad esempio fissati i valori di L e C, per un particolare valore ω_r della pulsazione del generatore che alimenta il circuito. A questo particolare valore si dà il nome di pulsazione di risonanza.

Più in generale si può dire che quel particolare valore di induttanza o di capacità o di pulsazione tale da soddisfare la condizione:

7.62-3 $$\omega_r^2 LC = 1$$

porta il circuito di fig. 7.62-1 in risonanza.

Alla risonanza si verifica dunque che:

a) la corrente è in fase con la tensione applicata $\overline{E}_0$, cioè il circuito si comporta come se fosse ohmico;

b) il valore della corrente nel circuito vale:

7.62-4 $$\overline{I}_r = \frac{E_0}{(R_s + R_0)_r} \text{ (}^2\text{)},$$

cioè la corrente è limitata ora solamente dalla parte ohmica del circuito, per cui se questa risultasse di basso valore la corrente assumerebbe valori notevoli;

c) se R_s ed R_0 sono praticamente costanti nell' intorno di ω_r, allora al variare del valore della pulsazione ω la corrente assume il suo massimo valore proprio per $\omega = \omega_r$. Infatti l'andamento del modulo dell' impedenza del circuito $Z_s = \sqrt{(R_s + R_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ in funzione della pulsazione si presenta come quello riportato in fig. 7.62-2*a* [3], cioè presenta un minimo valore per $\omega = \omega_r$, per cui quello della corrente $I = \frac{E_0}{Z_s}$ (con E_0 di ampiezza costante), si veda la fig. 7.62-3*a*, presenterà per $\omega = \omega_r$ ovviamente il massimo valore, cioè I_r. Si noti che i diagrammi delle figg. 7.62-2 e 3 riportano, oltre l'andamento dei moduli, anche quello degli argomenti, precisamente in fig. 7.62-2*b* quello θ dell' impedenza Z_s del circuito, in fig. 7.62-3*b* lo sfasamento φ della corrente $\overline{I}$ sulla tensione $\overline{E}_0$.

---

[2] Tutte le grandezze in risonanza si distingueranno da quelle fuori risonanza per l'apposizione di una r come indice.

[3] Si osservi che per $\omega < \omega_r$ il circuito si comporta capacitivamente, per $\omega > \omega_r$ invece induttivamente.

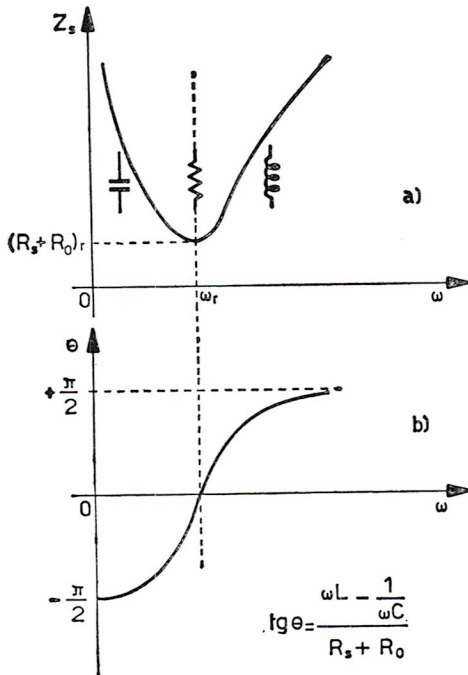
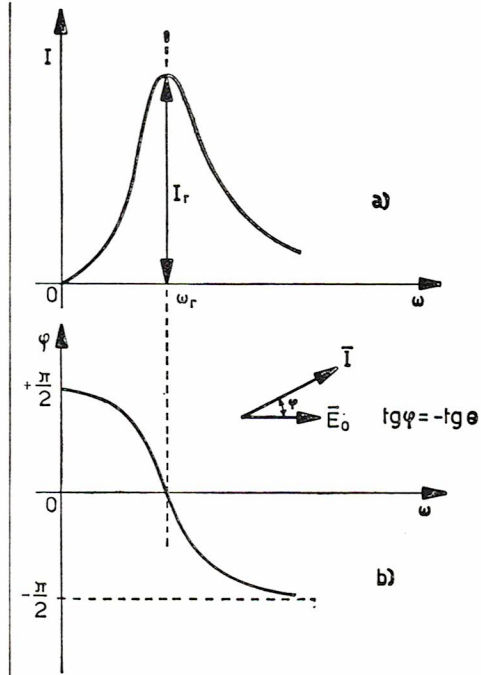



Fig. 7.62-2 *Fig. 7.62-3*

Fuori risonanza, cioè per valori di pulsazione ω inferiori o superiori rispetto a quello ω_r, si ha invece che:

d) la corrente non è più in fase con la tensione di alimentazione $\overline{E}_0$, precisamente la corrente sarà in anticipo sulla tensione per $\omega < \omega_r$, mentre sarà in ritardo per $\omega > \omega_r$. Infatti per $\omega < \omega_r$ la reattanza totale del circuito $\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$ è capacitiva poiché $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$, per $\omega > \omega_r$ la reattanza totale del circuito è invece induttiva poiché $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$ (vedi fig. 7.62-2);

e) il valore della corrente nel circuito è inferiore a quello I_r che si ha in risonanza, poiché la corrente è limitata ora anche dalla reattanza totale $\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$ del circuito. L'andamento della corrente fuori risonanza appare chiaramente nella fig. 7.62-3*a* il cui diagramma rappresenta appunto la curva di risonanza del circuito.

Coefficiente di risonanza

Per poter studiare agevolmente le proprietà dei circuiti elettrici in risonanza e fuori risonanza occorre introdurre il cosiddetto coefficiente

di risonanza ε. Questo può essere definito come il rapporto fra la potenza reattiva impegnata dagli elementi reattivi di egual segno presenti nel circuito (cioè tutta la potenza reattiva induttiva o capacitiva) e la potenza attiva dissipata dallo stesso circuito, essendo entrambe queste potenze calcolate alla pulsazione ω_r di risonanza. Si ha quindi per definizione che:

7.62-5 $$\varepsilon = \frac{\text{Pot. reattiva induttiva}}{\text{Potenza attiva}} = \frac{\text{Pot. reattiva capacitiva}}{\text{Potenza attiva}} .$$

Si noti che in base a questa definizione si possono in pratica presentare due coefficienti di risonanza, precisamente:

— un coefficiente di risonanza a vuoto ε_v, quando per circuito si intende solamente quella parte costituente il bipolo utilizzatore (bobina e condensatore), con esclusione cioè della parte passiva del generatore. In questo caso si ha allora: Pot. reattiva induttiva $= \omega_r L I_r^2 = \frac{1}{\omega_r C} I^2$, Pot. attiva $= R_{s,r} I_r^2$, per cui:

7.62-6 $$\varepsilon_v = \frac{\omega_r L}{R_{s,r}} = \frac{1}{\omega_r C R_{s,r}} .$$

Nel caso in cui $R_{s,r}$ rappresenti esclusivamente le perdite della bobina alla pulsazione di risonanza (il condensatore sia cioè considerato perfetto) si ha ovviamente che il coefficiente di risonanza a vuoto coincide con il fattore di merito Q della bobina [4];

— un coefficiente di risonanza a carico ε_c, quando la potenza attiva dissipata e quella reattiva impegnata sono dovute all' intero circuito (bipolo utilizzatore più generatore). Quindi, siccome la potenza reattiva coincide con quella del bipolo risonante (circuito a vuoto), poiché l' impedenza del generatore si suppone priva di reattanza, mentre la potenza attiva è ora aumentata ed ammonta precisamente a: Pot. attiva $= (R_s + R_0)_r\, I_r^2$, si ha che:

7.62-7 $$\varepsilon_c = \frac{\omega_r L}{(R_s + R_0)_r} = \frac{1}{\omega_r\, C (R_s + R_0)_r} .$$

Ovviamente, poiché $(R_s + R_0)_r > R_{s,r}$ sarà sempre $\varepsilon_c < \varepsilon_v$ [5].

---

[4] Si definisce fattore di merito (Q) di una bobina il rapporto fra la sua reattanza X_L e la sua *resistenza* R_s, essendo in sostanza $X_L = \omega L$ ed R_s quel parametro dissipativo di tipo serie che tien conto di tutte le perdite della bobina. Si noti che numericamente il coefficiente Q può valere poche unità alle basse frequenze, ma viceversa può ammontare a diverse centinaia di unità per frequenze assai più alte. A proposito del fattore di merito, si veda anche quanto è stato esposto nel § 5.517 del capitolo 5.

[5] È chiaro che il vero coefficiente di risonanza di un circuito chiuso risulta quello a carico ε_c. Infatti, se si vuole avere un regime di corrente, il circuito dovrà essere chiuso su di un generatore (reale) il quale non potrà mai avere una resistenza interna nulla.

Naturalmente è possibile legare fra di loro i valori dei coefficienti di risonanza a vuoto e a carico alle rispettive resistenze. Infatti dividendo la 7.62-7 per la 7.62-6 si trova la seguente condizione:

7.62-8 $$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_v} = \left(\frac{R_s}{R_s + R_0}\right)_r ,$$

dalla quale scende subito quest'altra:

7.62-9 $$\varepsilon_c = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_0}{R_s}\right)_r} \varepsilon_v \, (^6) ,$$

formula assai usata in pratica perché permette di passare dal valore del coefficiente di risonanza a vuoto, cioè del bipolo risonante, a quello a carico, cioè del circuito intero, semplicemente conoscendo la resistenza del bipolo risonante e quella del generatore su cui verrà chiuso il bipolo stesso.

Sovratensione

In condizioni di risonanza, la tensione ai capi dell'induttanza L e della capacità C, con riferimento al circuito di fig. 7.62-1, ammonta rispettivamente a:

7.62-10 $$\overline{E}_{L,r} = j\,\omega_r L \overline{I}_r = j\,\omega_r L \frac{\overline{E}_0}{(R_s + R_0)_r} = j\varepsilon_c \overline{E}_0$$

7.62-11 $$\overline{E}_{C,r} = -j\frac{1}{\omega_r C}\overline{I}_r = -j\frac{1}{\omega_r C}\cdot\frac{\overline{E}_0}{(R_s + R_0)_r} = -j\varepsilon_c \overline{E}_0$$

Per il relativo diagramma vettoriale si veda la fig. 7.62-4.

Si deduce quindi che il valore (modulo) della tensione che si viene a localizzare in risonanza ai capi di ciascuno dei due elementi reattivi è ε_c volte quello E_0 del generatore che alimenta il circuito, quindi notevole se il coefficiente di risonanza a carico è di notevole valore. Dalle 7.62-10 e 11 scende anzi un altro modo per definire il coefficiente di risonanza a carico, precisamente come rapporto fra la tensione ai capi dell'induttanza, o della capacità, e quella del generatore E_0, cioè:

7.62-12 $$\varepsilon_c = \frac{E_{L,r}}{E_0} = \frac{E_{C,r}}{E_0} .$$

---

[6] Poiché, come già è stato detto, $\varepsilon_v \cong Q$, il valore di ε_v può raggiungere alle alte frequenze valori assai elevati, cioè di qualche centinaio di unità ($\varepsilon_v = 100 \div 300$), per cui anche il coefficiente ε_c potrà essere di poco inferiore se R_0 risulterà molto piccolo in confronto ad R_s.

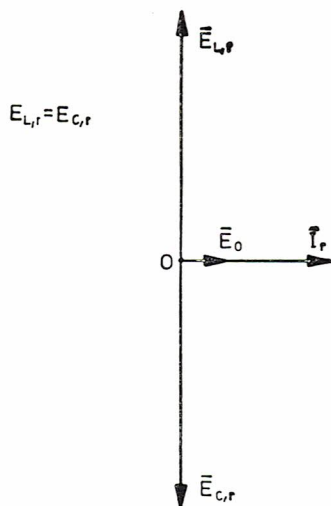



Fig. 7.62-4

In questo modo il coefficiente di risonanza ε_c può essere definito come coefficiente di *sovratensione.*

Curva di risonanza universale

Le proprietà del circuito fuori risonanza risultano bene in evidenza, in maniera completa, osservando le due curve che rappresentano, in funzione della pulsazione ω, rispettivamente il modulo e l'argomento dell' impedenza $\bar{Z}_s$ del circuito, oppure il modulo e lo sfasamento della corrente che percorre il circuito stesso. Di solito per le applicazioni pratiche è sufficiente prendere in esame la curva di risonanza della corrente che però, allo scopo di arrivare ad un' impiego il più generale possibile, è necessario trasformare in una curva che dia, in funzione della pulsazione ω, non la corrente I del circuito ma il rapporto di questa a quella di risonanza I_r. Ciò si ottiene facilmente dividendo ciascuna ordinata della curva di fig. 7.62-3a per il segmento I_r. Poiché questo è costante, la

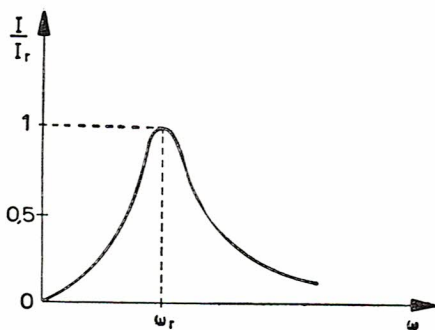



Fig. 7.62-5

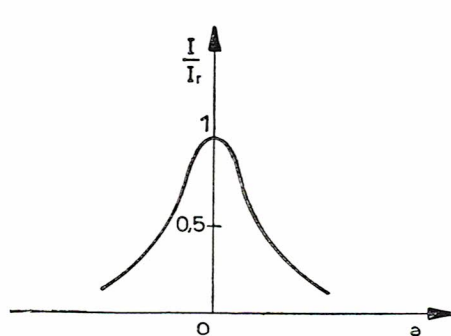



Fig. 7.62-6

curva che si deduce (vedi fig. 7.62-5) si presenta del tutto simile a quella di partenza : essa è quindi ancora una curva di risonanza, solamente che rappresenta dei valori relativi di correnti. Analiticamente questi valori relativi I/I_r, sempre con riferimento al regime elettrico del circuito di fig. 7.62-1, sono rappresentati dalla seguente espressione :

$$7.62\text{-}13 \qquad \frac{I}{I_r} = \frac{E_0}{\sqrt{(R_s + R_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \frac{(R_s + R_0)_r}{E_0} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_s + R_0}\right)^2}} \; (^7) \,.$$

È necessario a questo punto manipolare il termine che sta sotto radice dell'espressione qui trovata. A tale scopo, ricordando che il coefficiente di risonanza a carico ε_c può essere posto anche nella forma $\varepsilon_c = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s + R_0}$, si ha anzitutto che :

$$7.62\text{-}14 \qquad \frac{1}{R_s + R_0}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R_s + R_0}\left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}}\right) =$$

$$= \varepsilon_c \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right).$$

D'altronde, ponendo $\frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} = \delta$, si ha che $\frac{\omega}{\omega_r} = \delta + 1$ e $\frac{\omega_r}{\omega} = \frac{1}{\delta + 1}$, per cui la 7.62-14 diventa :

$$7.62\text{-}15 \qquad \varepsilon_c \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right) = \varepsilon_c \left(\delta + 1 - \frac{1}{\delta + 1}\right) = \varepsilon_c\, \delta \left(\frac{2 + \delta}{1 + \delta}\right).$$

Osservando ora che il termine δ risulta sempre di gran lunga inferiore a 1, poiché il valore di ω non è mai molto discosto da quello di ω_r (ciò vuol dire che lo studio fuori risonanza viene limitato a valori nell' intorno della risonanza), per cui δ risulta trascurabile rispetto ad 1

---

(7) Il valore di $R_s + R_0$ ch compare in questa formula sotto radice è quelio presentato alla pulsazione ω. Esso tuttavia non differisce molto da quello che si ha alla pulsazione ω_r per cui $(R_s + R_0)_r/(R_s + R_0) \cong 1$, purché appunto ω non differisca di molto da ω_r. Questo del resto è il caso che qui viene discusso.

e quindi anche rispetto a 2 (formula 7.62-15), si ha che la 7.62-14 diventa, in conseguenza della 7.62-15:

7.62-16 $$\frac{1}{R_s + R_0}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cong \varepsilon_c 2\delta = 2\,\varepsilon_c \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r},$$

cioè, introducendo il seguente nuovo parametro:

7.62-17 $$a = \varepsilon_c \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r},$$

anche:

7.62-18 $$\frac{1}{R_s + R_0}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \cong 2a\,.$$

L'espressione 7.62-13 assume così la semplice espressione:

7.62-19 $$\frac{I}{I_r} \cong \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,a^2}};$$

d'altronde anche la tangente dell'angolo φ di sfasamento può esser posta nella seguente semplice espressione:

7.62-20 $$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R_s + R_0} \cong -2a\,.$$

Si è dunque raggiunto l' importante risultato di aver espresso il rapporto $\frac{I}{I_r}$ in funzione di un solo parametro (a) il quale naturalmente a sua volta dipenderà e dalle caratteristiche del circuito (ε_c) e dallo scostamento relativo (δ) della pulsazione (o della frequenza) dal valore di risonanza.

Si osservi ora che, in un riferimento cartesiano il quale abbia in ascissa il parametro a e in ordinata il rapporto $\frac{I}{I_r}$, la 7.62-19 è rappresentata da una curva simmetrica rispetto all'asse verticale, come appare in fig. 7.62-6. Questa curva viene denominata *curva di risonanza universale* poiché risulta riferita a grandezze adimensionali e quindi valevole per qualsiasi circuito. D'altronde, poiché questa curva è simmetrica rispetto all'asse verticale, basterà in pratica conoscerne un solo ramo, come appare in fig. 7.62-7 (qui è stata riportata solo la prima parte).

È importante osservare da ultimo che, essendo la curva di risonanza universale, così come è stata ricavata, approssimata, essa interpreterà

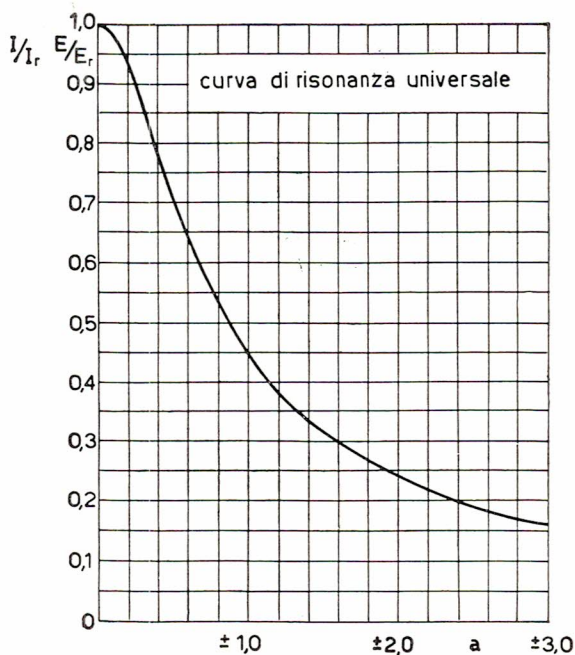



Fig. 7.62-7

tanto meglio l'andamento reale del circuito fuori risonanza quanto più sarà alto il coefficiente di risonanza a carico del circuito ($\varepsilon_c > 10$, infatti all'aumentare del valore del coefficiente ε_c la curva di risonanza reale presenta un andamento sempre più simmetrico rispetto alla verticale passante per ω_r) e quanto più vicini si sarà alla risonanza (in pratica occorre che $a < 3$, affinché δ sia effettivamente trascurabile rispetto alla unità e affinché il valore delle resistenze $R_s + R_0$ si possa ritenere indipendente dalla pulsazione e quindi siano valide le eguaglianze espresse dalle 7.62-13 e 18).

Selettività

Definita la selettività di un circuito elettrico come l'attitudine a comportarsi differentemente al variare della frequenza, cioè a discriminare le varie tensioni di alimentazione se a frequenza differente, si comprende allora, osservando la curva di fig. 7.62-3*a* o anche quella di risonanza universale, che il circuito risonante serie è dotato pure di *selettività*. Infatti, nell' ipotesi che resti costante l'ampiezza della tensione $\overline{E}_0$, ma non la sua pulsazione, si vede che l'ampiezza della tensione ai capi di uno qualsiasi degli elementi del circuito (ad esempio la tensione ai capi del condensatore) non rimane costante. La legge di variazione

naturalmente è la stessa con la quale varia la corrente I nel circuito ([8]).

Le proprietà selettive di un circuito dipendono quindi dalle caratteristiche risonanti del circuito stesso. A tale scopo viene introdotto un altro parametro, assai importante in pratica, che va sotto il nome di *banda passante.* Si definisce banda passante B l' intervallo di frequenza delimitato da quei due valori particolari f_1 ed f_2 (detti rispettivamente frequenza di taglio inferiore e superiore) per i quali il valore della corrente I nel circuito si riduce al 70,7 % del valore I_r presentato in risonanza (vedi fig. 7.62-8), quindi $I = I_r/\sqrt{2}$.

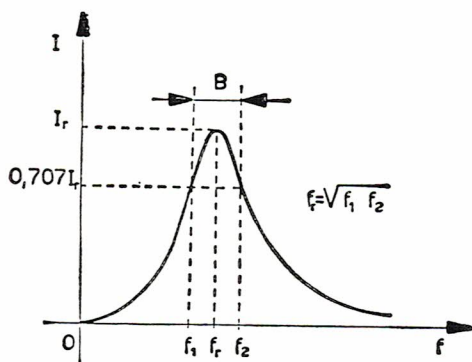



Fig. 7.62-8

Facendo uso della formula 7.62-19, o anche della curva universale (fig. 7.62-7), si deduce che il rapporto $\dfrac{I}{I_r}$ vale $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ quando il parametro a raggiunge il valore $a = \pm\,\dfrac{1}{2}$. Ciò permette di scrivere subito le seguenti due relazioni :

7.62-21 $$\varepsilon_c \frac{\omega_2 - \omega_r}{\omega_r} = \frac{1}{2} \qquad (\omega_2 > \omega_r)$$

7.62-21' $$\varepsilon_c \frac{\omega_1 - \omega_r}{\omega_r} = -\frac{1}{2} \qquad (\omega_1 < \omega_r) \;,$$

dalle quali, sottraendo membro a membro, si ottiene :

7.62-22 $$\varepsilon_c \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_r} = \varepsilon_c \frac{f_2 - f_1}{f_r} = 1 \,.$$

Risulta allora per la banda passante :

([8]) Il circuito favorisce dunque la frequenza f_r rispetto a tutte le altre frequenze.

7.62-23 $$B = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{\varepsilon_c},$$

formula fondamentale per i circuiti selettivi.

Conclusioni

La conoscenza delle proprietà dei circuiti R, L, C serie sottoposti all'azione di tensioni elettriche ha una grande importanza pratica. Si ricordi infatti che il fenomeno della risonanza può essere esaltato se utile (filtri, circuiti di carico selettivi, ecc.) o deve essere smorzato se dannoso (sovratensioni negli impianti elettrici, ecc.). Perché d'altronde il fenomeno si esalti occorrerà alimentare il circuito con un generatore elettrico avente bassissima resistenza interna, cioè con un generatore che approssimi assai bene quello ideale di tensione ed impiegare inoltre elementi circuitali a basse perdite (cioè ad alto fattore di merito): solo così la resistenza rappresentante le perdite totali *serie* del circuito sarà ipccola e quindi elevato risulterà il coefficiente di risonanza a carico.

7.63 Risonanza parallelo o antirisonanza

Generalità

Gli elementi reattivi di segno opposto, cioè la bobina e il condensatore, che costituiscono il bipolo risonante passivo, possono essere collegati fra di loro in parallelo, anziché in serie, per cui il circuito viene ad assumere la struttura riportata in fig. 7.63-1. Si noti che l'alimentazione è realizzata con un generatore di corrente sinusoidale caratterizzato da sola resistenza interna R_0 (1) .

Indicando con $\overline{Y}_p$ l'ammettenza dell' intero circuito, la tensione $\overline{E}$ ai capi del circuito varrà dunque, alla generica pulsazione ω, :

7.63-1 $$\overline{E} = \frac{\overline{I}_0}{\overline{Y}_p} = \frac{\overline{I}_0}{\frac{1}{R_0} + j\omega C + \frac{1}{R_{SL} + j\omega L}} =$$

$$= \frac{\overline{I}_0}{\frac{1}{R_0} + \frac{R_{SL}}{R_{SL}^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_{SL}^2 + \omega^2 L^2}\right)^2}.$$

(1) Vale anche qui quanto è stato riportato nella nota 1 del precedente paragrafo. D'altronde il motivo della presenza di un generatore di corrente, anziché di tensione, risulterà chiaro tra breve.

Ora il circuito di fig. 7.63-1 sarà in risonanza se la tensione $\bar{E}$ ai capi del bipolo risonante risulterà in fase con la corrente di alimentazione $\bar{I}_0$, il che avverrà quando il denominatore dell'ammettenza $\bar{Y}_p$ risulta

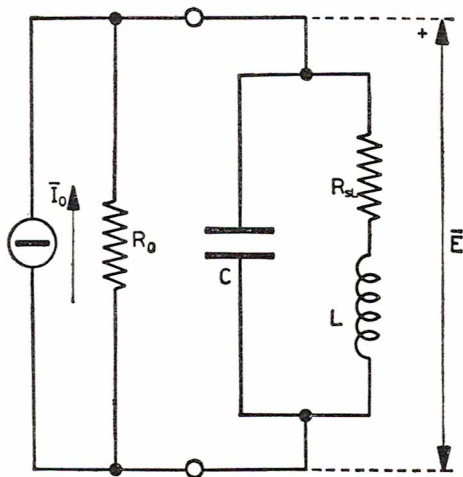



Fig. 7.63-1

reale, cioè quando:

7.63-2 $$\omega C - \frac{\omega L}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} = 0 \qquad (Q \lesseqgtr 10)\ (^2).$$

Naturalmente quel particolare valore ω_r di pulsazione che soddisfa la condizione sopra riportata si chiama come al solito pulsazione di risonanza.

A questo punto è importante notare che nel caso in cui sia $R_{sL} << \omega L$, il che avviene quando il fattore di merito Q della bobina risulta elevato ($Q \geq 10$), è possibile introdurre una notevole semplificazione nello schema del circuito di fig. 7.63-1 e quindi nelle formule relative. In questo caso infatti la resistenza in serie R_{sL} all' induttanza L potrà essere portata come resistenza in parallelo R_{pL} alla stessa induttanza L mediante la semplice formula (paragrafo 5.519):

7.63-3 $$R_{pL} = \frac{\omega^2 L^2}{R_{sL}} \qquad (Q \geq 10),$$

---

(2) Questa formula e le successive condizionate da $Q \lesseqgtr 10$ sono valide per qualsiasi valore di Q, ma in pratica verranno usate solo se $Q < 10$, poiché per $Q \geq 10$ sono disponibili altre formule assai più semplici e quindi più convenienti. Si ricordi che, per definizione, $Q = \dfrac{\omega L}{R_{sL}}$.

e il circuito di fig. 7.63-1 verrà sostituito allora da quello equivalente di fig. 7.63-2, ove i parametri tipo R, L, C risultano tutti e tre in parallelo.

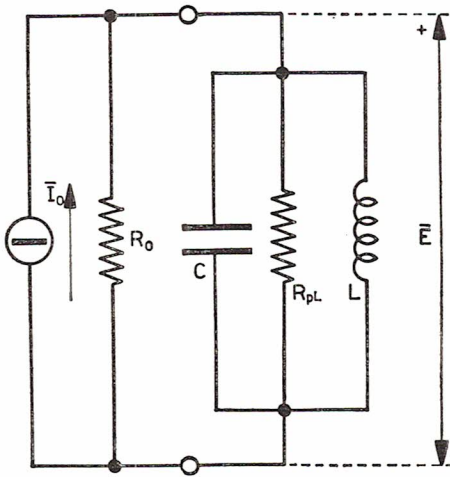



Fig. 7.63-2

La condizione di risonanza data in 7.63-2 assume così, nel caso di $Q \geq 10$, la seguente semplice espressione:

7.63-4
$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \qquad (Q \geq 10),$$

del tutto identica quindi alla condizione vista precedentemente in 7.62-2 per la risonanza serie.

Alla risonanza si ha dunque che:

a) la tensione è in fase con la corrente di alimentazione $\overline{I}_0$, cioè il circuito si comporta come se fosse ohmico;

b) il valore della tensione che si viene ad avere ai capi del circuito è dato dalla seguente espressione:

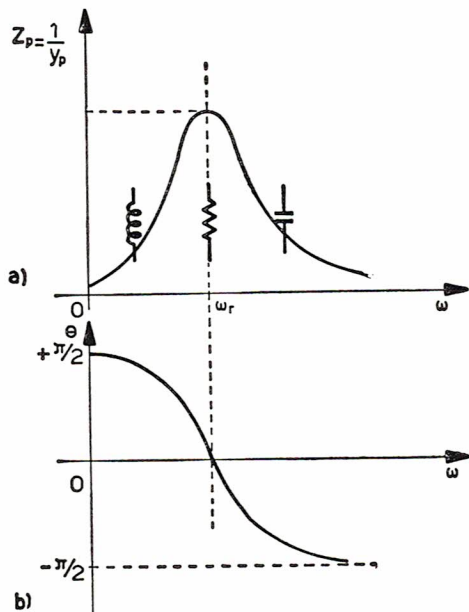
7.63-5
$$\overline{E}_r = \frac{\overline{I}_0}{\left(\dfrac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega_r^2 L^2} + \dfrac{1}{R_0}\right)_r} \qquad (Q \gtreqless 10),$$

o anche da:

7.63-5'
$$\overline{E}_r = \frac{\overline{I}_0}{\left(\dfrac{1}{R_{pL}} + \dfrac{1}{R_0}\right)_r}, \qquad (Q \geq 10),$$

cioè il valore della tensione che si manifesta ai capi del circuito risulta

dovuto esclusivamente alla conduttanza del circuito stesso ed assumerà un valore elevato se tale conduttanza avrà basso valore;

c) la tensione E_r assume in generale la massima ampiezza poiché il modulo dell' impedenza del circuito $\left(\overline{Z}_p = \dfrac{1}{\overline{Y}_p}\right)$ presenta in generale

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\omega C - \dfrac{\omega L}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2}}{\dfrac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega^2 L^2} + \dfrac{1}{R_0}} \quad (Q < 10)$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R_{pL}} + \dfrac{1}{R_0}} \quad (Q \geq 10)$$

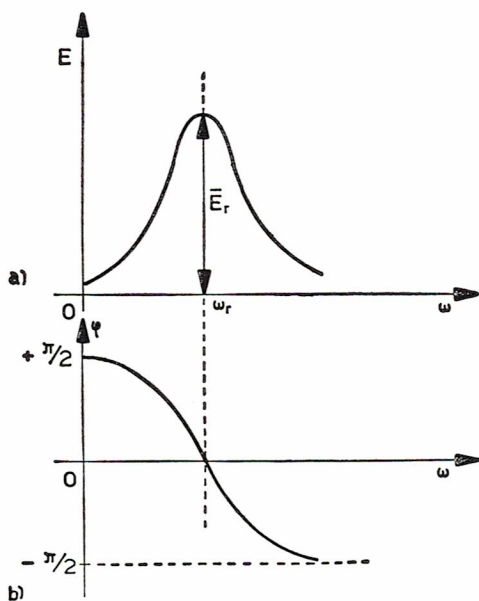



Fig. 7.63-3

Fig. 7.63-4

alla pulsazione $\omega = \omega_r$ il valore massimo, come appare osservando la curva riportata in fig. 7.63-3*a* che rappresenta il modulo dell' impedenza del circuito di fig. 7.63-1 in funzione della pulsazione ω ([3]). Infatti la curva che rappresenta l'andamento della tensione ai capi del circuito ($E = Z_p \cdot I_0$), si veda la fig. 7.63-4*a*, avrà un andamento simile a quello del modulo dell' impedenza $\bar{Z}_p$, poiché la corrente I_0 si ritiene di intensità costante al variare della pulsazione ω. La curva riportata in fig. 7.63-4*a* viene detta *curva di risonanza* del circuito.

Fuori risonanza, cioè per valori della pulsazione ω inferiori o superiori a quello ω_r di risonanza, si avrà invece che:

d) la tensione $\bar{E}$ non risulta più in fase con la corrente $\bar{I}_0$ di alimentazione, precisamente la tensione sarà in anticipo sulla corrente per $\omega < \omega_r$ poiché la suscettanza capacitiva del circuito è inferiore a quella induttiva, (il bipolo risonante è cioè induttivo); viceversa avviene per $\omega > \omega_r$. Per l'andamento dell'angolo di sfasamento φ ([4]) in funzione di ω si veda la fig. 7.63-4*b*;

e) il valore della tensione E che appare ai capi del circuito risulta inferiore a quello massimo E_r che si ha in risonanza, poiché ora gli elementi reattivi derivano parte della corrente di alimentazione I_0.

Coefficiente di risonanza

Anche per i circuiti risonanti parallelo è opportuno introdurre il coefficiente di risonanza. La sua definizione risulta naturalmente la stessa di quella data per i circuiti risonanti serie, ad esempio come rapporto fra la potenza reattiva impegnata dal condensatore o dalla bobina e la potenza attiva dissipata dal circuito, essendo entrambe queste potenze calcolate alla pulsazione ω_r di risonanza.

In pratica pure qui si debbono distinguere due coefficienti di risonanza, precisamente:

— un coefficiente di risonanza a vuoto ε_v, quando la potenza attiva e reattiva (dello stesso segno) interessano solo il bipolo risonante, cioè si prescinde dal generatore. Nel nostro caso, introducendo come potenza reattiva quella della capacità, si ha allora:

7.63-6
$$\varepsilon_v = \frac{\text{Pot. reattiva}}{\text{Pot. attiva}} = \frac{\omega_r C E_r^2}{\left(\dfrac{R_{SL}}{R_{SL}^2 + \omega_r^2 L^2}\right)_r E_r^2} = \omega_r C \left(\frac{R_{SL}^2 + \omega_r^2 L^2}{R_{SL}}\right)_r \qquad (Q_L \lesseqgtr 10)$$

([3]) Si osservi che per $\omega < \omega_r$ il circuito ha carattere induttivo, mentre per $\omega > \omega_r$ il circuito si comporta capacitivamente. Si veda anche il diagramma di fig. 7.63-3*b* che riporta il valore dell'argomento θ dell' impedenza $\bar{Z}_p$ in funzione di ω.

([4]) Inteso qui eccezionalmente come angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente.

7.63-6'
$$\varepsilon_v = \frac{\text{Pot. reattiva}}{\text{Pot. attiva}} = \frac{\omega_r C E_r^2}{\frac{1}{R_{pL,r}} E_r^2} = \omega_r C R_{pL,r} = $$
$$= \frac{R_{pL,r}}{\omega_r L} \ (^5) \qquad (Q \geq 10) .$$

Si osservi che la formula 7.63-6 è stata ricavata per il circuito di fig. 7.63-1, mentre la formula 7.63-6' per quello di fig. 7-63-2. Si noti ancora come nel caso in cui le perdite del bipolo siano dovute solamente alla bobina (figg. 7.63-1 e 2) si ha naturalmente che $\varepsilon_v = Q$, cioè che il coefficiente di risonanza del bipolo risonante coincide con il fattore di merito della bobina;

— un coefficiente di risonanza a carico ε_c, quando la potenza attiva e reattiva sono relative all' intero circuito, generatore compreso.

Sarà allora, con riferimento al circuito di fig. 7.63-1:

7.63-7
$$\varepsilon_c = \frac{\text{Pot. reattiva}}{\text{Pot. attiva}} = \frac{\omega_r C E_r^2}{\left(\frac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega_r^2 L^2} + \frac{1}{R_0}\right)_r E_r^2} =$$
$$= \frac{\omega_r C}{\left(\frac{R_{sL}}{R_{sL}^2 + \omega_r^2 L^2} + \frac{1}{R_0}\right)_r} \qquad (Q \lesseqgtr 10)$$

e a quello di fig. 7.63-2:

7.63-7'
$$\varepsilon_c = \frac{\text{Pot.reattiva}}{\text{Pot.attiva}} = \frac{\omega_r C E_r^2}{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)_r E_r^2} =$$
$$= \omega_r C \left(\frac{R_{pL} R_0}{R_{pL} + R_0}\right)_r = \frac{1}{\omega_r L} \left(\frac{R_{pL} R_0}{R_{pL} + R_0}\right)_r \qquad (Q \geq 10) .$$

Ovviamente anche nel caso della risonanza parallelo sarà sempre $\varepsilon_c < \varepsilon_v$. D'altronde la relazione che lega questi due parametri può essere ricavata come segue. Considerando per semplicità solo il caso in cui $Q \geq 10$, si divida membro a membro l'espressione 7.63-7' con quella 7.63-6'. Risulta così:

7.63-8
$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_v} = \left(\frac{R_0}{R_{pL} + R_0}\right)_r ;$$

---

(5) Quando $Q \geq 10$ si ha $\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L}$ (formula 7.63-4).

d'altra parte da questa relazione si deduce, dopo facili passaggi, questa altra :

7.63-9
$$\varepsilon_c = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_{pL}}{R_0}\right)_r} \varepsilon_v ,$$

formula assai più comoda della precedente. La 7.63-9 mostra infatti come, affinché ε_c non risulti di molto inferiore ad ε_v, occorra che il valore di R_0 (calcolato alla risonanza si intende, cioè $R_{0,r}$) sia molte volte più grande di R_{pL} (calcolato anch'esso alla risonanza) : è dunque per questo motivo che il generatore di energia che alimenta il bipolo risonante deve essere veramente *di corrente*, cioè a grande resistenza interna, qualora si voglia sfruttare al massimo le proprietà risonanti del bipolo.

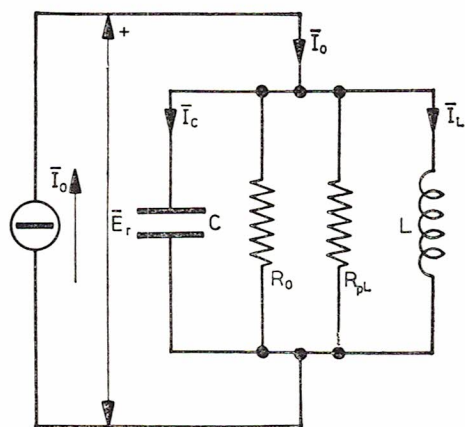



Fig. 7.63-5

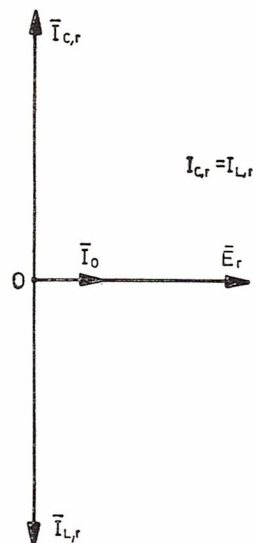



Fig. 7.63-6

Sovracorrente

In condizioni di risonanza la corrente nel ramo contenente la capacità e in quello contenente l'induttanza L, con riferimento al circuito di fig. 7.63-5 che è lo stesso circuito di fig. 7.63-2, ma con R_0 vicino a R_{pL}, vale rispettivamente :

7.63-10
$$\overline{I}_{C,r} = j\,\omega_r C \overline{E}_r = j\,\omega_r C \frac{\overline{I}_0}{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)_r} = j\varepsilon_c \overline{I}_0$$

7.63-11
$$\overline{I}_{L,r} = -j \frac{1}{\omega_r L} \overline{E}_r = -j\,\omega_r C \overline{E}_r = -j\varepsilon_c \overline{I}_0 .$$

Per il relativo diagramma vettoriale si veda la figura 7.63-6.

Si noti che la corrente $\overline{I}_0$ del generatore nel circuito schematizzato come in fig. 7.63-5, circola, alla risonanza, esclusivamente attraverso il parallelo delle resistenze R_{pL} ed R_0 (6) : la corrente negli altri due rami L e C si sostiene infatti da sola, inquantoché essa è costituita dalla corrente di carica e scarica di una capacità interessante un' induttanza (corrente oscillatoria).

Il condensatore e la bobina risultano quindi attraversati da una corrente (oscillatoria) il cui valore è ε_c volte quello presentato dalla corrente del generatore I_0 che alimenta il circuito, quindi una corrente elevata se il coefficiente di risonanza a carico ε_c del circuito è notevole. Questo coefficiente può dunque esser definito in altro modo, cioè come coefficiente di *sovracorrente.* Infatti dalle 7.63-10 e 11 discende che :

7.63-12
$$\varepsilon_c = \frac{I_{C,r}}{I_0} = \frac{I_{L,r}}{I_0} .$$

Curva di risonanza universale

Riguardo alle proprietà presentate dal circuito fuori risonanza si può ripetere quanto è stato detto a proposito della risonanza serie, in particolare che, allo scopo di arrivare a certe conclusioni generali, è necessario trasformare la curva di risonanza normale (fig. 7.63-4a) in quella di tipo universale, la quale in funzione della pulsazione ω dovrà fornire, anziché il valore della tensione E ai capi del circuito, quello del rapporto di quest'ultima alla tensione E_r di risonanza.

A tale scopo si incomincerà a cercare l'espressione analitica del rapporto E/E_r il quale, nell' ipotesi che il fattore di merito della bobina sia maggiore di 10, potrà essere posto, con riferimento al circuito riportato in fig. 7.63-2, nella seguente forma :

7.63-13
$$\frac{E}{E_r} = \frac{I_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)_r}{I_0} \cong$$

$$\cong \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}}\right)^2}} \ (7) \qquad (Q \geq 10) .$$

---

(6) Il circuito è infatti puramente ohmico per il generatore, cioè per la corrente $\overline{I}_0$.

(7) Se la pulsazione ω non è molto discosta da quella ω_r, il valore del rapporto $\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)_r \Big/ \left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)$ è molto vicino all'unità e quindi scompare dalla formula, che però diventa approssimata.

Ora il termine $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \Big/ \left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)$, procedendo nello stesso modo usato a proposito della risonanza serie ed introducendo ancora il parametro:

7.63-14
$$a = \varepsilon_c \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r},$$

diventa eguale, con buona approssimazione, al fattore $2a$, per cui in definitiva la 7.63-13 assumerà la seguente forma:

7.63-15
$$\frac{E}{E_r} \cong \frac{1}{\sqrt{1 + 4a^2}} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_c \geq 10 \\ a < 3 \end{pmatrix},$$

e la tangente dell'angolo φ di sfasamento fra tensione e corrente prenderà anch'essa la seguente semplice espressione:

7.63-16
$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}} \cong - 2a \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_c \geq 10 \\ a < 3 \end{pmatrix}.$$

Si è raggiunto così l'importante risultato per il quale la curva che rappresenta l'andamento del rapporto E/E_r in funzione del parametro a presenta l'identica espressione analitica e quindi grafica di quella del rapporto I/I_r vista nel precedente paragrafo, naturalmente con tutte le limitazioni dette a suo tempo e cioè che il coefficiente di risonanza a carico del circuito risulti maggiore o eguale a 10 e il parametro a risulti inferiore a 3. Perciò le curve riportate nelle figg. 7.62-6 e 7 sono ancora perfettamente valide purché si consideri al posto del rapporto I/I_r quello E/E_r.

Selettività

Anche il circuito risonante parallelo si presenta selettivo: naturalmente tale proprietà si desume osservando la sua curva di risonanza (vedi ad esempio figg. 7.63-7 e 8). Si deduce così tra l'altro che il circuito possiede una banda passante, essendo questa definita come l'intervallo di frequenza delimitato da quei due particolari valori f_1 ed f_2 (detti rispettivamente ancora frequenza di taglio inferiore e superiore) per i quali il valore della tensione E ai capi del circuito stesso scende al 70,7 % $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ del valore massimo E_r presentato in risonanza.

Con procedimento analogo a quello dato nel precedente paragrafo, si dimostra che pure in questo caso la banda passante risulta espressa

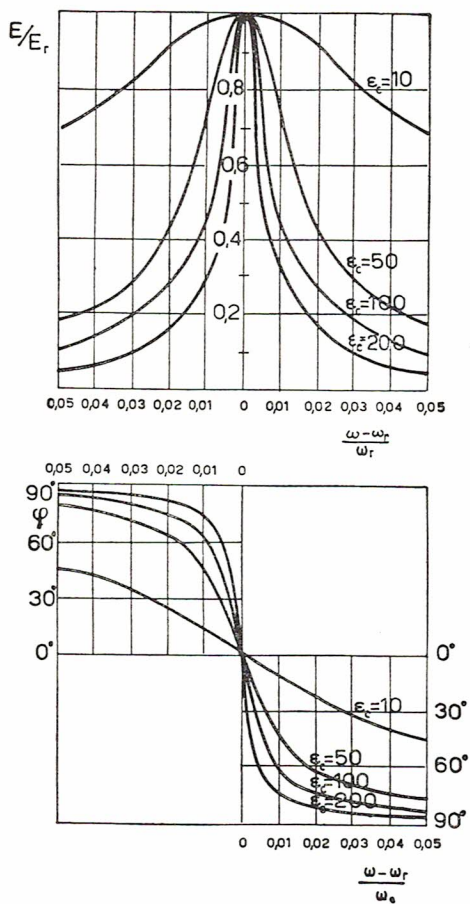



Fig. 7 63-7

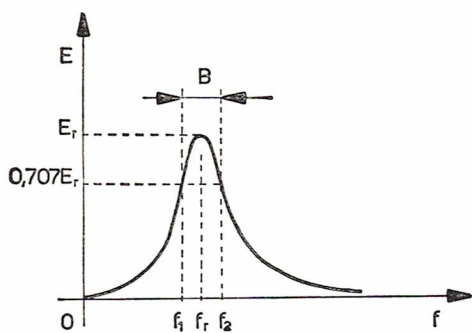



Fig. 7.63-8

dalla seguente formula:

7.63-17
$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_r}{\varepsilon_c},$$

essendo f_r la frequenza di risonanza.

Osservazioni

Non sempre si trova o si può considerare il bipolo L, C parallelo alimentato tramite un generatore di tensione con elevata resistenza interna, cioè tramite un generatore di corrente nel vero senso della parola. È quindi interessante sapere che cosa succede nel caso contrario, ad esempio quando, per semplicità, il circuito viene a trovarsi alimentato con un generatore ideale di tensione (vedi fig. 7.63-9).

In questo caso, l'intensità della corrente I assorbita dal bipolo varierà in funzione della pulsazione ω del generatore, secondo l'andamento rappresentato dalla curva di fig. 7.63-10. Infatti $I = E_0/Z_p$, ma

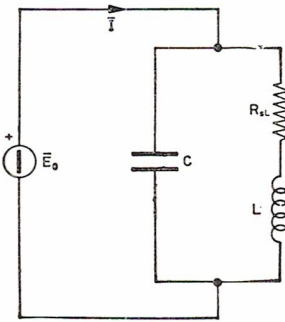
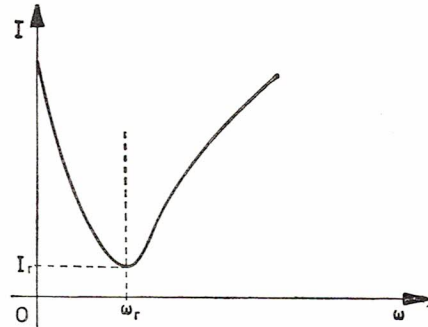



Fig. 7.63-9 *Fig. 7.63-10*

E_0 ha ampiezza costante, per ipotesi, mentre l'impedenza Z_p presenta un modulo il cui andamento, in funzione della pulsazione ω, è quello rappresentato in fig. 7.63-3*a*. La corrente alla risonanza presenterà dunque un minimo, poiché l'impedenza Z_p presenta un massimo, e il suo valore sarà espresso naturalmente dalla seguente formula:

7.63-18 $$I_r = \frac{E_0}{R_{pL,r}},$$

dove $1/R_{pL,r}$ rappresenta la parte reale dell'ammettenza del bipolo alla pulsazione di risonanza.

Un bipolo L, C parallelo alimentato in questo modo s'incontra nel rifasamento (parallelo) industriale [8]: come si sa infatti la capacità C viene inserita ai capi di un carico ohmico-induttivo allo scopo di aumentare il fattore di potenza. Naturalmente il circuito risuona solo se il rifasamento è totale ($\cos\varphi = 1$). Si noti però che il fattore di merito del ramo induttivo risulta di solito molto basso ($Q_L << 10$; ad esempio un carico ohmico induttivo che determini un $\cos\varphi = 0{,}5$ presenta un fat-

---

[8] I generatori elettrici che alimentano le reti industriali sono caratterizzati da bassissima impedenza interna.

tore di merito $Q = \text{tg}\, \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = 1{,}73$), per cui gli effetti della risonanza sono modesti.

Conclusioni

Le proprietà dei circuiti L, C parallelo sono di grande importanza pratica poiché il fenomeno della antirisonanza, convenientemente esaltato, trova utili applicazioni tecniche, come ad esempio nei circuiti selettivi per apparecchiature di misura, per radio apparati, filtri, ecc. , tutte applicazioni queste basate sul fatto che, in sostanza, ogni bipolo antirisonante ad alto coefficiente di risonanza praticamente si comporta come un cortocircuito (bassissima impedenza) quando la pulsazione ω di alimentazione è differente (anche di poco ; ciò dipenderà dal grado di selettività del bipolo stesso) da quella di risonanza ω_r e come un circuito ad altissima resistenza (tale da poter considerare talvolta il circuito come aperto) alla pulsazione ω_r.

Si sarà notato d'altronde leggendo questo paragrafo come lo studio dell'antirisonanza si sia presentato molto agevole tutte le volte che il bipolo risonante è stato schematizzato con tre rami R, L, C in parallelo (fig. 7.63-2) anziché con due soli rami R-L e C in parallelo (fig. 7.63-1). A tale proposito si fa osservare che solamente il bipolo secondo quest'ultima schematizzazione risulta più aderente alla realtà fisica ; l'altro, cioè quello con i tre rami R,L,C in parallelo, ne è invece privo : le perdite infatti di una bobina dovrebbero essere sempre rappresentate, anche in una grossolana schematizzazione, con una resistenza in serie (e non in parallelo) all' induttanza stessa.

Naturalmente non sempre l'antirisonanza darà luogo ad utili effetti : ad esempio nel macchinario elettrico si possono presentare in certe condizioni fenomeni dannosi di risonanza, risonanza che in questo caso occorrerà cercare di evitare o di smorzare al massimo.

7.64 Risonanza per variazione di reattanza

Un circuito L, C serie o parallelo può essere portato in risonanza ad una certa pulsazione ω prefissata variando, ad esempio, esclusivamente la reattanza di uno degli elementi del circuito. Il generatore che alimenta il circuito rimane allora caratterizzato dall'avere una tensione E_0 (risonanza serie) o una corrente I_0 (risonanza parallelo) di ampiezza costante ed una pulsazione pure essa costante (ω). In sostanza, si tratta d' imporre la risonanza al circuito non agendo sulla pulsazione del generatore, ma sul valore dell' induttanza o della capacità rispettivamente della bobina o del condensatore ivi presenti.

Molto usato è il circuito che entra in risonanza per variazione del valore della capacità C del condensatore. La manovra prende il nome

di *accordo*; di conseguenza il circuito si dirà accordato sulla pulsazione ω.

Occorre distinguere naturalmente il circuito risonante serie da quello parallelo.

Per il circuito risonante serie (vedi fig. 7.64-1*a*), la cui equazione fondamentale rimane ancora quella data in 7.62-1, cioè:

7.64-1 $$\bar{I} = \frac{\bar{E}_0}{R_s + R_0 + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)},$$

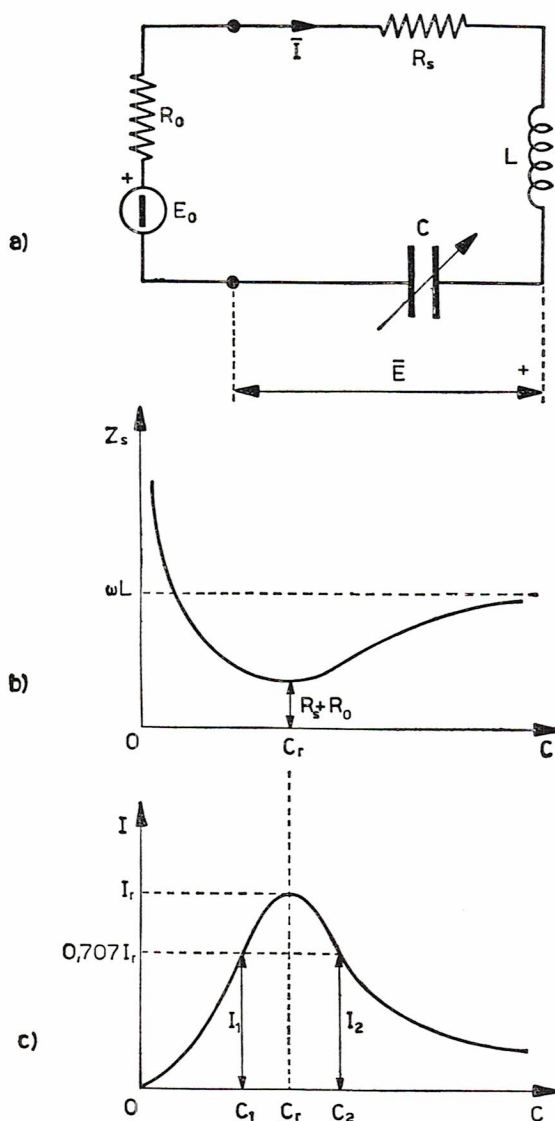



Fig. 7.64-1

si ha che esso entra in risonanza per quel particolare valore di capacità C_r per il quale si annulla la parte reattiva del circuito, cioè quando C_r soddisfa alla seguente condizione:

7.64-2
$$\omega^2 L C_r = 1$$

identica, ovviamente, a quella vista nel § 7.62. D'altronde anche la curva di risonanza, si veda la fig. 7.64-1*c*, assomiglia alle curve di risonanza già note: essa presenta infatti il massimo valore (I_r) quando la capacità C raggiunge appunto il valore C_r.

Il circuito si presenta, come si vede, molto sensibile alle variazioni di capacità: per esso avrà quindi grande importanza il coefficiente di risonanza a carico ε_c la cui definizione rimane naturalmente quella vista a suo tempo nel § 7.62. Il coefficiente ε_c risulta d'altronde legato alla capacità del circuito dalle seguenti importanti relazioni:

7.64-3
$$\varepsilon_c = \frac{C_1}{C_r - C_1} = \frac{C_2}{C_2 - C_r} \cong \frac{C_r}{\Delta C_r},$$

dove C_1 rispettivamente C_2 stanno a rappresentare quei particolari valori di capacità (si veda la fig. 7.64-1*c*) che portano il circuito fuori risonanza in modo tale che la corrente raggiunga il 70,7 % $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ del valore I_r presentato alla risonanza ($I_1 = I_2 = I_r/\sqrt{2}$). La dimostrazione di quanto riportato in 7.64-3 non è difficile.

Si incominci a scrivere ad esempio l'espressione analitica della corrente nel circuito quando $C = C_1$:

7.64-4
$$I_1 = \frac{E_0}{\sqrt{(R_s + R_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2}} =$$

$$= \frac{E_0}{(R_s + R_0)\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C_1}}{R_s + R_0}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C_1}}{R_s + R_0}\right)^2}}.$$

Questa raggiunge il valore $I_r/\sqrt{2}$ per:

$$7.64\text{-}5 \qquad \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C_1}}{R_s + R_0} = -1\,,$$

il segno meno risulta perché $1/\omega C_1 > \omega L$. Sviluppando si ha:

$$7.64\text{-}6 \qquad \frac{\omega L}{R_s + R_0}\left(1 - \frac{1}{\omega^2 L C_1}\right) = -1\,;$$

ricordando però che $\omega L/(R_s + R_0)$ rappresenta il coefficiente di risonanza a carico del circuito e che $\omega^2 L = 1/C_r$, si ottiene:

$$7.64\text{-}7 \qquad \varepsilon_c\left(1 - \frac{1}{\dfrac{C_1}{C_r}}\right) = -1\,,$$

cioè appunto:

$$7.64\text{-}8 \qquad \varepsilon_c = \frac{C_1}{C_r - C_1}\,,$$

ossia anche, se $\Delta C_r = C_r - C_1$ è piccolo rispetto a C_1 per cui $C_1 \cong C_r$:

$$7.64\text{-}8' \qquad \varepsilon_c \cong \frac{C_r}{\Delta C_r}\,,$$

come volevasi dimostrare. Con lo stesso procedimento si ricava, scrivendo l'espressione della corrente I_2, che $\varepsilon_c = C_2/(C_2 - C_r)$.

Per il circuito risonante parallelo, nel caso che la bobina presenti un fattore di merito $Q \geq 10$ (vedi fig. 7.64-2a), l'equazione fondamentale rimane ancora quella vista nel § 7.63, cioè:

$$7.64\text{-}9 \qquad \bar{E} = \frac{\bar{I}_0}{\dfrac{1}{R_{pL}} + \dfrac{1}{R_0} + j\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}.$$

Si deduce così che esso risuona per quel particolare valore di capacità C_r che rende reale il denominatore della su riportata 7.64-9, cioè quindi tale da soddisfare sempre la condizione:

$$7.64\text{-}10 \qquad \omega^2 L C_r = 1\,.$$

La curva di risonanza del circuito, cioè la curva che dà i valori della tensione E ai capi del circuito in funzione della capacità C, si pre-

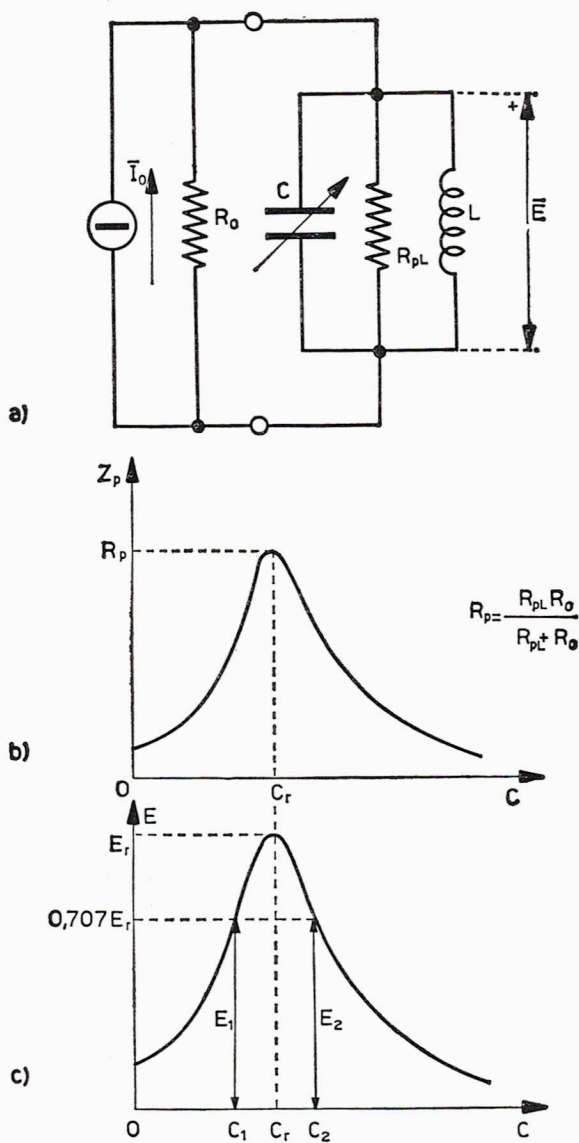



Fig. 7.64-2

senta come in fig. 7.64-2c : anche questa curva raggiunge il suo massimo valore (E_r) quando $C = C_r$.

Il circuito, come si vede, si comporta quindi molto sensibilmente alle variazioni di capacità. Il coefficiente di risonanza a carico ε_c, la cui definizione rimane ovviamente ancora quella vista nel § 7.63, risulta d'altronde legato alla capacità del circuito dalla stessa relazione trovata in 7.64-3 per il circuito risonante serie, quindi:

7.64-11 $$\varepsilon_c = \frac{C_1}{C_r - C_1} = \frac{C_2}{C_2 - C_r} \cong \frac{C_r}{\Delta C_r},$$

dove con C_1 rispettivamente con C_2 si intendono quei particolari valori di capacità, si veda la fig. 7.64-2c, che portano la tensione del circuito al 70,7 % $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ del valore E_r di risonanza. Quindi $E_1 = E_2 = E_r/\sqrt{2}$.

La dimostrazione risulta analoga a quella condotta nel caso del circuito risonante serie; solamente che ora l'espressione di partenza è ad esempio quella della tensione E_1:

7.64-12
$$E_1 = \frac{I_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)^2 + \left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\left(\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\omega C_1 - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{E_r}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega C_1 - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R_{pL}} + \frac{1}{R_0}}\right)^2}}.$$

N. B. A variazioni della capacità C del circuito risonante o antirisonante corrispondono dunque variazioni nell'accordo del circuito stesso. Ma si può anche affermare che a variazioni della capacità C corrispondono in realtà variazioni del valore della pulsazione di risonanza ω_r.

Se pertanto il circuito è in risonanza per un valore di capacità C_1 alla pulsazione ω_{r1}, occorrerà una capacità di valore $C_2 \neq C_1$ per riportarlo in risonanza alla pulsazione $\omega_{r2} \neq \omega_{r1}$. In questo caso è di grande utilità pratica poter disporre di una formula che leghi la variazione di capacità $\Delta C = C_2 - C_1$ a quella $\Delta\omega_r = \omega_{r2} - \omega_{r1}$ della pulsazione di risonanza.

A tale scopo si incominci con lo scrivere la condizione di risonanza per le due pulsazioni di risonanza:

7.64-13
$$\omega_{r1}^2 L C_1 = 1 \qquad \omega_{r2}^2 L C_2 = 1\,,$$

condizioni che sono eguali sia per il circuito serie che parallelo, purché la bobina di quest'ultimo abbia un fattore di merito $Q \geq 10$. D'altronde risulta che:

7.64-14
$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{1}{\omega_{r2}^2 L} - \frac{1}{\omega_{r1}^2 L} = \frac{\omega_{r1}^2 - \omega_{r2}^2}{\omega_{r1}^2\,\omega_{r2}^2 L}.$$

Ponendo ora $\omega_{r2} = \omega_{r1} + \Delta\omega_r$ e supponendo $\Delta\omega_r$ piccolo in confronto di ω_{r1}, per cui $\Delta\omega_r$ si possa trascurare rispetto al termine $2\omega_{r1}$, la 7.64-14 diventa:

7.64-15 $$\Delta C = \frac{\omega_{r1}^2 - (\omega_{r1} + \Delta\omega_r)^2}{\omega_{r1}^2 \omega_{r2}^2 L} = -\Delta\omega_r \frac{2\omega_{r1} + \Delta\omega_r}{\omega_{r1}^2 \omega_{r2}^2 L} \cong$$

$$\cong -\frac{2\Delta\omega_r}{\omega_{r1}\omega_{r2}^2 L} \cong -\frac{2\Delta\omega_r}{\omega_{r1}} C_2 ,$$

e poiché C_2 differisce assai poco da C_1 quando $\Delta\omega_r$ è piccolo, si può anche scrivere:

7.64-16 $$\Delta C \cong -\frac{2\Delta\omega_r}{\omega_{r1}} C_1 .$$

La relazione generale che lega gli scostamenti relativi della pulsazione di risonanza a quelli di capacità assume dunque la seguente espressione (valida per piccole variazioni di pulsazione):

7.64-17 $$\frac{\Delta C}{C} = -2\frac{\Delta\omega}{\omega} ,$$

ossia anche:

7.64-17′ $$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C} .$$

Si noti che il segno meno sta a significare come ad aumenti del valore della pulsazione di risonanza ($\Delta\omega_r$ positivo) debbano corrispondere diminuzioni nel valore della capacità del condensatore di accordo (ΔC negativo) e viceversa.

7.65 Problemi di applicazione sulla risonanza

Esercizio 7.651

Si trovi il valore da assegnare alla capacità C e alla resistenza R affinché il circuito di fig. 7.651-1 entri in risonanza e in queste condizioni il valore della tensione ai capi della capacità risulti il 20 % in più di quella del generatore.

Soluzione

Alla pulsazione $\omega = 314$ rad/sec il circuito assegnato risuona con una capacità C avente il seguente valore:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{314^2 \cdot 10} = 1{,}01 \ \mu\text{F} .$$

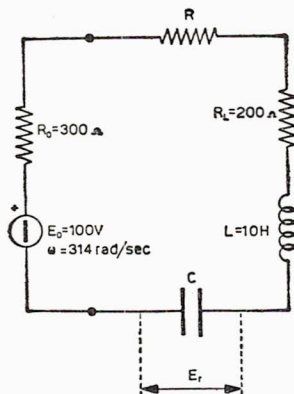



Fig. 7.651-1

D'altronde il coefficiente di risonanza a carico ε_c del circuito deve ammontare a 1,20, poiché il problema impone che il rapporto E_r/E_0 fra tensione di risonanza ai capi della capacità C e quella del generatore assuma il valore di $1 + 0{,}20 = 1{,}20$.

Perciò dalla seguente espressione del coefficiente di risonanza a carico:

$$\varepsilon_c = \frac{\omega L}{R_0 + R_L + R} = \frac{314 \cdot 10}{300 + 200 + R} = 1{,}20$$

è possibile ricavare il valore richiesto di R:

$$R = \frac{3140 - 500 \cdot 1{,}20}{1{,}20} = 2116 \text{ ohm} .$$

Esercizio 7.652

Il bipolo antirisonante di fig. 7.652-1*a* è costituito da un condensatore di capacità $C = 20$ pF (privo di perdite) e da una bobina di induttanza $L = 5$ μH, ad alto fattore di merito. Nell'ipotesi che il generatore di corrente sia ideale, quale valore dovrà presentare il fattore di merito della bobina affinché la banda passante risulti di 500 kHz?

Soluzione

Il fattore di merito della bobina è ricavabile dalla seguente formula, poiché in questo caso risulta $\varepsilon_c = \varepsilon_v = Q_r$:

$$\varepsilon_c = \frac{f_r}{B} ,$$

dove, per essere $Q > 10$, la frequenza di risonanza f_r è calcolabile semplicemente con la ben nota relazione:

$$f_r = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{LC}} = \frac{1}{6{,}28\,\sqrt{5\cdot 10^{-6}\cdot 20\cdot 10^{-12}}} = 15{,}9 \text{ MHz}\,.$$

Pertanto si ha:

$$\varepsilon_c = \frac{15{,}9}{0{,}5} = 31{,}8\,.$$

Il fattore di merito che la bobina deve possedere per soddisfare il problema è di 31,8 poiché $Q = \varepsilon_c$; qualora però la bobina, di per sé, possedesse un fattore di merito migliore, si dovrà procedere a *caricare* il bipolo antirisonante dato, ad esempio con una resistenza R_z (vedi fig. 7.652-1*b*), al fine di *peggiorarne* il coefficiente di risonanza por-

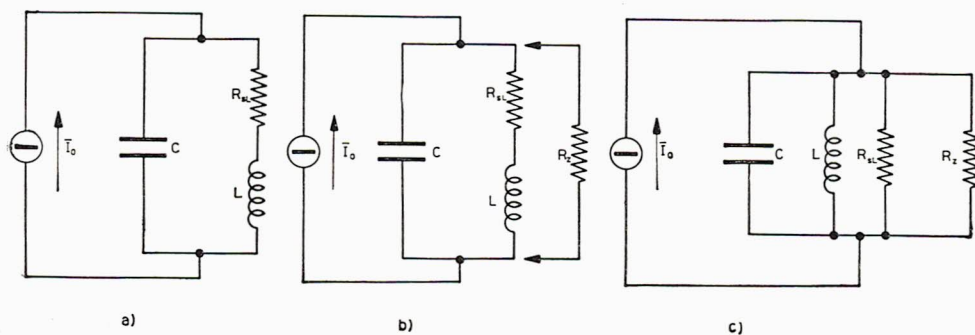



Fig. 7.652-1

tandolo così al valore stabilito. Ad esempio, nel caso di $Q = 100$, la resistenza R_z, che risulta ricavabile dalla formula 7.63-9, cioè:

$$\frac{\varepsilon_c}{Q} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_{pL}}{R_z}}\,,$$

nella quale:

$$R_{pL} = Q\cdot\omega_r L = 100\cdot 2\pi\cdot 15{,}9\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^{-6} = 5\cdot 10^4 \text{ ohm}$$

rappresenta la resistenza in parallelo all'induttanza per tener conto delle perdite della bobina (vedi fig. 7.652-1*c*), dovrà avere in definitiva il seguente valore:

$$R_z = \frac{R_{pL}}{\dfrac{Q}{\varepsilon_c} - 1} = \frac{50000}{\dfrac{100}{31{,}8} - 1} = 23400 \text{ ohm}$$

Esercizio 7.653

Un circuito antirisonante, costituito da un condensatore di capacità $C = 100$ pF (senza perdite) e da una bobina avente un' induttanza $L = 100$ μH e fattore di merito $Q = 80$, viene alimentato alla pulsazione di risonanza tramite un generatore ideale di corrente (vedi fig. 7.653-1). In queste condizioni la capacità C del condensatore subisce una variazione del 2 % : si dica a quanto ammonta la corrispondente variazione di tensione ai capi del circuito.

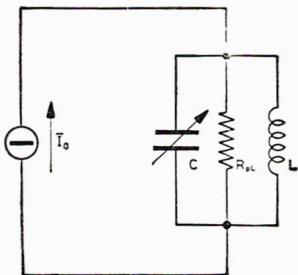



Fig. 7.653-1

Soluzione

Si indichi come al solito con E_r la tensione ai capi del circuito in condizioni di risonanza e con E la tensione fuori risonanza, che si manifesta nel nostro caso quando il condensatore passa dal valore di capacità C_r a quella C. Ma la tensione E può essere espressa facilmente in funzione dei parametri del circuito ricorrendo alla 7.64-12 del testo, dove però $C_1 = C$ ed $R_0 = \infty$. Risulta così:

$$E = \frac{E_r}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{1}{R_{pL}}}\right)^2}} = \frac{E_r}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega C - \dfrac{1}{\omega L}}{\dfrac{\omega C_r}{\varepsilon_c}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{E_r}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\omega(C - C_r)\varepsilon_c}{\omega C_r}\right]^2}} = \frac{E_r}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta C}{C_r}\,\varepsilon_c\right)^2}},$$

poiché $1/\omega L = \omega C_r$ ed $1/R_{pL} = \omega C_r/\varepsilon_c$ (formula 7.63-6′, dove però in questo caso $\varepsilon_c \equiv \varepsilon_v$).

Questa è la relazione, assai comoda, che lega la tensione E fuori risonanza a quella E_r che si ha in risonanza ai capi del circuito, quando l'allontanamento dalla condizione di risonanza è dovuto ad una variazione della capacità del condensatore.

Passando ai numeri, osservando che $\varepsilon_c = Q$ poiché il generatore di corrente è ideale, si ha dunque che:

$$\frac{E}{E_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta C}{C}\,\varepsilon_c\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0{,}02 \cdot 80)^2}} = 0{,}531\,,$$

cioè la tensione in seguito al disaccordo si riduce al 53,1 % del valore di risonanza.

Si noti come la conoscenza di alcuni dati in questo particolare problema siano inutili. Quindi inutile sarebbe stato il calcolo della pulsazione di risonanza ($\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7$ rad/sec), della resistenza parallelo ($R_{pL} = Q \cdot \omega_r\, L = 80\ k\ \Omega$), ecc..

Si noti ancora come, ponendo:

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta C}{C}\,\varepsilon_c\,,$$

l'ultima formula che compare nell'espressione della tensione E più sopra scritta diventa:

$$\frac{E}{E_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,a^2}}\,,$$

il che suggerisce come ci si possa avvalere della curva di risonanza universale anche nel caso in cui la risonanza sia ottenuta per variazione di reattanza.

Esercizio 7.654

Si trovi quale deve essere la variazione di capacità da assegnare al condensatore facente parte del circuito di fig. 7.653-1 dell'esercizio precedente affinché, in conseguenza del disaccordo provocato, la potenza dissipata dal circuito diminuisca del 50 %.

Soluzione

Il circuito, cioè la resistenza R_{pL} che appare nello schema di fig. 7.653-1, dissiperà fuori risonanza una potenza P metà di quella P_r in condizioni di risonanza quando la tensione ai capi del circuito fuori risonanza si sarà ridotta rispetto a quella di risonanza E_r a quel valore E che soddisfa la seguente relazione:

$$P = \frac{E^2}{R_{pL}} = \frac{1}{2} P_r = \frac{1}{2} \frac{E_r^2}{R_{pL}},$$

cioè quando:

$$E = E_r/\sqrt{2} = 0,707 \; E_r.$$

D'altronde, per quanto è stato riportato alla fine dell'esercizio precedente, e cioè che è lecito fare uso della curva di risonanza universale anche nel caso di risonanza per variazione di reattanza purché il parametro a sia espresso dalla formula:

$$a = \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} \varepsilon_c,$$

si deduce (vedi grafico di fig. 7.62-7) che per $E/E_r = 0,707$ il parametro a ammonta a 0,50. Basterà risolvere allora l'espressione sopra scritta rispetto a $\frac{\Delta C}{C}$ e ricordare che nel nostro caso $\varepsilon_c = Q$:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2\,a}{\varepsilon_c} = \frac{2 \cdot 0,50}{80} = 0,0125.$$

Una variazione di capacità dell'1,25 % porta dunque fuori accordo il circuito assegnato in modo tale da determinare il dimezzamento della potenza da esso dissipata.

7.7 Adattamento di carico

È noto che la potenza attiva dissipata da un carico viene fornita da un bipolo attivo il quale, nel caso più semplice, risulterà costituito da un solo generatore di tensione (vedi fig. 7.7-1) o di corrente; mentre

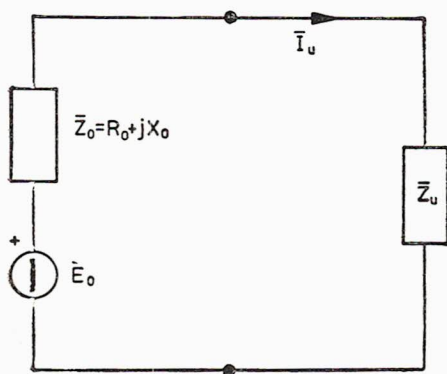



Fig. 7.7-1

nei casi più complessi sarà costituito da una rete elettrica attiva la quale però si potrà sempre comunque ricondurre ai due casi semplici sopra nominati mediante il principio del generatore equivalente.

Ora è chiaro che quando si deve alimentare un carico di caratteristiche note mediante una rete attiva, essa pure di caratteristiche note, occorrerà verificare sempre che la rete attiva possa effettivamente fornire al carico la potenza richiesta e che attraverso il carico quindi circoli la corrente di voluta intensità o che ai suoi capi la tensione presenti il valore stabilito.

A questo proposito è certamente utile conoscere quale sia la condizione per cui un generatore di energia possa trasferire al carico la massima potenza attiva (adattamento di carico per massima potenza trasferibile). Si dimostra abbastanza facilmente che, con riferimento al circuito di fig. 7.7-1, questa condizione si raggiunge quando (1):

7.7-1 $$\bar{Z}_u = \underline{Z}_0 \text{ (2)},$$

cioè quando l' impedenza di carico (utilizzatore) e quella interna del generatore sono fra loro *coniugate* (per la definizione di grandezza coniugata si veda la fine del § 5.42), ossia se si verificano contemporaneamente le due seguenti condizioni scalari:

7.7-2 $$R_u = R_0 \, ,$$

7.7-3 $$X_u = - X_0 \text{ (3)} \, .$$

La 7.7-1 rappresenta dunque la condizione di massima potenza trasferibile al carico; naturalmente in pratica molte volte essa non viene verificata per il semplice fatto che l' impedenza di carico $\bar{Z}_u$ deve soddi-

---

(1) La potenza attiva dissipata dal carico ($\bar{Z}_u = R_u + jX_u$) vale:

$$P_u = R_u I_u^2 = \frac{R_u E_0^2}{(R_u + R_0)^2 + (X_u + X_0)^2} \, .$$

D'altronde, per portare questa espressione in condizioni di massimo, come prima cosa occorrerà che si annulli uno dei due termini del denominatore: ciò è possibile ovviamente soltanto per quello reattivo ($X_u + X_0 = 0$, da cui la condizione 7.7-3). In questo caso la potenza attiva fornita al carico vale allora:

$$P_u = \frac{R_u E_0^2}{(R_u + R_0)^2} \, ,$$

espressione che, come dimostra l'Analisi Matematica, diventa massima per $R_u = R_0$ (condizione 7.7-2).

(2) La condizione $|\bar{Z}_u| = |\bar{Z}_0|$, cioè l'uguaglianza fra i soli moduli, rappresenta una condizione di massimo quando sia possibile agire sul modulo ma non sull'argomento dell' impedenza di carico.

(3) Questa è la condizione tipica della risonanza serie.

sfare invece altre esigenze. Tuttavia la 7.7-1 è importante perché indica appunto come si possa raggiungere ancora tale condizione : basterà infatti interporre fra l'utilizzatore $\bar{Z}_u$ e il generatore un quadripolo passivo (vedi fig. 7.7-2) in modo tale che l' impedenza di entrata $\bar{Z}_e$ del quadripolo abbia a risultare coniugata della $\bar{Z}_0$. Il quadripolo dovrà

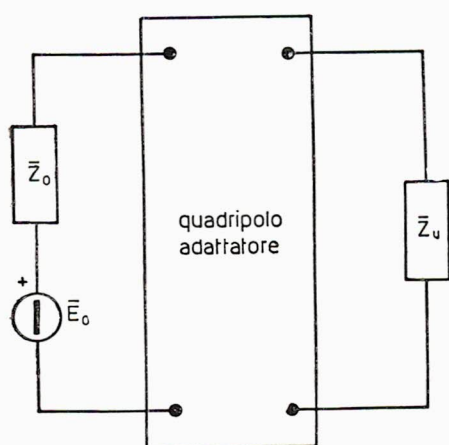



Fig. 7.7-2

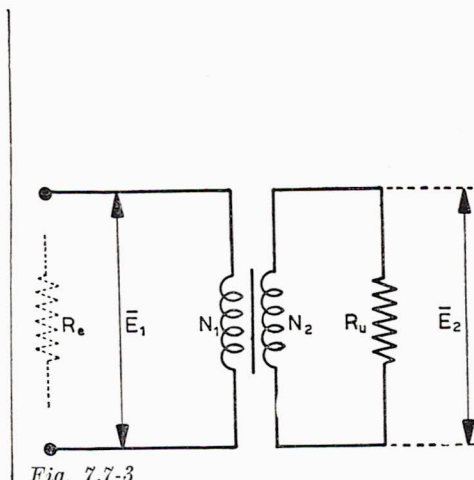



Fig. 7.7-3

essere costituito naturalmente da elementi reattivi per non dissipare esso stesso parte della potenza attiva destinata all'utilizzatore.

Nella tecnica radio-elettronica e in quella telefonica l'adattamento di carico per massima potenza trasferibile è di uso corrente. A dire il vero qui le cose sono un po' più semplici poiché di solito le impedenze interne dei generatori e quelle degli utilizzatori si possono considerare con buona approssimazione pressoché ohmiche. L'adattamento di carico per massima potenza si avrà perciò quando $R_u = R_0$. Si noti come in tal caso il rendimento del trasferimento energetico raggiunga il valore del 50 %, quindi sia abbastanza basso. Tuttavia il fatto di poter trasferire in uscita al carico una potenza che è la massima possibile da parte del generatore fa sì che il problema del rendimento passi in seconda linea, anche perché le potenze in gioco (e quindi le energie) sono in generale modeste ([4]).

In pratica il quadripolo adattatore di carico più diffuso è quello costituito da un trasformatore con nucleo in ferro (fig. 7.7-3) nel campo delle frequenze audio ($20 \div 20000$ Hz), o senza ferro per le frequenze più alte. In quest'ultimo caso, poiché l'accoppiamento dovrà avere in

---

([4]) Per il motivo opposto, cioè al fine di realizzare rendimenti di trasferimento buoni, nell'elettrotecnica industriale l'adattamento di carico viene eseguito non per massima potenza trasferibile (che tra l'altro non è possibile a causa delle bassissime impedenze interne presentate dai generatori di tensione industriali) bensì appunto per minime perdite.

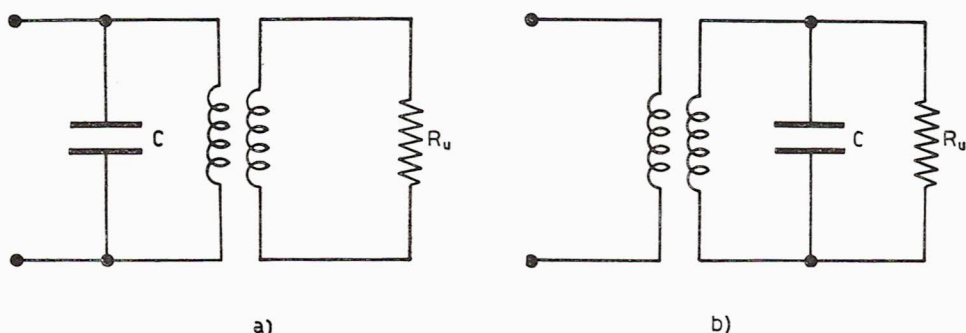



Fig. 7.7-4

generale proprietà selettive, si renderà ad esempio risonante il primario (fig. 7.7-4*a*) o il secondario (fig. 7.7-4*b*) aggiungendovi una capacità C.

D'altronde in alta frequenza, ove i circuiti selettivi sono di impiego generale, è possibile realizzare degli adattamenti di carico sfruttando gli stessi bipoli antirisonanti, come le figg. 7.7-5, 6, 7 mostrano in modo assai chiaro. Si tratta in sostanza di inserire la resistenza di carico R_u fra due punti del circuito ove la *d.d.p.* sia tale da determinare nel carico la voluta dissipazione di potenza.

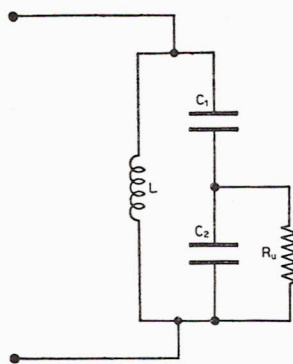
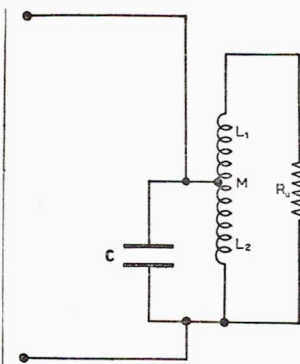
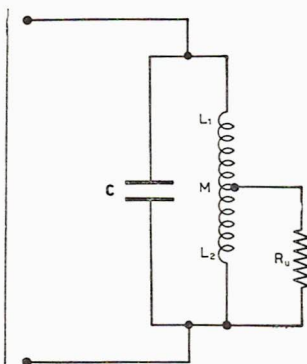



Fig. 7.7-5 *Fig. 7.7-6* *Fig. 7.7-7*

Riguardo ai calcoli dell' impedenza di entrata $\bar{Z}_e$ si ricordi quanto è stato detto a proposito dei quadripoli o delle reti elettriche contenenti mutue induttanze o in generale del calcolo dell' impedenza equivalente di un bipolo a struttura più o meno complessa. Qui si riporterà solamente un caso assai semplice, quello in cui il trasformatore adattatore (detto anche *traslatore*) possa essere considerato ideale. In tal caso la resistenza offerta all'entrata dal trasformatore chiuso in uscita su di un carico *puramente* resistivo R_u (vedi fig. 7.7-3) ammonta a:

7.7-4
$$R_e = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_u ,$$

come si dimostra assai facilmente osservando che la potenza attiva di entrata P_e deve coincidere con quella di uscita P_u (il trasformatore è ideale, quindi esso ha rendimento unitario) per cui vale la seguente eguaglianza :

7.7-5
$$P_e = \frac{E_1^2}{R_e} = P_u = \frac{E_2^2}{R_u},$$

dalla quale, ricordando che $E_1/E_2 = N_1/N_2$, si ottiene immediatamente la 7.7-4.

Esercizio 7.71

Un generatore di tensione sinusoidale, avente *f.e.m.* $\bar{E}_0$ e resistenza interna R_0, alimenta un carico ohmico R_u tramite un montaggio a *potenziometro*, come è stato rappresentato in fig. 7.71-1. Si trovi per quale posizione del cursore il carico *vede* una resistenza interna eguale al suo valore.

Soluzione

È conveniente applicare il teorema di Thévenin fra i punti A e B (fig. 7.71-1), considerato che il carico risulta alimentato dal generatore tramite una rete passiva, cioè il potenziometro. Poiché questo si suppone del tipo lineare (ciò vuol dire che la resistenza fra A e B è proporzionale alla posizione del cursore) sarà possibile indicare con αR la resistenza di quella porzione di potenziometro compreso fra i punti A e B e quindi con $(1 - \alpha)R$ la resistenza della restante parte, essendo α un coefficiente compreso fra 0 e 1, dipendente dalla posizione del cursore. Per il principio di Thévenin il circuito riportato in fig. 7.71-1 si trasforma perciò in quello riportato in fig. 7.71-2, dove $\bar{E}_{0eq}$ rappresenta la *d.d.p.* fra i punti A e B in assenza di carico R_u , cioè :

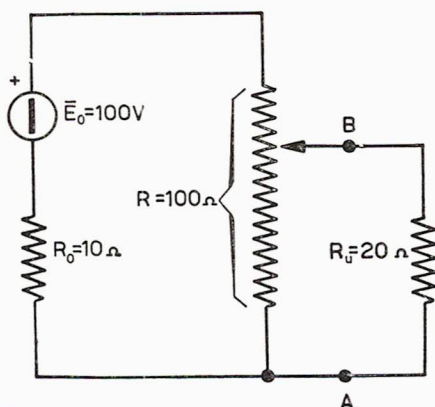



Fig. 7.71-1

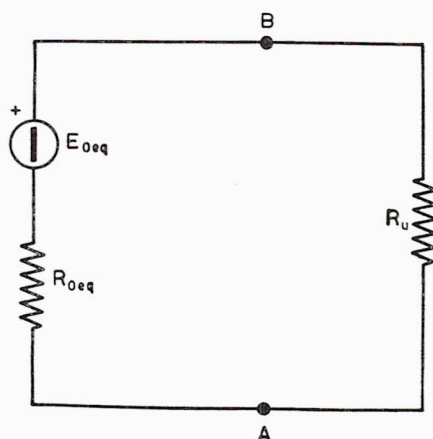



Fig. 7.71-2

$$\overline{E}_{0eq} = \frac{\overline{E}_0}{R + R_0} \alpha R ,$$

ed R_{0eq} rappresenta la resistenza vista dai punti A e B sempre in assenza di carico, con il generatore $\overline{E}_0$ cortocircuitato, la cui espressione è quindi:

$$R_{0eq} = \frac{\alpha R[(1 - \alpha) R + R_0]}{R + R_0} = \frac{- \alpha^2 R^2 + \alpha(R^2 + R R_0)}{R + R_0} ,$$

la quale altro non è che la resistenza equivalente dei due rami in parallelo αR ed $(1 - \alpha) R + R_0$.

Ora la condizione richiesta dal problema avviene quando:

$$R_u = R_{0eq} ,$$

cioè quando:

$$R_u = \frac{- \alpha^2 R^2 + \alpha(R^2 + R R_0)}{R + R_0} .$$

Questa è l'espressione che occorre risolvere rispetto ad α, poiché α è quel parametro che esprime la posizione del cursore del potenziometro da cercare. Sviluppando la relazione scritta sopra si ottiene infatti la seguente equazione di secondo grado in α:

$$R^2\alpha^2 - (R^2 + RR_0)\alpha + R_u(R + R_0) = 0 ,$$

che con i dati del problema diventa:

$$(10\alpha^2 - 11 \alpha + 2{,}2)\cdot 10^3 = 0 ,$$

e le cui radici sono:

$$\alpha = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 88}}{20} = \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{11 + 5{,}75}{20} = 0{,}838 \\ \alpha_2 = \dfrac{11 - 5{,}75}{20} = 0{,}262 \end{cases} .$$

Le posizioni del cursore sono dunque due, precisamente quella che corrisponde ad un'escursione del cursore pari all'83,8 % dell'escursione totale, e quella che corrisponde ad un'escursione del cursore pari al 26,2 % dell'escursione totale.

Si noti che, fissati i valori di R (caratteristica del potenziometro) ed R_0 (caratteristica del generatore), la condizione imposta dal problema esige che il carico R_u non abbia mai a superare un certo limite: quello cioè che porta per α a valori non reali. Nel caso numerico ora trattato α cessa di essere reale per $R_u > 27{,}5$ ohm. In definitiva, il nostro problema perciò sarà possibile solo se il carico soddisferà la seguente con-

dizione: $0 < R_u \leqslant 27{,}5\ \Omega$ e si imporrà cercando, come si è detto, l'adatta posizione del cursore.

Esercizio 7.72

Ai capi del condensatore C_2 facente parte del circuito antirisonante di fig. 7.72-1, alimentato con corrente sinusoidale avente pulsazione $\omega_r = 5 \cdot 10^6$ rad/sec, viene inserito un carico ohmico del valore di 200 ohm e tale da non abbassare il fattore di merito del condensatore C_2 al di sotto del valore corrispondente a 10 unità. Le caratteristiche della bobina sono note completamente ($L = 100\ \mu H$, $Q = 250$). In queste condizioni si trovino i valori da assegnare a C_1 e C_2 affinché il circuito rimanga in risonanza alla pulsazione sopra indicata e il coefficiente di risonanza del circuito, così caricato, assuma il valore $\varepsilon = 150$ unità, nonché il valore della resistenza interna del generatore che alimenta il circuito antirisonante affinché sia soddisfatta la condizione di adattamento per massima potenza.

Soluzione

Si incominci a portare la resistenza di carico R_u in serie alla capacità C_2. Per la formula 5.519-11 sulla trasformazione parallelo-serie si ha allora che:

$$R_{us} = \frac{1}{R_u\, \omega_r^2 C_2^2}\,,$$

e il circuito di fig. 7.72-2 risulterà così l'equivalente del circuito antirisonante dato. Ma il valore di R_{us} è facilmente calcolabile per altra via: infatti avendo la resistenza R_L il seguente valore:

$$R_L = \frac{\omega_r L}{Q} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{250} = 2 \text{ ohm}$$

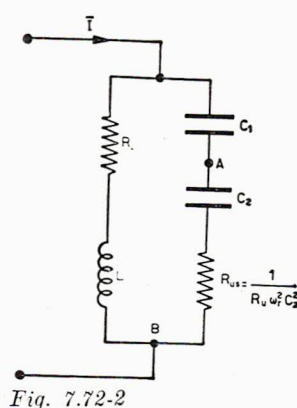
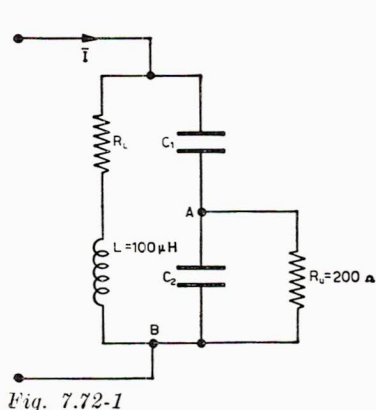



Fig. 7.72-1 Fig. 7.72-2

e dovendo essere (fig. 7.72-2):

$$\varepsilon = \frac{\omega_r L}{R_L + R_{us}} = 150\ [1],$$

si ottiene da quest' ultima appunto che:

$$R_{us} = \frac{\omega_r L - \varepsilon R_L}{\varepsilon} = \frac{5\cdot 10^6\cdot 10^{-4} - 150\cdot 2}{150} = 1{,}33 \text{ ohm}.$$

Risolvendo pertanto la prima espressione di R_{us} rispetto a C_2 si ha finalmente che:

$$C_2 = \sqrt{\frac{1}{R_{us}\, R_u\, \omega_r^2}} = \sqrt{\frac{1}{1{,}33\cdot 200\cdot 25\cdot 10^{12}}} = 12250 \text{ pF}.$$

Per il calcolo di C_1, osservando che C_1 e C_2 agiscono in serie e che devono essere tali da portare il circuito in risonanza, si risolverà invece la seguente equazione:

$$\omega_r^2 L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,$$

da cui si ottiene che:

$$C_1 = \frac{C_2}{\omega_r^2 L C_2 - 1} = \frac{12{,}25\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{12}\cdot 10^{-4}\cdot 12{,}25\cdot 10^{-9} - 1} = 414 \text{ pF}.$$

D'altronde la resistenza interna del generatore dovrà essere eguale alla resistenza offerta dal circuito in condizioni di risonanza. Questa resistenza vale:

$$R_0 = \varepsilon\,\omega_r L = 150\cdot 5\cdot 10^6\cdot 10^{-4} = 15 \text{ k}\Omega.$$

Solo così il circuito risulterà adattato per la massima potenza trasferibile.

7.8 Analisi di Fourier - Lo sviluppo in serie

Quando le grandezze elettriche (tensioni, correnti) che caratterizzano una rete lineare non sono sinusoidali, lo studio di questa può essere condotto, per il principio della sovrapposizione degli effetti e per le ragioni che si vedranno tra breve, facendo ricorso alla cosiddetta analisi di Fou-

---

[1] Si noti che, per le due correnti che circolano entro la maglia costituita dall' induttanza e dalle due capacità, le due resistenze R_L ed R_{us} sono praticamente in serie, poiché le due correnti hanno praticamente la stessa intensità (corrente oscillatoria).

rier, poiché il teorema di Fourier afferma che qualsiasi grandezza variabile nel tempo, purché periodica $\left(\text{di periodo } T, \text{ quindi di pulsazione } \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$, è sempre scomponibile in infiniti termini sinusoidali di ampiezza, di pulsazione e di fase aventi determinati valori. Per quanto riguarda il valore assunto dalla pulsazione di questi infiniti termini il teorema di Fourier precisa che vi è sempre un termine avente pulsazione eguale a quella del fenomeno dato (questo termine viene detto *fondamentale*), gli altri invece sono caratterizzati da una pulsazione che risulta essere un multiplo positivo intero pari e dispari (questi termini vengono denominati *armoniche*) del valore della pulsazione della fondamentale. Si noti inoltre che vi può essere anche un termine di pulsazione zero (valor medio della grandezza).

In base a quanto enunciato or ora si potrà scrivere pertanto, nel caso più generale, per una generica funzione $y(t)$ periodica:

7.8-1 $$y(t) = Y_m + Y_{1M} \operatorname{sen}(\omega t + \delta_1) + Y_{2M} \operatorname{sen}(2\omega t + \delta_2) + + Y_{3M} \operatorname{sen}(3\omega t + \delta_3) + \dots,$$

essendo appunto Y_m il valor medio della grandezza, Y_{1M} l'ampiezza della fondamentale, ... Y_{nM} l'ampiezza dell'armonica ennesima ; δ_1 la fase del termine fondamentale, ... δ_n la fase dell'armonica ennesima (tutte riferite all'origine comune). Come si è già detto si tratta di una serie di infiniti termini trigonometrici i quali vengono a costituire uno spettro di frequenza discontinuo (vedi fig. 7.8-1), essendo appunto i

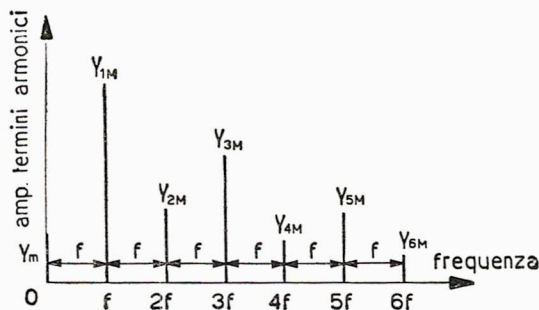



Fig. 7.8-1

vari termini armonici *distanti* fra di loro in frequenza di una quantità fissa pari ad f ($f = 1/T = \omega\, 2/\pi$).

Lo sviluppo in serie riportato in 7.8-1 può naturalmente essere posto sotto un'altra forma quando si pensi di sviluppare i termini tipo $Y_{nM} \operatorname{sen}(n\omega t + \delta_n)$ mediante le formule di addizione del seno. Ricordando appunto che: $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$, si ha allora, ponendo $A_{nM} = Y_{nM} \cos\delta_n$ e $B_{nM} = Y_{nM} \operatorname{sen}\delta_n$, di conseguenza che:

7.8-2 $$Y_{nM} \operatorname{sen}(n\omega t + \delta_n) = A_{nM} \operatorname{sen} n\omega t + B_{nM} \cos n\omega t,$$

per cui lo sviluppo in serie dato in 7.8-1 potrà apparire in quest'altro modo:

7.8-3 $$y(t) = Y_m + A_{1M}\text{sen}\,\omega t + A_{2M}\text{sen}\,2\,\omega t + A_{3M}\text{sen}\,3\,\omega t + \dots + B_{1M}\cos\omega t + B_{2M}\cos 2\,\omega t + B_{3M}\cos 3\,\omega t + \dots,$$

cioè come somma di infiniti termini in seno e coseno [1]. Poiché d'altronde i due sviluppi in serie (7.8-1 e 7.8-3) sono del tutto equivalenti (si osservi infatti che ciascun termine armonico abbisogna per essere individuato di tre parametri e cioè la pulsazione $n\omega$, l'ampiezza Y_{nM} e la fase δ_n nel primo caso; la pulsazione $n\omega$ e le due ampiezze A_{nM} e B_{nM} nel secondo caso) si farà ricorso all'uno o all'altro a seconda dei casi.

Può darsi infatti il caso che la funzione abbia a presentare dei caratteri particolari, cosicché nello sviluppo in serie verranno a mancare dei termini; precisamente se:

1) la grandezza presenta un andamento tale per cui l'area positiva risulta eguale a quella negativa (fig. 7.8-2*a*) allora sarà nullo il termine Y_m (la grandezza è quindi alternativa);

2) il semiperiodo negativo ha lo stesso andamento nel tempo, a parte il segno, di quello positivo (fig. 7.8-2*b*) (ciò in pratica significa che pensando di ribaltare rispetto all'asse orizzontale il semiperiodo negativo questo, dopo una conveniente traslazione, risulta sovrapposto a quello positivo) in tal caso mancheranno tutte le armoniche di ordine pari;

3) rispetto all'asse verticale y la grandezza presenta carattere di *simmetria*, ciò avviene se $y(t) = y(-t)$ (fig. 7.8-2*c*), in tal caso nello sviluppo in serie dato in 7.8-3 mancheranno tutti i termini in seno;

4) rispetto all'asse verticale y la grandezza presenta carattere di *antisimmetria*, ciò avviene se $y(t) = -y(-t)$ (fig. 7.8-2*d*), in tal caso nello sviluppo in serie dato in 7.8-3 mancheranno tutti i termini in coseno;

5) le ampiezze dei termini armonici diminuiscono di valore al crescere dell'ordine dell'armonica, come dimostrano la teoria e la pratica, lo sviluppo in serie verrà arrestato dopo un certo numero di termini, quando cioè il contributo dei successivi termini sarà trascurabile e ciò naturalmente in relazione all'approssimazione che si vorrà raggiungere.

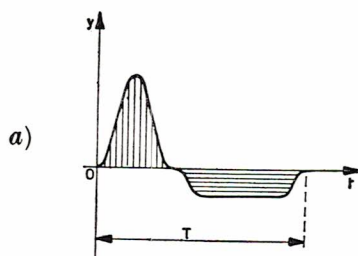
È ora intuibile che qualsiasi fenomeno elettrico periodico non sinusoidale, se sviluppato in serie di Fourier, diventa di più facile comprensione, con la conseguenza di rendere quindi più facilmente prevedibili i risultati. Ciò è dovuto al fatto che, essendo la rete lineare per ipotesi, risulta possibile applicare il principio della sovrapposizione degli effetti. In sostanza ogni termine che compare nello sviluppo in serie della grandezza data, analizzata come si è detto sopra, può essere considerato agente indipendentemente dagli altri: trattandosi d'altronde di termini sinusoidali (ad esempio di tensione) facile sarà calcolare per la rete data i

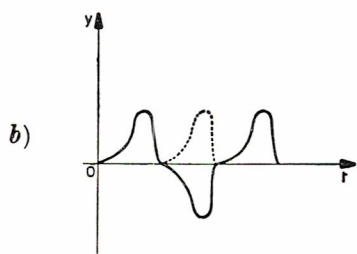
---

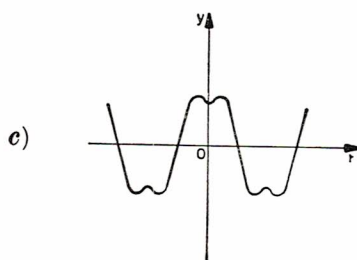
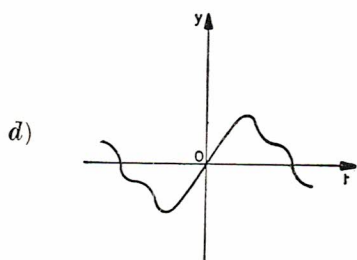
[1] L'analisi matematica dà le seguenti formule per il calcolo dei termini A_{nM} e B_{nM}:

$$A_{nM} = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\,\text{sen}\,n\omega t\,dt \qquad B_{nM} = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t\;dt\,;$$

mentre per Y_m vale la formula 5.12-3 data nel capitolo 5. Per l'espressione di Y_m, A_{nM} e B_{nM} delle grandezze periodiche più comuni si veda la tabella 7.8.

a)

Questa grandezza ha la caratteristica di avere l'area positiva eguale a quella negativa. Il suo valor medio è perciò nullo. Nello sviluppo in serie risulterà pertanto mancante il termine Y_m.

b)

Questa grandezza soddisfa la seguente condizione $y(t) = -y(t + T/2)$, cioè ha la caratteristica di presentare la semionda negativa con andamento tale da risultare sovrapponibile a quella positiva dopo ribaltamento (attorno all'asse dei tempi) e conveniente traslazione. In tal caso sono nulle tutte le armoniche pari ed il termine costante. Pertanto nello sviluppo in serie dato in 7.8-1 mancheranno i termini Y_m, Y_{2M}, Y_{4M}, Y_{6M} ...; nello sviluppo in serie dato in 7.8-3 mancheranno i termini A_{2M}, A_{4M}, A_{6M}, ... e B_{2M}, B_{4M}, B_{6M}, ... oltre al termine Y_m.

c)

Questa grandezza presenta la caratteristica di soddisfare la seguente condizione $y(t) = y(-t)$, cioè di essere una grandezza *simmetrica*. In tal caso sono nulli tutti i termini in seno ed il termine costante. Pertanto nello sviluppo in serie dato in 7.8-3 si porrà: $Y_m = A_{1M} = A_{2M} = A_{3M} = \ldots = 0$.

d)

Questa grandezza ha la caratteristica di soddisfare la seguente condizione $y(t) = -y(-t)$, cioè di essere una grandezza *antisimmetrica*. In tal caso sono nulli tutti i termini in coseno ed il termine costante. Pertanto nello sviluppo in serie dato in 7.8-3 si porrà: $Y_m = B_{1M} = B_{2M} = B_{3M} = B_{4M} = \ldots = 0$.

Fig. 7.8-2

corrispettivi termini (di corrente). Questi poi verranno sommati per dare la grandezza cercata, come insegna il principio stesso della sovrapposizione degli effetti. L'esempio che segue servirà ad illustrare meglio quanto è stato precisato.

Si abbia dunque un generatore la cui tensione si presenti distorta [2]. In questo caso la tensione verrà *analizzata* nei suoi costituenti armonici per cui si scriverà, in generale, :

7.8-4
$$v(t) = V_m + E_{1M}\text{sen}(\omega t + \xi_1) + E_{2M}\text{sen}(2\,\omega t + \xi_2) + E_{3M}\text{sen}(3\,\omega t + \xi_3) + \ldots .$$

Se questa tensione agisce ad esempio ai capi di un bipolo induttivo (R ed L noti, vedi fig. 7.8-3) farà scorrere in esso, per il principio della sovrapposizione degli effetti, la seguente corrente $i(t)$:

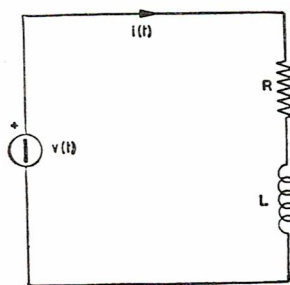



Fig. 7.8-3

7.8-5
$$i(t) = \frac{V_m}{R} + \frac{E_{1M}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\,\text{sen}\,(\omega t + \xi_1 - \varphi_1) + \frac{E_{2M}}{\sqrt{R^2 + (2\,\omega L)^2}}\,\text{sen}\,(2\,\omega t + \xi_2 - \varphi_2) + \frac{E_{3M}}{\sqrt{R^2 + (3\,\omega L)^2}}\,\text{sen}\,(3\,\omega t + \xi_3 - \varphi_3) + \ldots ,$$

dove φ_n rappresenta l'angolo di sfasamento fra il termine armonico ennesimo della corrente con quello dello stesso ordine di tensione $\left(\text{tg}\ \varphi_n = \frac{n\,\omega L}{R}\right)$.

La 7.8-5 si è dunque potuta scrivere poiché, per il principio della sovrapposizione degli effetti, ciascun termine di tensione dello sviluppo in serie si è considerato agente separatamente ai capi del bipolo, dato che questo è stato supposto elemento lineare. Si sono calcolati così i termini di corrente corrispondenti a ciascun termine di tensione, poi se ne è fatta la somma, la quale, siccome avviene fra grandezze non isofrequenziali, è stata eseguita necessariamente fra i valori istantanei.

---

(2) Una grandezza si dice *distorta* quando non presenta un andamento sinusoidale, cioè quando la grandezza è più o meno ricca di armoniche (distorsione armonica).

L'esempio sopra riportato consente d'altronde di comprendere facilmente come la legge di Ohm e di conseguenza tutti i principi visti per la soluzione di una rete lineare possano essere applicati al circuito o alla rete elettrica *armonica per armonica*. In sostanza, per il circuito di fig. 7.8-3 si può scrivere infatti per i valori istantanei:

7.8-6 $V_m = RI_m$ (legge di Ohm per l'armonica di ordine zero)

7.8-6′ $e_1 = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt}$ (legge di Ohm per l'armonica di ordine 1°)

7.8-6″ $e_2 = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$ (legge di Ohm per l'armonica di ordine 2°)

7.8-6‴ $e_3 = Ri_3 + L\frac{di_3}{dt}$ (legge di Ohm per l'armonica di ordine 3°)

....

....

È chiaro che ciascuna di queste equazioni rappresenta, per l'armonica considerata, l'equilibrio delle varie tensioni in gioco nel circuito stesso. Poiché d'altra parte in questo le varie armoniche agiscono contemporaneamente, si potrà (e si dovrà) scrivere:

7.8-7 $$V_m + e_1 + e_2 + e_3 + ... = R(I_m + i_1 + i_2 + i_3 + ...) + \\ + L\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + ...\right).$$

Naturalmente $V_m + e_1 + e_2 + e_3 + ...$ rappresenta la tensione $v(t)$ del generatore, analizzata nelle sue varie componenti *armoniche*.

Per quanto riguarda invece la potenza attiva che viene dissipata (o generata) in regime elettrico non sinusoidale si dimostra che questa, nel caso generale in cui sia la tensione che la corrente abbiano ad essere distorte, assume la seguente espressione:

7.8-8 $$P = \frac{1}{T}\int_0^T vi\,dt = V_m I_m + \frac{E_{1M}I_{1M}}{2}\cos\varphi_1 + \\ + \frac{E_{2M}I_{2M}}{2}\cos\varphi_2 + ... = V_m I_m + \sum_1^\infty {}_n E_n I_n \cos\varphi_n ,$$

dove φ_n rappresenta lo sfasamento dell'armonica ennesima di corrente rispetto alla corrispondente armonica di tensione. La 7.8-8 rappresenta dunque la somma delle potenze attive prodotte da ciascun termine dello sviluppo in serie. In particolare la potenza di armonica è nulla se la tensione o la corrente è rigorosamente sinusoidale; così la potenza di un qualsiasi ordine armonico risulterà pure nulla se manca il termine di

TABELLA 7-8

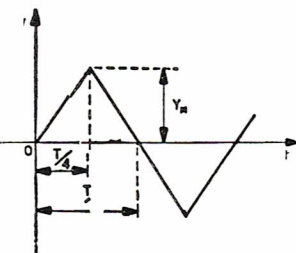
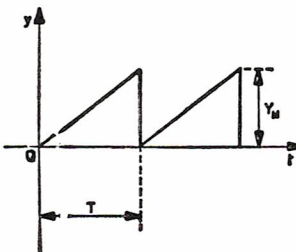
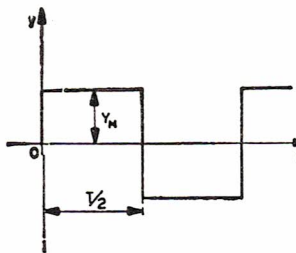
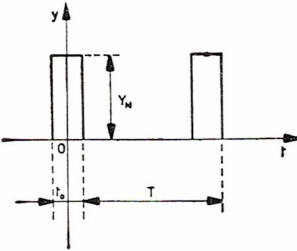
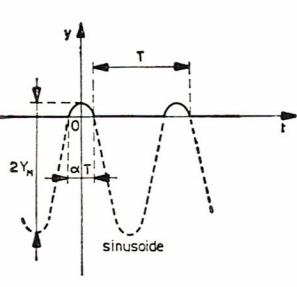
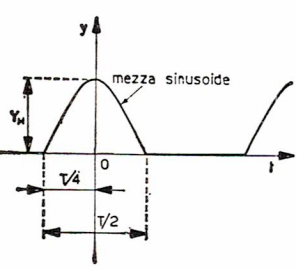
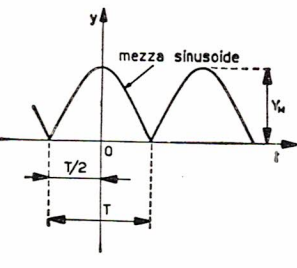
(1) *Valore medio nel semiperiodo*

Grandezza periodica	Sviluppo in serie		Parametri caratteristici			
	A_{nM}	B_{nM}	Y_m	Y'_m (1)	Y	f.d.f.
	solo armoniche dispari $\frac{8\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi^2\,n^2}\,Y_M$ $y\,(t) = \frac{8}{\pi^2}\,Y_M \left(sen\,\omega\,t - \frac{1}{9}\,sen\,3\,\omega\,t + \right.$ $\left. + \frac{1}{25}\,sen\,5\,\omega t \ldots\ldots \right)$	—	0	$\frac{Y_M}{2}$	$\frac{Y_M}{\sqrt{3}}$	1,15
	armoniche pari e dispari $-\frac{Y_M}{\pi\,n}$ $y\,(t) = Y_M \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(sen\,\omega\,t + \right. \right.$ $\left. \left. + \frac{1}{2}\,sen\,2\,\omega\,t + \frac{1}{3}\,sen\,3\,\omega\,t + \ldots\ldots \right) \right]$	—	$\frac{Y_M}{2}$	—	$\frac{Y_M}{\sqrt{3}}$	1,15
	solo armoniche dispari $\frac{4}{\pi\,n}\,Y_M$ $y\,(t) = \frac{4}{\pi}\,Y_M \left(sen\,\omega\,t + \frac{1}{3}\,sen\,3\,\omega\,t + \right.$ $\left. + \frac{1}{5}\,sen\,5\,\omega\,t + \ldots\ldots \right)$	—	0	Y_M	Y_M	1

TABELLA 7.8

(1) *Valore medio nel semiperiodo* (2) *Costituisce un caso eccezionale*

Grandezza periodica	Sviluppo in serie		Parametri caratteristici			
	A_{nM}	B_{nM}	Y_m	$Y'_m(1)$	Y	*f.d.f.*
y, Y_M, 0, t, t_o, T	—	armoniche pari e dispari $\frac{2}{\pi n} Y_M \, sen \, n \, \pi \frac{t_o}{T}$	$Y_M \frac{t_o}{T}$	—	$Y_M \sqrt{\frac{t_o}{T}}$	$\sqrt{\frac{T}{t_o}}$
y, T, 0, t, $2Y_M$, α T, sinusoide	—	armoniche pari e dispari $\frac{1}{\pi}\left[\frac{sen\,(n+1)\,\pi\,\alpha}{n+1} + \frac{sen\,(n-1)\,\pi\,\alpha}{n-1} - 2\cos\pi\alpha \frac{sen\, n\,\pi\,\alpha}{n}\right] Y_M$ formula valida per $n > 1$	$\frac{1}{\pi}$ ($sen\,\pi\,\alpha - \alpha\cos\pi\,\alpha$)	—	—	—
y, mezza sinusoide, Y_M, 0, t, T/4, T/2	—	solo armoniche pari (2) $\frac{1}{\pi}\left[\frac{sen\,(n+1)\,\pi/2}{n+1} + \frac{sen\,(n-1)\,\pi/2}{n-1}\right] Y_M$ formula valida per $n > 1$ $y(t) = Y_M\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos\omega t + \frac{2}{3\pi}\cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi}\cos 4\,\omega\,t + \frac{2}{35\pi}\cos 6\,\omega\,t ......\right)$	$\frac{Y_M}{\pi}$	—	$\frac{Y_M}{2}$	1,57
y, mezza sinusoide, Y_M, 0, t, T/2, T	—	armoniche pari e dispari $\frac{4\,(-1)^n}{\pi\,(1-4\,n^2)} Y_M$ $y\,(t) = Y_M\left(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\,\pi}\cos\omega\,t - \frac{4}{15\pi}\cos 2\,\omega\,t + \frac{4}{35\pi}\cos 3\,\omega\,t ......\right)$	$\frac{2}{\pi} Y_M$	—	$\frac{Y_M}{\sqrt{2}}$	1,11

tensione o di corrente di quell'ordine (ad esempio non vi è potenza attiva di seconda armonica se la tensione o la corrente manca appunto della seconda armonica).

Si richiama ora l'attenzione su importanti ed utili espressioni riguardanti alcuni parametri caratterizzanti le grandezze periodiche non sinusoidali; precisamente:

a) il valore efficace, definito dalla seguente formula:

$$7.8\text{-}9 \quad Y = \sqrt{Y_m^2 + \frac{1}{2}(Y_{1M}^2 + Y_{2M}^2 + Y_{3M}^2 + ...)} = \sqrt{Y_m^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 ....},$$

cioè come radice quadrata della somma dei quadrati dei *valori efficaci* dei singoli termini presenti nello sviluppo in serie, ivi compreso il termine esprimente il valor medio della grandezza data;

b) la percentuale di armoniche, che esprime in percento il rapporto fra il valore efficace delle armoniche, ivi compreso anche il termine fondamentale, e il valor medio. In formula si ha quindi:

$$7.8\text{-}10 \qquad A\,\% = \frac{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + ...}}{Y_m} 100\,.$$

Questo parametro serve quando la grandezza presenta un termine continuo preponderante rispetto alla parte alternativa, cioè quando il valor medio è il termine utile;

c) il fattore di cresta, che rappresenta il rapporto fra il valore massimo e quello efficace della grandezza data;

d) il fattore di forma (*f.d.f.*), espresso dal rapporto fra il valore efficace e quello medio. Nel caso in cui quest' ultimo sia nullo, esso verrà sostituito dal valore medio nel semiperiodo (Y'_m);

e) il residuo, che rappresenta il valore efficace delle sole armoniche, cioè:

$$7.8\text{-}11 \qquad R = \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + ...}\,;$$

f) la distorsione totale, che rappresenta il rapporto fra il valore efficace delle sole armoniche (residuo) e quello della fondamentale. Si avrà perciò:

$$7.8\text{-}12 \qquad D_t = \frac{R}{Y_1} = \sqrt{\left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^2 + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right)^2 + ...}\,.$$

Introducendo d'altra parte la definizione di distorsione derivante da una singola armonica come rapporto dell'ampiezza presentata dall'armonica in questione a quello della fondamentale, cioè $D_n = \frac{Y_n}{Y_1}$ (distorsione dell'armonica ennesima), l'espressione della distorsione totale

riportata in 7.8-12 si potrà calcolare anche con la seguente formula:

7.8-13 $$D_t = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \dots} \,.$$

Esercizio 7.81

Si scomponga nei suoi termini armonici una tensione *a dente di sega* (vedi fig. 7.81-1*a*) il cui valore di cresta è di 100 volt.

Soluzione

Della tensione data si incominci a trovare il valor medio, il quale è evidente che vale la metà del valore di cresta, cioè 50 volt. A tale valore converrà riferire poi la curva affinché essa si presenti di tipo alternativo, come appare in fig. 7.81-1*b*. In tal modo il suo studio diventa più agevole, poiché le proprietà enunciate nei punti 2, 3, 4 di questo paragrafo risultano assai più evidenti. Per la scelta dell'origine si assumerà il punto O (1), dato che la tabella 7.8 fornisce l'espressione dei termini armonici relativamente a questa origine.

Si osservi che la funzione è del tipo $v(t) = -v(-t)$, per cui lo sviluppo in serie nella forma espressa da 7.8-3 conterrà solo i termini in seno ($A_{nM} \neq 0$, $B_{nM} = 0$) di ordine sia pari che dispari e tutti calcolabili (tabella 7-8) mediante la seguente formula:

$$E_{nM} = -\frac{1}{n}\frac{V_M}{\pi} \text{ (2)} .$$

Con i dati del problema risulta allora:

$$E_{1M} = -\frac{V_M}{\pi} = -31{,}8 \text{ volt}, \quad E_{2M} = -\frac{1}{2}\frac{V_M}{\pi} = -15{,}9 \text{ volt},$$

$$E_{3M} = -\frac{1}{3}\frac{V_M}{\pi} = -10{,}6 \text{ volt}, \quad E_{4M} = -\frac{1}{4}\frac{V_M}{\pi} = -7{,}96 \text{ volt},$$

....,

per cui lo sviluppo in serie si presenterà in definitiva come segue:

$$v(t) = 50 - 31{,}8 \operatorname{sen} \omega t - 15{,}9 \operatorname{sen} 2\omega t - 10{,}6 \operatorname{sen} 3\omega t - 7{,}96 \operatorname{sen} 4\omega t - \dots$$

Nel grafico di fig. 7.81-1*c* è stato riportato il relativo spettro di frequenza, arrestato alla settima armonica.

---

(1) Naturalmente è del tutto conveniente anche il punto O' come origine.

(2) L'ampiezza dell'ennesima armonica vale dunque un ennesimo dell'ampiezza della fondamentale, poiché risulta dalla formula che l'ampiezza di un'armonica si riduce in maniera inversamente proporzionale al suo ordine.

V_M
a)
t
V
$V_M/2$
0
0'
t
b)
y_m
scala 1cm = 10 volt
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
c)
0
f
2f
3f
4f
5f
6f
7f
f

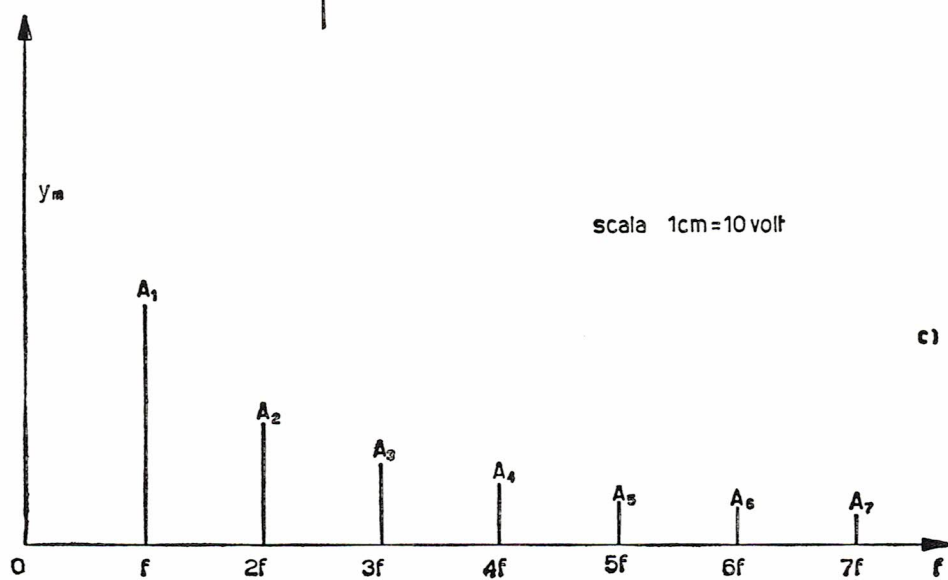
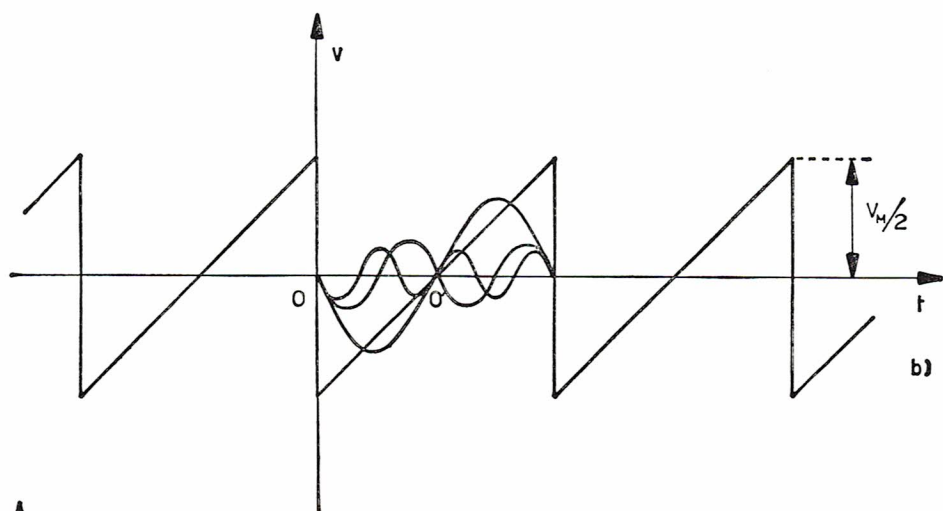
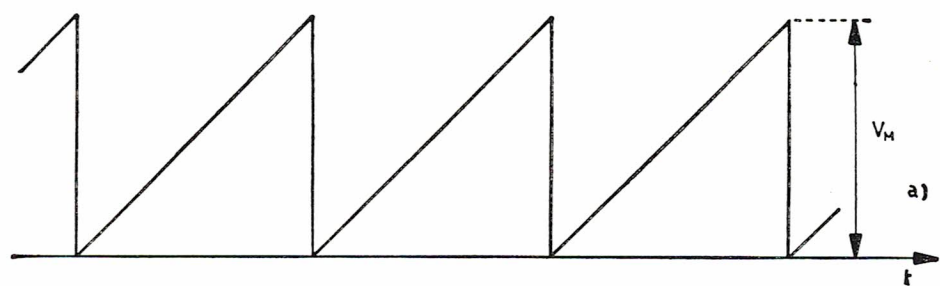



Fig. 7.81-1

Esercizio 7.82

Una tensione rettangolare simmetrica (vedi fig. 7.82-1*a*), di pulsazione $\omega = 100$ rad/sec e di valore massimo $V_M = 250$ volt, agisce ai capi di un bipolo costituito da una resistenza $R = 10$ kohm in serie ad una capacità $C = 10^{-6}$ farad. Si trovino separatamente i primi quattro termini armonici non nulli della corrente, quindi il suo valore efficace. Si cerchi inoltre di costruire graficamente l'onda della corrente.

Soluzione

Assumendo come origine del tempo ad esempio l'istante 0 segnato in fig. 7.82-1*a* lo sviluppo in serie di Fourier della tensione conterrà sola-

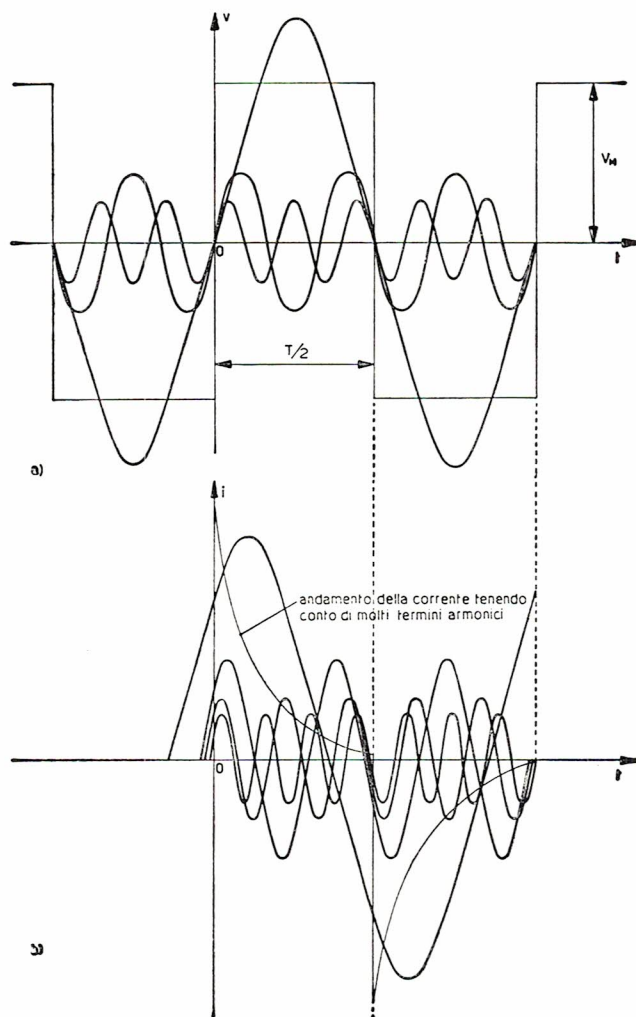



Fig. 7.82-1

mente i termini in seno. D'altronde mancherà il termine continuo e vi saranno inoltre solo i termini di ordine dispari, le cui ampiezze, in base alla tabella 7.8, risultano avere la seguente espressione:

$$E_{nM} = \frac{1}{n} \frac{4}{\pi} V_M .$$

Questa formula mostra quindi come l'ampiezza dei termini armonici costituenti un'onda rettangolare simmetrica vada diminuendo all'aumentare dell'ordine del termine stesso, precisamente in maniera inversamente proporzionale al numero d'ordine n.

Nel nostro caso sarà dunque:

$$v(t) = \frac{4}{\pi} V_M(\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\,\omega t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\,\omega t + ...) ,$$

per cui la corrente che attraverserà il bipolo dato verrà rappresentata dal seguente sviluppo:

$$i(t) = \frac{\frac{4}{\pi} V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1) + \frac{\frac{4}{3\pi} V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{3\,\omega C}\right)^2}} \operatorname{sen}(3\,\omega t + \varphi_3) +$$

$$+ \frac{\frac{4}{5\,\pi} V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{5\,\omega C}\right)^2}} \operatorname{sen}(5\,\omega t + \varphi_5) + ...$$

I primi quattro termini di questo sviluppo sono individuati allora dai seguenti valori:

$$I_{1M} = \frac{\frac{4}{\pi} V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{318}{\sqrt{10^8 + 10^8}} = 22{,}5 \text{ mA}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{10^4}{10^4} = 1, \qquad \varphi_1 = 45^\circ ;$$

$$I_{3M} = \frac{\frac{4}{3\pi} V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{3\,\omega C}\right)^2}} = \frac{106}{\sqrt{10^8 + 0{,}11 \cdot 10^8}} = 10 \text{ mA}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_3 = \frac{\dfrac{1}{3\,\omega C}}{R} = \frac{3330}{10000} = 0{,}333, \qquad \varphi_3 = 18^\circ\,26'\,;$$

$$I_{5M} = \frac{\dfrac{4}{5\pi}\,V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{5\,\omega C}\right)^2}} = \frac{63{,}6}{\sqrt{10^8 + 0{,}04\cdot 10^8}} = 6{,}25\,\mathrm{mA}$$

$$tg\varphi_5 = \frac{\dfrac{1}{5\,\omega C}}{R} = \frac{2000}{10000} = 0{,}2, \qquad \varphi_5 = 11^\circ\,19'\,;$$

$$I_{7M} = \frac{\dfrac{4}{7\pi}\,V_M}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{7\,\omega C}\right)^2}} = \frac{45{,}5}{\sqrt{10^8 + 0{,}02\cdot 10^8}} = 4{,}54\ \mathrm{mA}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_7 = \frac{\dfrac{1}{7\,\omega C}}{R} = \frac{1430}{10000} = 0{,}143\,, \qquad \varphi_7 = 8^\circ\,8'\,.$$

Si noti come già per la settima armonica il valore assunto dal modulo dell' impedenza del bipolo coincida praticamente (approssimazione 1 %) con quello della resistenza R ; ciò varrà a maggior ragione per le armoniche successive, poiché la relativa reattanza del condensatore andrà sempre più diminuendo di valore.

Il valore efficace della corrente risulterà così, applicando la formula 7.8-9 del testo :

$$I = \sqrt{\frac{I_{1M}^2}{2} + \frac{I_{3M}^2}{2} + \ldots} = 10^{-3}\sqrt{235 + 50 + 19{,}5 + 10{,}3} \cong 17{,}7 \quad \mathrm{mA}\,.$$

Nella fig. 7.82-1*b* sono stati riportati i primi quattro termini armonici della corrente e la curva risultante (tenendo conto però di un maggior numero di termini armonici) la quale rappresenta perciò l'andamento nel tempo della corrente nel bipolo dato.

Esercizio 7.83

Un generatore ideale di tensione continua ($V_0 = 10$ volt) ed un generatore ideale di tensione impulsiva (valore di cresta $V_M = 10$ volt, durata dell' impulso t_0 eguale ad un decimo del periodo T) agiscono in

serie in un circuito resistivo $R = 1000$ ohm (vedi fig. 7.83-1). Si analizzi la corrente che scorre nel circuito e si calcoli la potenza erogata dal generatore di tensione continua nel caso in cui l'altro generatore:

a) fornisce una tensione impulsiva positiva rispetto a massa;
b) fornisce una tensione impulsiva negativa rispetto a massa.

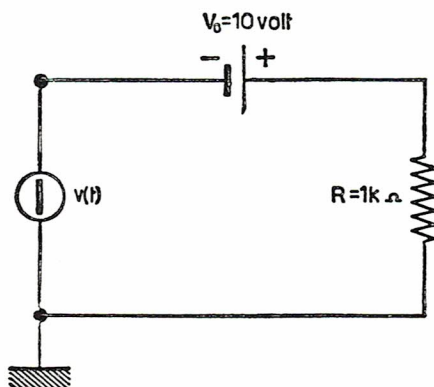



Fig. 7.83-1

Soluzione

Converrà applicare il principio della sovrapposizione degli effetti allo scopo di calcolare separatamente le correnti dovute alle due tensioni agenti nel circuito.

Il generatore di tensione continua invierà nel circuito la seguente corrente continua:

$$I = \frac{V_0}{R};$$

mentre per procedere al calcolo della corrente dovuta al generatore di tensione impulsiva occorrerà disporre dello sviluppo in serie di quest' ultima. A tale scopo, dalla tabella 7.8 si deduce per i vari termini di questo sviluppo (onda impulsiva di fig. 7.83-2*a*; l'origine è stata scelta in modo da avere solo termini in coseno, le armoniche però sono di entrambi gli ordini) le seguenti formule:

$$V_m = \frac{t_0}{T} V_M$$

$$E_{nM} = V_M \frac{2}{\pi n} \operatorname{sen} n\pi \frac{t_0}{T},$$

cioè passando ai numeri:

$$V_m = 1 \text{ volt}, E_{1M} = 1{,}97 \text{ volt}, \quad E_{2M} = 1{,}87 \text{ volt}, \quad E_{3M} = 1{,}25 \text{ volt},$$

$$E_{4M} = 0{,}985 \text{ volt}, \ldots .$$

Nel caso in cui gli impulsi siano positivi rispetto a massa (fig. 7.83-2*a*) la tensione del generatore d' impulsi potrà essere rappresentata dunque

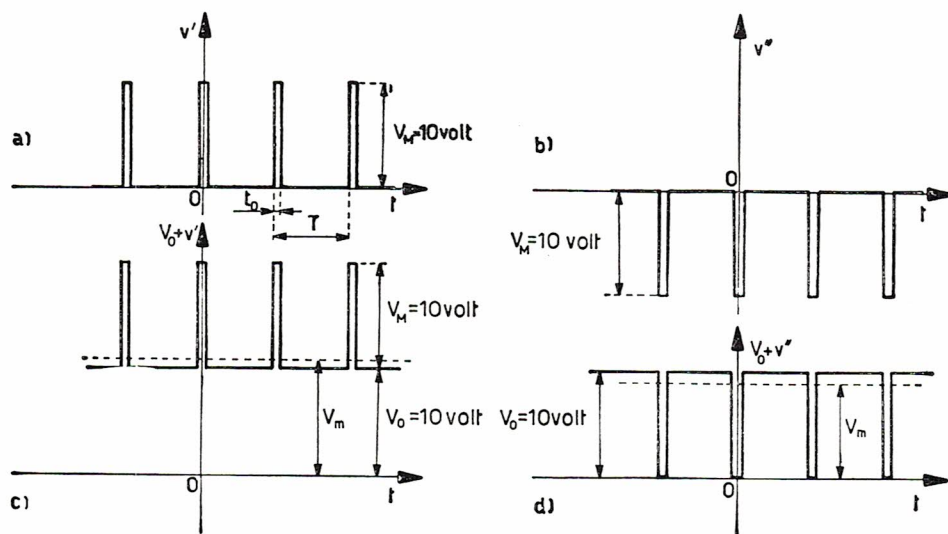



Fig. 7.83-2

con questo sviluppo in serie:

$$v'(t) = 1 + 1{,}97 \cos \omega t + 1{,}87 \cos 2\,\omega t + \ldots ;$$

mentre nel caso in cui gli impulsi siano negativi rispetto a massa (figura 7.83-2*b*) la tensione del generatore d' impulsi $v''(t)$ sarà legata alla tensione $v'(t)$ dalla ovvia relazione $v''(t) = -v'(t)$.

In definitiva la corrente totale istantanea circolante nel circuito, cioè nella resistenza R, assumerà nel primo caso la seguente espressione:

$$i'(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{v'(t)}{R} = 10^{-3}(10 + 1 + 1{,}97 \cos \omega t + 1{,}87 \cos 2\,\omega t + \ldots) ;$$

mentre nel secondo caso varrà:

$$i''(t) = \frac{V_0}{R} + \frac{v''(t)}{R} = 10^{-3}\,(10 - 1 - 1{,}97 \cos \omega t - 1{,}87 \cos 2\,\omega t - \ldots).$$

Pertanto la potenza attiva fornita dal generatore di tensione continua varrà nel primo caso:

$$P' = V_0 I'_m = 10\,(10 + 1)\,10^{-3} = 0{,}11 \text{ watt}$$

e nel secondo caso:

$$P'' = V_0 I''_m = 10\,(10 - 1)\,10^{-3} = 0{,}09 \text{ watt}\,.$$

In fig. 7.83-2*c* è stato riportato il diagramma che rappresenta l'andamento nel tempo della tensione che in realtà agisce sulla resistenza R data quando gli impulsi sono positivi rispetto a massa; mentre in figura 7.83-2*d* appare l'andamento della tensione, sempre ai capi di R, quando gli impulsi sono negativi rispetto a massa. Si noti quindi che si poteva risolvere il problema analizzando direttamente queste tensioni.

7.9 10 esercizi completamente svolti sulle reti in regime sinusoidale

Esercizio 7.91

Si calcoli il valore in modulo e fase del rapporto delle tensioni $\bar{E}_u/\bar{E}_e$ relative alla rete riportata in fig. 7.91-1 (frequenza di lavoro 500 per/sec).

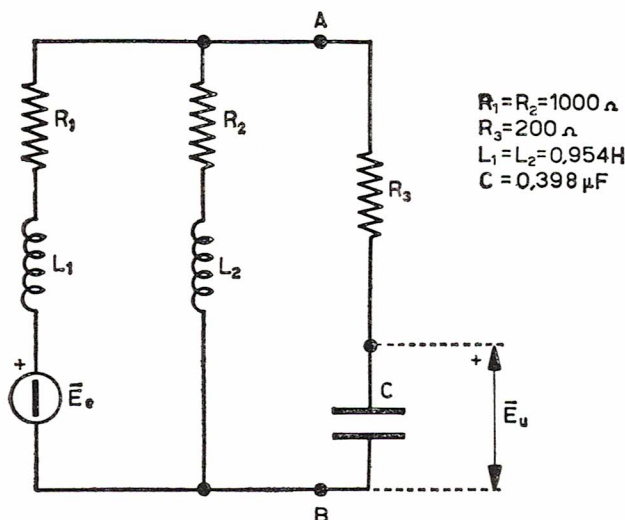



Fig. 7.91-1

Soluzione

Il metodo più semplice è quello che fa ricorso al principio di Thévenin applicato al ramo contenente la resistenza R_3 e la capacità C. L'applicazione del principio di Thévenin è qui tra l'altro facilitata dal fatto che, con i dati del problema, l' impedenza $\bar{Z}_1 = R_1 + j\,\omega L_1$ risulta eguale all' impedenza $\bar{Z}_2 = R_2 + j\,\omega L_2$.

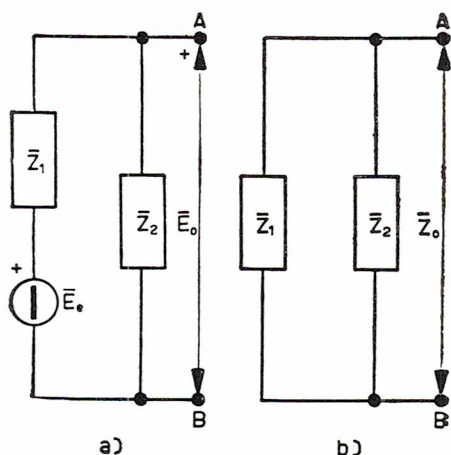



Fig. 7.91-2

Pertanto la tensione a vuoto $\bar{E}_0$ fra i punti A e B (vedi rete di fig. 7.91-2a) ammonta a:

$$\bar{E}_0 = \frac{\bar{E}_e}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}\,\bar{Z}_2 = \frac{1}{2}\,\bar{E}_e\,,$$

poiché la tensione $\bar{E}_0$ è ricavata ai capi di un partitore in cui $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2$; mentre l'impedenza interna $\bar{Z}_0$ risulta espressa da (vedi rete di figura 7.91-2b):

$$\bar{Z}_0 = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{\bar{Z}_1}{2} = \frac{1000 + j\,6{,}28\cdot 500\cdot 0{,}954}{2} =$$

$$= \frac{1000 + j\,3000}{2} = 500 + j\,1500\,.$$

La rete assegnata si trasforma dunque in quella equivalente di fig. 7.91-3. Sarà così facile calcolare la tensione $\bar{E}_u$, che è ai capi della capacità C,:

$$\bar{E}_u = \frac{\bar{E}_0}{\bar{Z}_0 + R_3 - j\,\dfrac{1}{\omega C}}\left(-j\,\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{-j\,\dfrac{1}{\omega C}}{2\left(\bar{Z}_0 + R_3 - j\,\dfrac{1}{\omega C}\right)}\,\bar{E}_e\,,$$

che con i dati del problema, poiché $1/\omega C = 800\ \Omega$, diventa:

$$\bar{E}_u = \frac{-j\,800}{2(700 + j\,1500 - j\,800)}\,\bar{E}_e = \frac{-j\,800}{1400 + j\,1400}\,\bar{E}_e =$$

$$= -\,(0{,}286 + j\,0{,}286)\,\bar{E}_e\,.$$

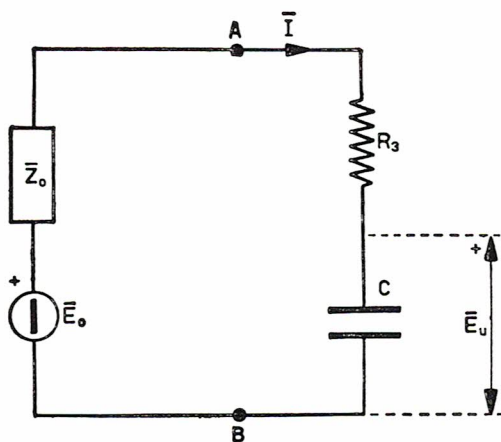
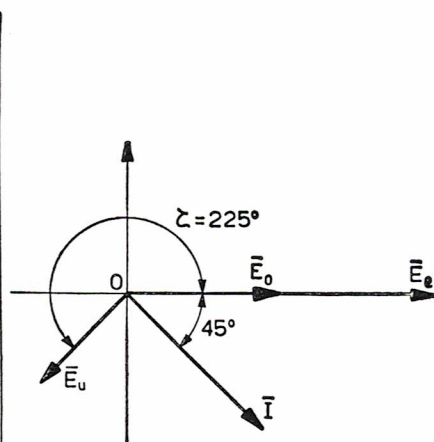



Fig. 7.91-3 *Fig.7.91-4*

Il modulo del rapporto $\bar{E}_u/\bar{E}_e$ vale allora:

$$\frac{E_u}{E_e} = \sqrt{0{,}286^2 + 0{,}286^2} = 0{,}403$$

e la fase ζ (vedi diagramma di fig. 7.91-4) ammonta a:

$$\zeta = 180^o + 45^o = 225^o\,.$$

Esercizio 7.92

Si trovi per la rete riportata in fig. 7.92-1 il rapporto fra la tensione di uscita $\bar{E}_u$ e quella di entrata $\bar{E}_e$ nel caso in cui quest' ultima è sinusoidale ed ha pulsazione $\omega = 4$M rad/sec.

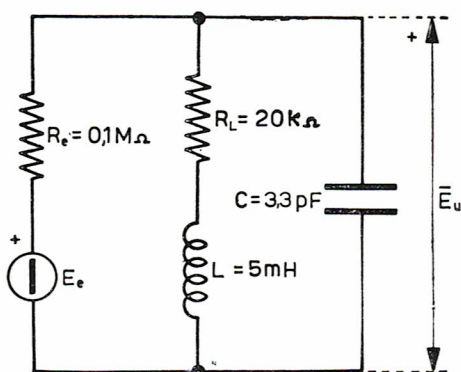



Fig. 7.92-1

Soluzione

Il metodo più semplice è quello che fa ricorso al principio di Millman. Si ha così, indicando con $\overline{Y}_L$ rispettivamente con $\overline{Y}_C$ l'ammettenza del ramo induttivo e del ramo capacitivo:

$$\overline{E}_u = \frac{\overline{E}_e/R_e}{\frac{1}{R_e} + \overline{Y}_L + \overline{Y}_C},$$

cioè, passando ai numeri e ricordando che:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$$

$$\overline{Y}_L = \frac{1}{R_L + j\,\omega L} = \frac{1}{20000 + j\,20000} = (2,5 - j\,2,5)\,10^{-5}$$

$$\overline{Y}_C = j\,\omega C = j\,1,32 \cdot 10^{-5},$$

in definitiva:

$$\frac{\overline{E}_u}{\overline{E}_e} = \frac{10^{-5}}{10^{-5}(1 + 2,5 - j\,2,5 + j\,1,32)} = \frac{1}{3,5 - j\,1,18} =$$

$$= \frac{1}{3,68\,\varepsilon^{-j18^\circ 38'}} = 0,271\,\varepsilon^{j18^\circ 38'}.$$

Naturalmente il problema poteva essere risolto trasformando il generatore di tensione in quello equivalente di corrente, come appare in fig. 7.92-2, per avere tutti i rami in parallelo e quindi raggiungere mag-

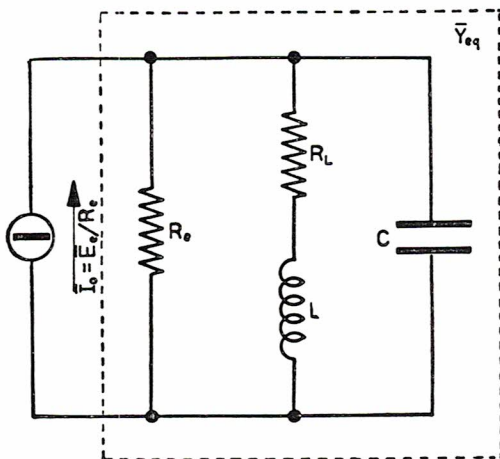



Fig. 7.92-2

gior facilità di calcolo. Ma la formula risolutiva ricade ovviamente in quella fornita dal principio di Millman; infatti si ha ancora che:

$$\overline{E}_u = \frac{\overline{I}_0}{\overline{Y}_{eq}} = \frac{\overline{I}_0}{\frac{1}{R_e} + \overline{Y}_L + \overline{Y}_C} = \frac{\frac{\overline{E}_e}{R_e}}{\frac{1}{R_e} + \overline{Y}_L + \overline{Y}_C}.$$

Esercizio 7.93

Si trovi il valore della corrente che attraversa la resistenza R facente parte del ponte di reattanze riportato in fig. 7.93-1, dove $E = 100\ V$.

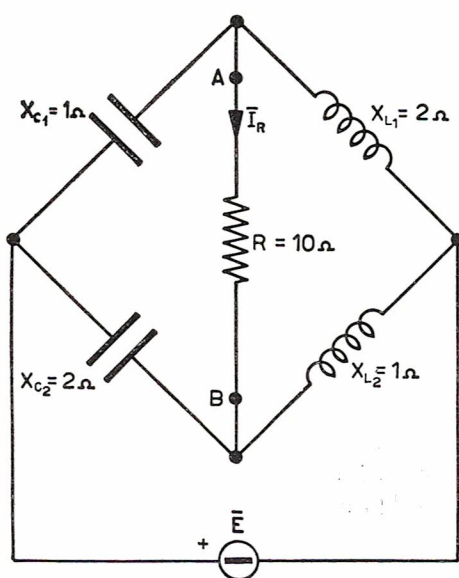
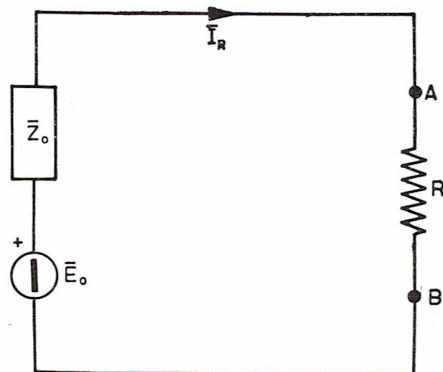



Fig. 7.93-1 *Fig. 7.93-2*

Soluzione

Applicando il principio di Thévenin fra i punti A e B si ha che la rete data si trasforma, per il ramo R, in quella equivalente di fig. 7.93-2, ove $\overline{E}_0 = \overline{E}_{AB}$ in assenza di R, quindi:

$$\overline{E}_0 = jX_{C_1} \frac{\overline{E}}{jX_{L_1} - jX_{C_1}} - jX_{C_2} \frac{E}{jX_{L_2} - jX_{C_2}},$$

ossia ponendo il vettore $\overline{E}$ sull'asse reale:

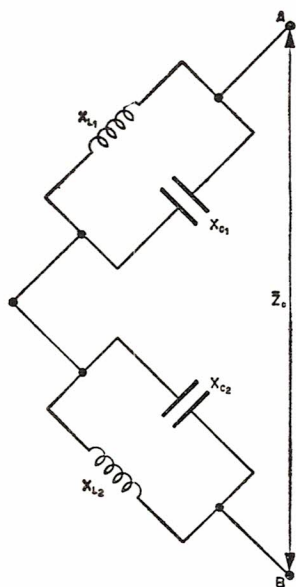



Fig. 7.93-3

$$\bar{E}_0 = j\,1 \frac{100}{j\,(2-1)} - j\,2 \frac{100}{j\,(1-2)} = 100 + 200 = 300 + j\,0\,;$$

e dove l' impedenza interna $\bar{Z}_0$ ammonta a (vedi fig. 7.93-3):

$$\bar{Z}_0 = -j\,2 + j\,2 = 0\,.$$

Pertanto la corrente nel ramo R vale:

$$\bar{I}_R = \frac{E_0}{\bar{Z}_0 + R} = \frac{300}{10} = 30 \text{ ampere}$$

e risulta in fase con la tensione di alimentazione $\bar{E}$.

Esercizio 7.94

Si trovi per quale valore di reattanza X_c la tensione di uscita $\bar{E}_u$ del quadripolo riportato in fig. 7.94-1 risulta sfasata in anticipo di 120° rispetto alla tensione di entrata $\bar{E}_e$.

Soluzione

Il quadripolo riportato in fig. 7.94-1 ha la struttura del classico ponte di Wheatstone, come appare infatti in fig. 7.94-2 dove è stato ridisegnato. È così più agevole dedurre che:

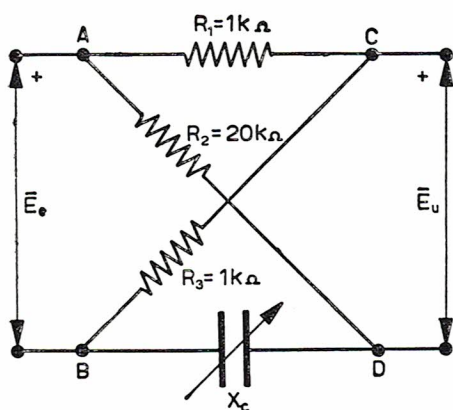



Fig. 7.94-1

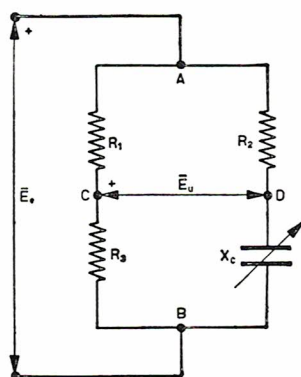



Fig. 7.94-2

$$\bar{E}_u = \bar{E}_{CD} = \bar{E}_{AD} - \bar{E}_{AC} = R_2 \frac{\bar{E}_e}{R_2 - jX_c} - \frac{1}{2}\bar{E}_e ,$$

cioè sviluppando:

$$\bar{E}_u = \bar{E}_e \left(\frac{R_2}{R_2 - jX_c} - \frac{R_2 - jX_c}{2\,(R_2 - jX_c)} \right) = \bar{E}_e \left[\frac{R_2 + jX_c}{2\,(R_2 - jX_c)} \right] =$$

$$= \frac{(R_2 + jX_c)\,(R_2 + jX_c)}{2\,(R_2^2 + X_c^2)}\,\bar{E}_e = \bar{N}\bar{E}_e .$$

Ora lo sfasamento ζ di $\bar{E}_u$ rispetto ad E_e è dato dall'argomento della quantità complessa $\bar{N}$ che moltiplica $\bar{E}_e$ nell'espressione sopra scritta, cioè anche dall'argomento del prodotto:

$$(R_2 + jX_c)(R_2 + jX_c) = (R_2^2 - X_c^2) + j\,2\,R_2X_c ,$$

in quanto il denominatore di $\bar{N}$, cioè $2\,(R_2^2 + X_c^2)$, è un numero reale che non determina sfasamento. Sarà quindi:

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{2\,R_2X_c}{R_2^2 - X_c^2} .$$

Poiché il problema impone che ζ sia eguale a 120°, risulta di conseguenza $\operatorname{tg}\zeta = \operatorname{tg} 120° = -1{,}73$, per cui:

$$\frac{2\,R_2X_c}{R_2^2 - X_c^2} = -1{,}73 ,$$

cioè sviluppando e raccogliendo, anche:

$$X_c^2 - \frac{2}{1,73} R_2 X_c - R_2^2 = 0 \,.$$

Passando ai numeri, l'equazione sopra ricavata diventa:

$$X_c^2 - 2,31 \cdot 10^4 \, X_c - 4 \cdot 10^8 = 0 \,;$$

le cui due radici sono:

$$X_c = \frac{2,31 \cdot 10^4 \pm \sqrt{5,34 \cdot 10^8 + 16 \cdot 10^8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{2,31 + 4,61}{2} \, 10^4 = 3,46 \cdot 10^4 \\[2mm] \dfrac{2,31 - 4,61}{2} \, 10^4 = -1,15 \cdot 10^4 . \end{cases}$$

Scartando la radice negativa (altrimenti la reattanza X_c diventa in realtà induttiva e la tensione $\bar{E}_u$ va allora in ritardo di 120° su $\bar{E}_e$) si ha dunque che:

$$X_c = 3,46 \cdot 10^4 \text{ ohm} \,.$$

Esercizio 7.95

Una bobina con presa intermedia è sottoposta all'azione di una tensione sinusoidale $\bar{E}_1$ fra un estremo e il suo punto intermedio, come appare in fig. 7.95-1*a*; mentre i due estremi della bobina sono chiusi su di un carico $\bar{Z}_u$ (autotrasformatore in salita).

Si trovi l'espressione analitica della corrente primaria $\bar{I}_1$ in funzione della tensione primaria $\bar{E}_1$, supponendo noti tutti i parametri della bobina nonché il coefficiente di mutua induzione M fra le due parti e i relativi *punti corrispondenti.*

Soluzione

Sullo schema di fig. 7.95-1*b* è stato posto tutto quanto è necessario per poter scrivere le equazioni dei due circuiti primario e secondario. Si noti che con R_1 ed L_1, rispettivamente con R_2 ed L_2, sono state indicate la resistenza e l' induttanza della prima parte, rispettivamente della seconda parte, di cui è costituita l' intera bobina.

Assumendo il verso destrogiro di percorrenza per i due circuiti primario e secondario, nonché facendo riferimento a quanto è stato indicato nel § 7.5 circa il segno da attribuire alle *f.e.m.* mutue indotte, si potranno scrivere allora le seguenti due equazioni:

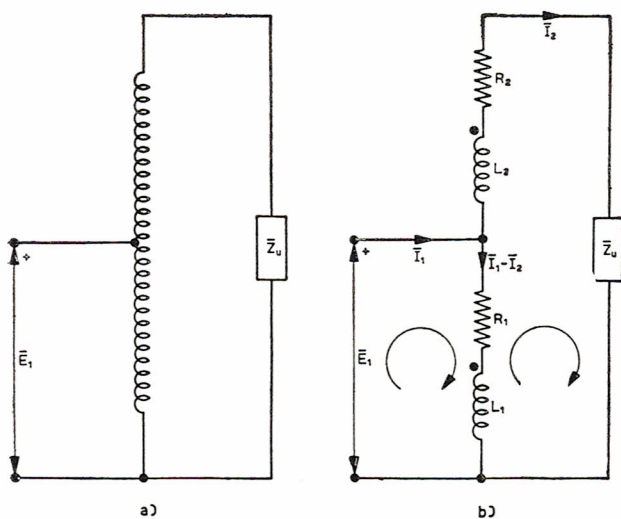



Fig. 7.95-1

$$\overline{E}_1 = (R_1 + j\,\omega L_1)(\overline{I}_1 - \overline{I}_2) - j\,\omega M \overline{I}_2 \qquad \text{(circuito primario)}$$

$$0 = (R_2 + j\,\omega L_2)\overline{I}_2 + \overline{Z}_u \overline{I}_2 - (R_1 + j\,\omega L_1)(\overline{I}_1 - \overline{I}_2) + j\,\omega M \overline{I}_2 -$$

$$- j\,\omega M(\overline{I}_1 - \overline{I}_2) \qquad \text{(circuito secondario),}$$

dalle quali sviluppando, raccogliendo e ponendo $\overline{Z}_1 = R_1 + j\,\omega L_1$, $\overline{Z}_2 = R_2 + j\,\omega L_2$, si ottiene:

$$\overline{E}_1 = \overline{Z}_1 \overline{I}_1 - (\overline{Z}_1 + j\,\omega M)\overline{I}_2$$

$$0 = -(\overline{Z}_1 + j\,\omega M)\overline{I}_1 + (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_u + j\,2\,\omega M)\overline{I}_2 .$$

Ora dalla seconda equazione di questo sistema si ha subito la relazione analitica fra corrente secondaria e primaria, cioè:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{Z}_1 + j\,\omega M}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_u + j\,2\,\omega M}\,\overline{I}_1 ,$$

per cui, di conseguenza, dalla prima equazione risulta immediatamente che:

$$\overline{E}_1 = \overline{Z}_1 \overline{I}_1 - \frac{(\overline{Z}_1 + j\omega M)^2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_u + j\,2\,\omega M}\,\overline{I}_1 ,$$

espressione che lega la corrente primaria alla tensione primaria come si doveva trovare.

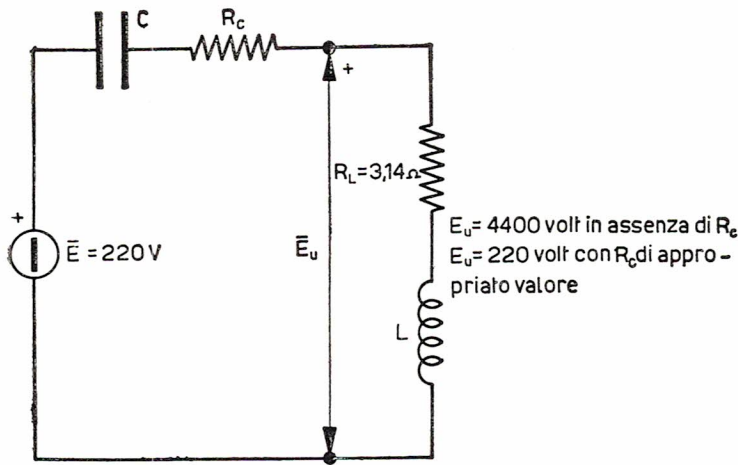



Fig. 7.96-1

Esercizio 7.96

Si vuole portare in fase con la tensione di alimentazione ($E = 220$ volt) la corrente assorbita da un carico ohmico-induttivo, del quale si conosce solamente il valore della resistenza ($R_L = 3{,}14$ ohm), e a tale scopo si inserisce in serie al carico un condensatore (privo di perdite) come appare in fig. 7.96-1.

Trovare la potenza reattiva di questo condensatore e il valore della resistenza R_c da porvi in serie affinché la sovratensione ai capi del carico, che in assenza della resistenza R_c porterebbe la tensione a 4400 volt (efficaci), sia nulla.

L' impedenza interna del generatore che alimenta il circuito è trascurabile.

Soluzione

Si osservi anzitutto che l' introduzione della capacità porta il circuito in risonanza, poiché la corrente deve essere in fase con la tensione di alimentazione. D'altronde, in assenza della resistenza zavorra R_c, siccome la tensione E_u ai capi del carico (4400 volt) è in queste condizioni venti volte quella di alimentazione E (220 volt), si deduce che il coefficiente di risonanza a carico risulta eguale a 20 ($\varepsilon_C = \dfrac{E_{L,r}}{E}$, ma $E_{L,r}$ coincide praticamente con la tensione E_u ai capi del carico, poiché il fattore di merito del carico è maggiore di 10). D'altra parte il generatore ha resistenza interna nulla e il condensatore è privo di perdite, per cui il fattore di merito Q del carico induttivo risulterà coincidente con il predetto coefficiente di risonanza. Sarà quindi $Q = 20$.

È così possibile calcolare la reattanza incognita del carico:

$$X_L = Q \cdot R_L = 20 \cdot 3{,}14 = 62{,}8 \text{ ohm} .$$

Naturalmente la reattanza del condensatore X_c avrà pure lo stesso valore, perché nel circuito la corrente deve essere in fase con la tensione di alimentazione (risonanza serie). Pertanto la potenza reattiva del condensatore, poiché $E_{c,r} = E = 220$ volt in quanto non vi deve essere sovratensione, ammonta a:

$$\text{Potenza reattiva} = \frac{E^2_{c,r}}{X_c} = \frac{220^2}{62{,}8} = 770 \text{ VAR} .$$

La resistenza R_c da inserire in serie al condensatore sarà tale da soddisfare la condizione 7.62-9 data nel testo, cioè:

$$\frac{R_L + R_c}{R_c} = \frac{20}{1} ,$$

dalla quale si ricava facilmente:

$$R_c = 19 \cdot R_L = 19 \cdot 3{,}14 = 59{,}66 \text{ ohm}.$$

Esercizio 7.97

Un bipolo, costituito da un condensatore e da una bobina collegati fra di loro in serie, si veda la fig. 7.97-1, assorbe alla frequenza di risonanza $f_r = 100000$ per/sec una corrente $I_r = 0{,}2$ ampere, mentre alla frequenza $f_2 = 101250$ per/sec assorbe una corrente $I_2 = I_r/\sqrt{2}$.

Sapendo che le caratteristiche del generatore sono le seguenti: $E_0 = 10$ volt, $R_0 = 10$ ohm, e che le perdite del condensatore sono trascurabili rispetto a quelle della bobina, trovare:

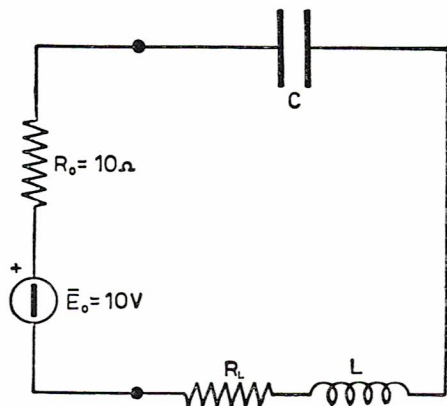



Fig. 7.97-1

a) il valore della resistenza *serie* della bobina;
b) il valore dell'induttanza e del fattore di merito della bobina;
c) il valore della capacità del condensatore.

Soluzione

Dalla seguente relazione, valevole in condizione di risonanza: $E_0 = (R_L + R_0)I_r$, si ricaverà il valore della resistenza totale serie del circuito, cioè:

$$R_L + R_0 = \frac{E_0}{I_r} = \frac{10}{0{,}2} = 50 \text{ ohm},$$

da cui risulta:

$$R_L = 50 - 10 = 40 \text{ ohm}.$$

Conviene ora trovare il coefficiente di risonanza a carico del circuito, il quale verrà ricavato facendo ricorso alla formula della banda passante:

$$\varepsilon_c = \frac{f_r}{B} = \frac{f_r}{2(f_2 - f_r)} = \frac{100000}{2 \cdot 1250} = 40,$$

poiché $I_2 = 0{,}707\ I_r$.

A questo punto è possibile quindi calcolare il valore della reattanza del condensatore e quello della bobina alla pulsazione di risonanza, poiché si può scrivere:

$$X_{C,r} = X_{L,r} = \frac{E_{C,r}}{I_r} = \frac{\varepsilon_c E_0}{I_r} = \frac{40 \cdot 10}{0{,}2} = 2000 \text{ ohm}.$$

Il fattore di merito della bobina risulta pertanto:

$$Q = \frac{X_{L,r}}{R_L} = \frac{2000}{40} = 50.$$

D'altronde la pulsazione di risonanza è nota ($\omega_r = 2\pi f_r = 0{,}628 \cdot 10^6$ rad/sec) così come il valore della reattanza della bobina che è stato trovato più sopra. Si deduce perciò che:

$$L = \frac{X_{L,r}}{\omega_r} = \frac{2000}{0{,}628 \cdot 10^6} = 3{,}18 \text{ mH},$$

$$C = \frac{1}{\omega_r X_{L,r}} = \frac{1}{0{,}628 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3} = 796 \text{ pF}.$$

Esercizio 7.98

Un bipolo risonante parallelo, costituito da una bobina e da un condensatore, quest' ultimo senza perdite, alimentato tramite un generatore di corrente come appare in fig. 7.98-1, presenta ai suoi capi, alla risonanza ($f_r = 1$ MHz), una tensione sinusoidale il cui valore di cresta è $E_{M,r} = 215$ volt.

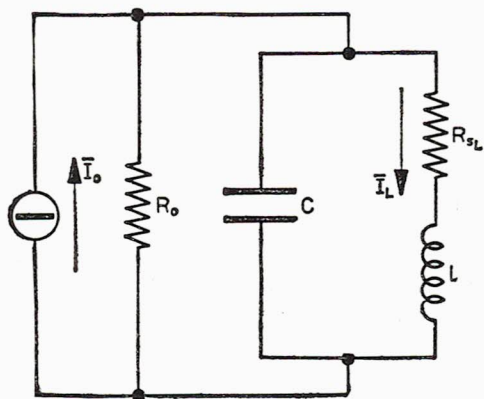



Fig. 7.98-1

Sapendo che la bobina in queste condizioni dissipa 0,50 watt ed ha un fattore di merito $Q = 100$, si trovi il valore di R_{sL}, L, C e il valore della banda passante quando la resistenza interna del generatore $R_0 = 11550$ ohm.

Soluzione

I parametri incogniti della bobina sono due (R_{sL} ed L), però due sono le equazioni che si possono scrivere per essa, precisamente quella del fattore di merito:

$$\omega_r L = Q R_{sL}$$

e quella della potenza attiva dissipata:

$$P = R_{sL} I_{L,r}^2 .$$

Poiché d'altronde, per essere $\omega_r L >> R_{sL}$ (infatti $\omega_r L = 100 R_{sL}$) si ha che $Z_L = \omega_r L$, di conseguenza la corrente attraverso la bobina, alla risonanza, vale semplicemente:

$$I_{L,r} = \frac{E_{M,r}}{\sqrt{2}\, \omega_r L} ,$$

per cui in definitiva la potenza P dissipata dalla bobina risulta come segue:

$$P = R_{sL} \frac{E^2_{M,r}}{2\,\omega_r^2\, L^2}\,.$$

Sostituendovi ora ad $\omega_r L$ l'espressione più sopra indicata e risolvendo rispetto a R_{sL} si ottiene:

$$R_{sL} = \frac{E^2_{M,r}}{2\,PQ^2} = \frac{215^2}{2\cdot 0{,}5\cdot 100^2} = 4{,}62 \quad \text{ohm}\,,$$

per cui si trova finalmente che:

$$L = \frac{QR_{sL}}{\omega_r} = \frac{100\cdot 4{,}62}{6{,}28\cdot 10^6} = 73{,}5\ \mu\text{H}\,.$$

Il valore della capacità C si ricaverà naturalmente dalla formula $\omega_r^2\, LC = 1$, poiché nel nostro caso $Q > 10$. Si ha così:

$$C = \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{39{,}5\cdot 10^{12}\cdot 73{,}5\cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{2905} = 344\ \text{pF}\,.$$

Per trovare la banda passante è necessario calcolare invece il coefficiente di risonanza a carico. A tale scopo si porti la resistenza R_{sL} in parallelo al circuito. Sarà (formula 5.519-10):

$$R_{pL} = \frac{\omega_r^2 L^2}{R_{sL}} = Q^2\cdot R_{sL} = 100^2\cdot 4{,}62 = 46200 \quad \text{ohm}\,.$$

Applicando allora la formula 7.63-9 del testo si ha, poiché nel nostro caso $\varepsilon_v = Q$, :

$$\varepsilon_c = \frac{1}{1 + \dfrac{R_{pL}}{R_0}}\,\varepsilon_v = \frac{1}{1 + \dfrac{46200}{11550}}\,100 = 20\,.$$

La banda passante convenzionale ammonta perciò a:

$$B = \frac{f_r}{\varepsilon_c} = \frac{1000000}{20} = 50000\ \text{Hz}\,.$$

Esercizio 7.99

Un circuito antirisonante può essere schematizzato come in fig. 7.99-1. Sapendo che alla risonanza sono stati misurati ai suoi capi 1000 volt (efficaci), trovare in queste condizioni:

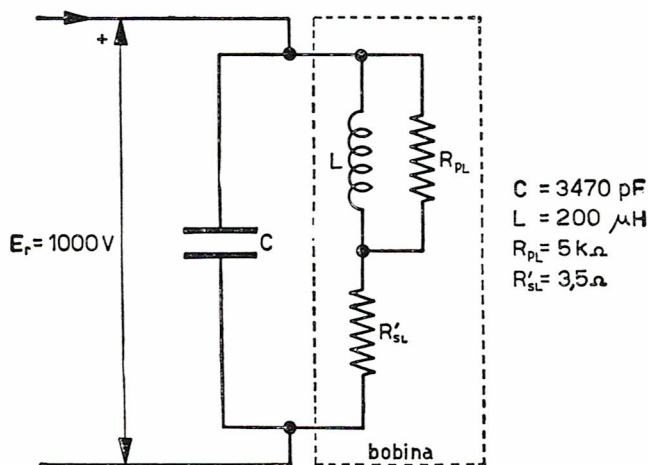



Fig. 7.99-1

a) il valore della pulsazione di risonanza;
b) il valore del coefficiente di risonanza a vuoto;
c) la potenza attiva dissipata dal circuito.

Soluzione

a) Si calcoli il valore della pulsazione di risonanza *supponendo* che il coefficiente di merito della bobina sia maggiore di 10. In tal caso si potrà applicare la semplicissima formula:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}47 \cdot 10^{-9}}} = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ rad/sec.}$$

Si verificherà naturalmente più avanti se l'ipotesi $Q > 10$ è accettabile.

b) Si trasformi la resistenza R_{pL} che è in parallelo all'induttanza L in resistenza R''_{sL} in serie alla stessa mediante la formula di trasformazione 5.519-10 data nel § 5.519 del capitolo 5:

$$R''_{sL} = \frac{(\omega_r L)^2}{R_{pL}} = \frac{240^2}{500} = 11{,}5 \text{ ohm} .$$

La resistenza totale in serie all'induttanza ammonta pertanto a:

$$R_{sL} = R'_{sL} + R''_{sL} = 3{,}5 + 11{,}5 = 15 \text{ ohm} ,$$

per cui il fattore di merito della bobina (ramo induttivo) vale:

$$Q = \frac{\omega_r L}{R_{sL}} = \frac{240}{15} = 16 .$$

Ciò conferma che il procedimento usato al punto *a*) per il calcolo della pulsazione di risonanza è stato perfettamente lecito.

Il coefficiente di risonanza a vuoto ε_v del circuito, poiché il condensatore C è supposto privo di perdite, vale naturalmente $\varepsilon_v = Q = 16$.

c) La potenza attiva dissipata dal circuito si può calcolare a mezzo della formula:

$$\text{Pot. attiva} = \frac{\text{Pot. reattiva}}{\varepsilon_c} .$$

Nel nostro caso si ha:

$$\text{Pot. attiva} = \frac{\omega_r C E_r^2}{\varepsilon_c} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 3{,}47 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-6}}{16} = \frac{4170}{16} = 260 \text{ W} .$$

Esercizio 7.910

Si dica quali termini armonici sono presenti nello sviluppo in serie di Fourier delle curve riportate rispettivamente in fig. 7.910-1*a* e 2*a*. Si raffiguri quindi per ognuna il termine fondamentale.

Soluzione

1ª *curva.*

La curva data presenta anzitutto un valor medio, il quale geometricamente potrà essere individuato come in fig. 7.910-1*b*. Esso vale la metà di quello massimo. Se poi la curva viene riferita a tale valore, come appare in fig. 7.910-1*c*, si vede allora assai facilmente che questa è affetta sia da armoniche pari che dispari, poiché la parte negativa della curva, ribaltata e traslata, non si sovrappone a quella positiva.

Assumendo però il punto O, oppure quello O', come origine della funzione data, è possibile semplificare i termini dello sviluppo. Infatti, poiché la funzione in questo caso diventa del tipo $y(t) = -y(-t)$, mancheranno tutti i termini in coseno.

Per il termine fondamentale si veda il diagramma *d* di fig. 7.910-1.

2ª *curva*

Presenta un valore medio che può essere individuato con la solita costruzione geometrica della retta di compenso, come appare nella fig. 7.910-2*b*; possiede d'altronde sia armoniche pari che dispari come si comprende osservando la curva di fig. 7.910-2*c* che rappresenta la curva data riferita al suo valore medio.

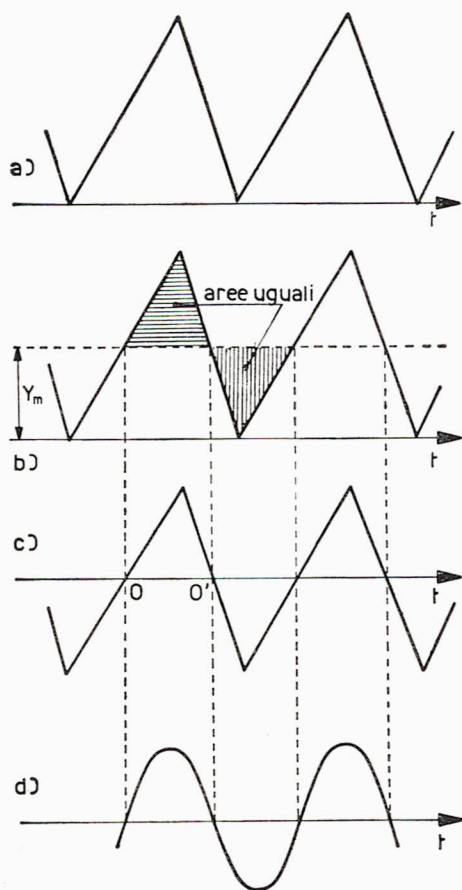



Fig. 7.910-1

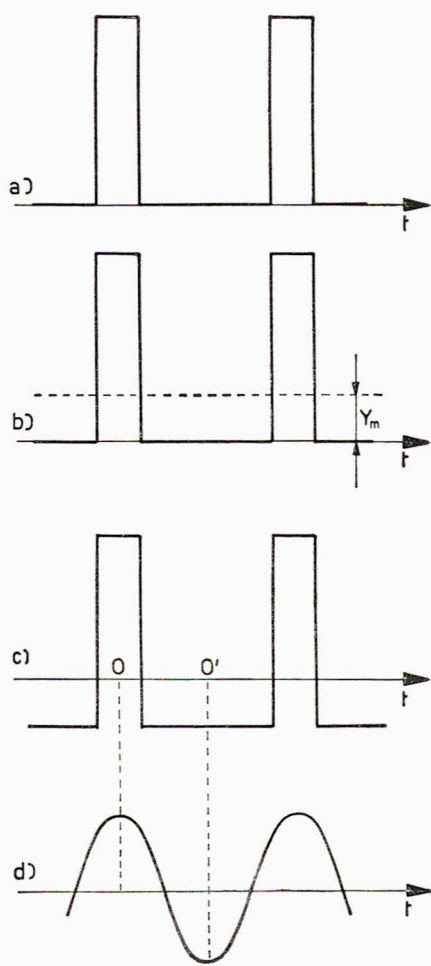



Fig. 7.910-2

La scelta dell'origine nel punto O, oppure O', (di fig. 7.910-2c) caratterizza la funzione ad essere del tipo $y(t) = y(-t)$ e quindi ad avere nello sviluppo in serie i soli termini in coseno, il cui termine fondamentale appare in fig. 7.910-2d.

FENOMENI TRANSITORI NEI CIRCUITI ELETTRICI LINEARI

8

8.1 Generalità

8.11 Introduzione

In una rete elettrica attiva, cioè sottoposta all'azione di uno o più generatori, le tensioni e le correnti non possono raggiungere, al momento dell' inserzione o della disinserzione dei generatori stessi, quei valori che in quell' istante si avrebbero se il regime elettrico fosse già permanente. Fa eccezione a quanto esposto qualche caso, ad esempio quello della rete completamente ohmica. Ma in generale una rete elettrica risulta costituita da uno o più elementi affetti anche da induttanza o da capacità, o da entrambe. Ora è noto che, per ragioni energetiche, le induttanze e le capacità si debbono considerare come parametri dotati di *inerzia*, cioè precisamente tali da non consentire rispettivamente che le correnti (nelle induttanze) e le tensioni (ai capi delle capacità) possano variare istantaneamente di valore.

Risulta così che le tensioni e le correnti in una rete elettrica attiva si porteranno solo gradatamente ai valori caratteristici del regime permanente, ciò perché, come si è detto, non è possibile che esse vi arrivino bruscamente. Questo tempo necessario perché il circuito elettrico si porti in regime permanente viene denominato periodo transitorio o anche semplicemente *transitorio*. Si può dire dunque che una rete elettrica entra in regime transitorio tutte le volte che le correnti nei suoi rami e le tensioni ai capi dei suoi elementi devono variare più o meno rapidamente, potendo questo fatto avvenire a causa di brusche inserzioni o disinserzioni dei generatori elettrici, o di variazioni delle loro caratteristiche, o in seguito a più o meno brusche inclusioni od esclusioni di alcuni elementi passivi che compongono la rete stessa.

Lo studio del comportamento dei circuiti in regime transitorio è importantissimo. Basti ricordare ad esempio che per l'esercizio degli impianti elettrici esso serve a mostrare in quali condizioni gravose si possa venir a trovare un circuito all'atto della sua inserzione sulla rete di alimentazione, oppure come venga ad essere sollecitato il macchinario elettrico in caso di guasti (ad esempio per cortocircuito). Viceversa, in certe applicazioni radioelettroniche, molti circuiti basano il loro modo di funzionamento esclusivamente su fenomeni transitori; mentre per altri circuiti questi fenomeni sono da evitare al massimo.

Nei successivi paragrafi si farà pertanto un esame dettagliato dei vari casi più importanti che possono ricorrere nella pratica. Ma si vuol fare osservare fin d'ora che, salvo casi molto semplici, lo studio rigoroso dei fenomeni transitori, anche se relativo ai circuiti lineari, può essere molto difficile fino a diventare impossibile se affrontato con mezzi matematici non idonei. D'altronde i mezzi più idonei sono quelli che fanno ricorso al calcolo *operazionale* (branca dell'Analisi Matematica), come è il metodo della trasformata di Laplace, metodi che esulano dall' impostazione di questo libro.

8.12 Caratteristiche generali del problema

I valori delle tensioni e delle correnti in regime transitorio si trovano risolvendo le equazioni che interpretano per il circuito (o per la rete) la legge generale di Ohm ai valori istantanei (o i principi di Kirchhoff, o altri principi, pure scritti ai valori istantanei). La soluzione di queste equazioni è abbastanza facile solo nei casi molto semplici, assai meno negli altri casi, poiché si tratta sempre di risolvere delle equazioni differenziali od integro-differenziali (1). Si veda infatti, ad esempio, l'equazione ai valori istantanei data in 5.53-3 per il circuito assai semplice di fig. 5.53-1. Ed è appunto a causa di queste difficoltà di ordine matematico che lo studio nei successivi paragrafi, dopo esser stato impostato in maniera rigorosa, verrà svolto dandone semplicemente i risultati, cioè omettendone la dimostrazione, ma cercando invece di fornire un' illustrazione di quanto esposto.

Si vuole richiamare d'altronde l'attenzione sul fatto che la soluzione delle equazioni differenziali od integro-differenziali, di cui si è ora detto, contiene sempre due termini, precisamente quello cosiddetto permanente e quello transitorio.

Se ad esempio si tratta di una corrente (2), questa risulterà dunque come somma di un termine che rappresenta la corrente permanente i_p

---

(1) Precisamente queste equazioni risultano a coefficienti costanti quando il circuito è lineare. Ciò fa sì che la soluzione delle equazioni differenziali sia grandemente più agevole. Tuttavia sulle difficoltà dello studio dei fenomeni transitori nei circuiti lineari si è già accennato alla fine del paragrafo precedente.

(2) Quanto ora si dirà a proposito delle correnti vale anche per le tensioni.

e di un termine che rappresenta la corrente transitoria i_{tr}. Per questo motivo, il valore istantaneo della corrente che fluisce in un ramo del circuito risulterà sempre in qualsiasi istante così espresso:

8.12-1 $$i = i_p + i_{tr} ,$$

ove però il termine i_{tr} è destinato ad annullarsi praticamente dopo un tempo più o meno breve, appunto perché transitorio.

A tale proposito si precisa che l'espressione di i_p, essendo una corrente di regime permanente, è ricavabile con i soliti mezzi visti a proposito dei circuiti e delle reti in regime permanente; mentre il termine i_{tr} rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale, ove però le *f.e.m.* esterne sono state poste eguali a zero [3]. D'altronde si dimostra che i_{tr} è sempre esprimibile con una o più funzioni esponenziali del tempo, cioè del tipo:

8.12-2 $$A\,\varepsilon^{at} ,$$

dove ε è la base dei logaritmi naturali ($\varepsilon = 2{,}718$); mentre A ed a sono costanti le cui espressioni in funzione delle caratteristiche del circuito si dovranno calcolare caso per caso.

Ricapitolando dunque, all' inizio del funzionamento di un circuito o di una rete elettrica, sottoposta più o meno bruscamente a nuove condizioni elettriche, nasceranno nelle tensioni e nelle correnti delle componenti transitorie (le quali però dopo qualche tempo si saranno praticamente estinte) e ciò allo scopo di permettere che il regime permanente, al quale il circuito tende portarsi necessariamente, possa in esso gradualmente instaurarsi; gradualmente, e non bruscamente, a causa della presenza di parametri dotati di *inerzia*, come sono le induttanze e le capacità. D'altronde ciascuna tensione e ciascuna corrente in questo periodo transitorio risulterà essere la somma di un termine permanente, il cui calcolo rientra nello studio dei circuiti in regime permanente, con un termine transitorio costituito da una o più funzioni esponenziali, per il cui calcolo si rende necessario risolvere le relative equazioni differenziali del circuito assegnato.

Data quindi la grande importanza della funzione esponenziale, si ritiene utile chiudere questo paragrafo richiamando le caratteristiche principali di una delle funzioni esponenziali più semplici, ma pur tuttavia molto importante ai nostri scopi, precisamente quella con esponente reale e negativo. Si tratta dunque della funzione del tempo:

8.12-3 $$y = A\,\varepsilon^{-at} ;$$

naturalmente la costante a si intende positiva, essendo ora il segno meno

---

[3] Per questo motivo la corrente i_{tr} può essere riguardata come la corrente nel circuito *libero*, preventivamente però *caricato* dal punto di vista energetico.

messo in evidenza. A tale scopo, è stato riportato in fig. 8.12-1 il suo andamento grafico; mentre in fig. 8.12-2 appare il diagramma della funzione $y = A\ (1 - \varepsilon^{-at})$. Si può così vedere subito, ad esempio, come entrambe le curve siano asintotiche per $t \to \infty$.

Si noti ancora che il segmento staccato sulla retta orizzontale (asintoto) dalla tangente nell'origine delle due curve vale $1/a$. Pertanto, più grande risulta numericamente il valore del coefficiente a, più ripidamente a curva raggiungerà il suo valore finale.

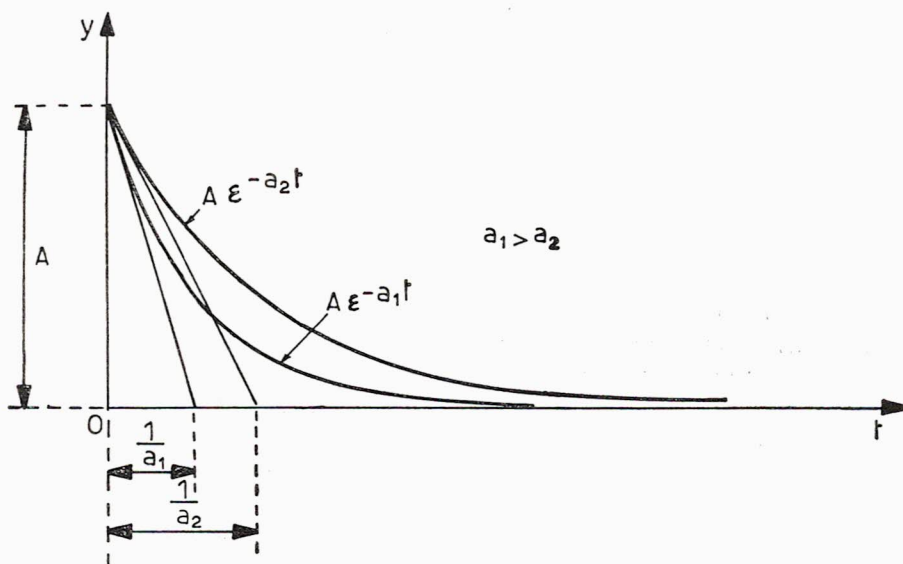



Fig. 8.12-1

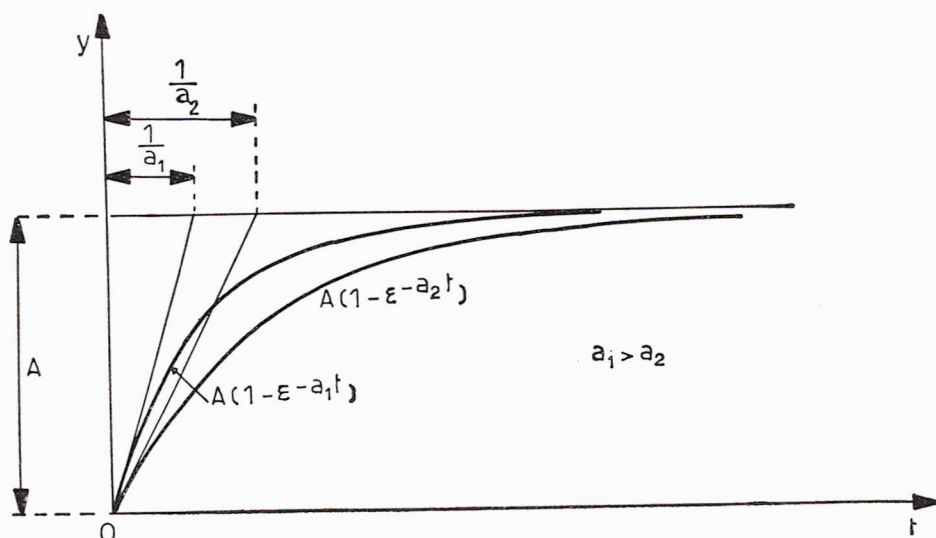



Fig. 8.12-2

Nella tabella 8.12 sono stati riportati i valori principali di queste due funzioni nel caso in cui $A = 1$.

TABELLA 8.12

at	ε^{-at}	$1 - \varepsilon^{-at}$
0	1,000	0,000
0,01	0,990	0,010
0,10	0,905	0,095
0,20	0,819	0,181
0,30	0,741	0,259
0,40	0,670	0,330
0,50	0,606	0,394
0,60	0,549	0,451
0,70	0,497	0,503
0,80	0,449	0,551
0,90	0,406	0,594
1,00	0,368	0,632
1,20	0,301	0,699
1,40	0,246	0,754
1,60	0,202	0,798
1,80	0,165	0,835
2,0	0,135	0,865
2,5	0,0821	0,918
3,0	0,0498	0,950
3,5	0,0302	0,967
4,0	0,0183	0,982
4,5	0,0111	0,989
5,0	0,00674	0,993
6,0	0,00248	0,997
7,0	0,00091	0,999
10,0	0,00004	0,9999

8.2 Transitorio nei circuiti *R-L* serie

8.21 Per brusca applicazione di una *f. e. m.* costante

La *f.e.m.* costante agisce, da un certo momento in poi, su di un circuito costituito, si veda la fig. 8.21-1, da una resistenza R avente in serie un'induttanza L. Ciò avviene tramite un commutatore, inizialmente aperto (posizione 0), il quale ad un certo istante ($t = 0$) passa in posizione 1, rimanendovi poi un tempo sufficientemente lungo, cosicché il circuito viene bruscamente a trovarsi sottoposto (dall' istante $t = 0$

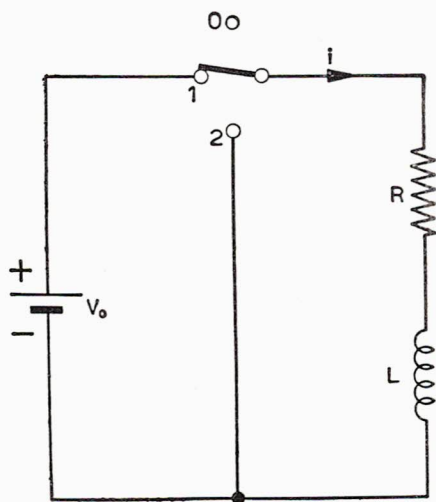



Fig. 8.21-1

in poi) all'azione della tensione V_0 [1]. Con V_0 s' intende la forza elettromotrice costante del generatore ideale di tensione agente nel circuito. Si noti che tutte le resistenze del circuito sono conglobate, per semplicità, nella resistenza R in serie all' induttanza L.

La corrente i, che incomincerà a fluire nel circuito sotto l'azione della tensione V_0, soddisferà d'altronde istante per istante l'equazione che discende dalla legge di Ohm ai valori istantanei relativa al circuito assegnato, cioè:

8.21-1
$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_0 .$$

Questa è un'equazione (differenziale, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea, del primo ordine) la cui soluzione risulta data dalla seguente espressione:

8.21-2
$$i = i_p + i_{tr} = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} ,$$

---

[1] L'andamento in funzione del tempo della tensione che viene ad agire sul circuito è dunque come quello riportato nella fig. 8.21-1'. Trattasi di una tensione non periodica, cosiddetta a *gradino*.

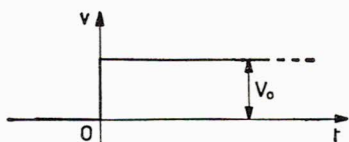



Fig. 8.21-1'

dove $i_p = \dfrac{V_0}{R}$ è la ben nota soluzione del circuito a corrente continua. La 8.21-2 può naturalmente essere scritta in forma più raccolta, precisamente come segue:

8.21-3 $$i = \frac{V_0}{R}\,(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}).$$

È importante notare che al termine L/R, che divide la variabile t della funzione esponenziale e le cui dimensioni fisiche sono quindi quelle di un tempo, poiché l'esponente $\dfrac{R}{L}t$ deve essere adimensionale [2], cioè un numero, viene dato il nome di *costante di tempo* del circuito. Questa viene indicata col simbolo τ e risulta dunque misurata in secondi (o nei sottomultipli: millisecondi e microsecondi).

È così ora possibile riportare in un grafico, si veda la fig. 8.21-2,

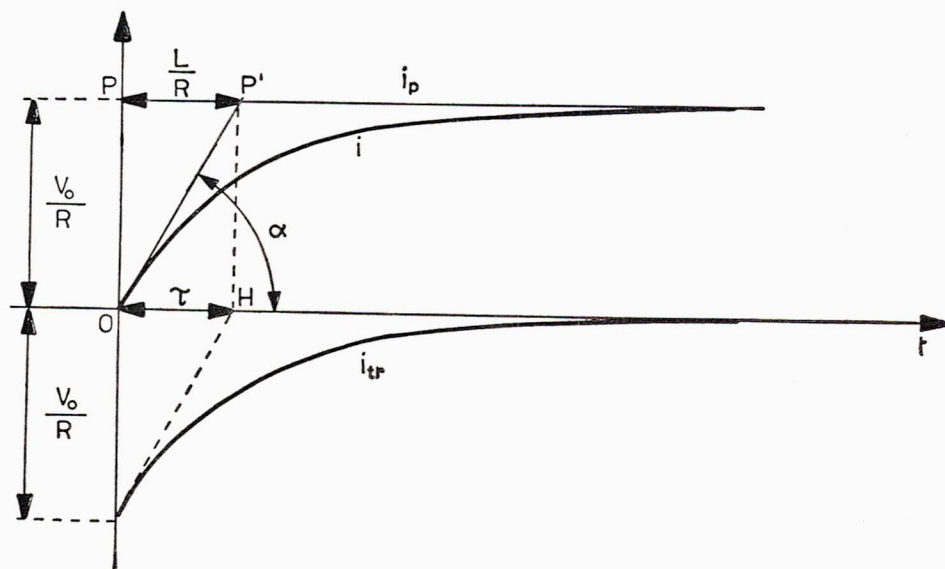



Fig. 8.21-2

l'andamento di i_p, i_{tr}, i. Da questo grafico, ma del resto anche dalla formula 8.21-3, si può notare come la corrente i, cioè la corrente che fluisce attraverso il circuito R-L, sia nulla all'istante $t = 0$, il che è comprensibile poiché la corrente era precedentemente all'istante $t = 0$

---

[2] Il termine $\dfrac{R}{L}$ corrisponde alla costante a della funzione esponenziale data in 8.12-3; pertanto il termine $\dfrac{L}{R}$ corrisponde ad $\dfrac{1}{a}$.

nulla (commutatore in posizione di aperto) e non può d'altronde balzare all' istante di chiusura del commutatore ad un valore finito per la presenza dell' induttanza. Solo dopo l' istante $t = 0$ la corrente i andrà gradatamente crescendo con legge esponenziale, per raggiungere alla fine il valore di regime V_0/R.

Si noti che, teoricamente, questo valore viene raggiunto dopo un tempo infinito, poiché la curva esponenziale che rappresenta la corrente i è asintotica alla retta che rappresenta il valore di regime V_0/R, praticamente invece dopo quel certo tempo necessario affinché la corrente transitoria si possa ridurre ad un valore così piccolo da risultare ormai trascurabile. Ad esempio, assumendo come valore residuo 1/150 del valore iniziale, questo tempo vale circa $5 \frac{L}{R}$ (3), cioè cinque volte la costante di tempo caratteristica del circuito. È come dire cioè che, dopo un tempo pari a cinque volte la costante di tempo, nel circuito dato la corrente i ha praticamente raggiunto, a meno dell'1 % (1/150 è inferiore infatti all'1 %), il valore di regime (4). Da ciò scende l' importante conseguenza che *praticamente il transitorio ha la durata di circa cinque volte la costante di tempo.*

Sempre dal grafico di fig. 8.21-2 è possibile osservare ancora come la tangente nell'origine (punto O) alla curva rappresentante la corrente i sia la più inclinata rispetto alle tangenti condotte in altri punti della stessa curva: ciò è necessario, poiché all' istante $t = 0$ (punto O) alla tensione V_0, applicata al circuito bruscamente tramite il commutatore, può fare equilibrio solamente la *f.e.m.* di autoinduzione $\left(L \frac{di}{dt}\right)$, la quale quindi assumerà il suo massimo valore (perciò anche $\frac{di}{dt}$ sarà massimo). Infatti in tale istante la caduta di tensione nella resistenza è nulla ($Ri = 0$) e l'equazione 8.21-1 si riduce a $L \frac{di}{dt} = V_0$.

Si osservi d'altronde come la tangente nell'origine intersechi sulla retta orizzontale di ordinata V_0/R un segmento PP' del valore $\tau = \frac{L}{R}$ (5),

---

(3) Sostituendo infatti nella funzione $i_{tr} = -\frac{V_0}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$, al posto di t, il valore $5 \frac{L}{R}$ si ottiene:

$$i_{tr} = -\frac{V_0}{R} \varepsilon^{-5} = -0{,}0067 \frac{V_0}{R} = -\frac{1}{150} \frac{V_0}{R}.$$

(4) Si osservi che, dopo un tempo pari a sette volte la costante di tempo, la corrente i raggiunge il valore di regime a meno dello 0,1 %.

(5) Infatti, si veda la fig. 8.21-2, $OH = \frac{HP'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{V_0}{R}}{\frac{V_0}{L}} = \frac{L}{R}$ (si ricordi che qui $\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{L}$).

cioè appunto eguale alla costante di tempo. Ciò permette di interpretare a costante di tempo come quell' intervallo di tempo che sarebbe necessario alla corrente per raggiungere il valore di regime se questa continuasse a salire con incremento costante eguale a quello iniziale. La corrente invece, col trascorrere del tempo, incrementa sempre meno, scostandosi quindi sempre più dalla sua tangente all'origine. Anzi, trascorso un tempo corrispondente alla costante di tempo, la corrente ha assunto solamente un valore pari al 63,2 % del valore finale, cioè di regime (infatti $1 - \varepsilon^{-t/\tau} = 1 - \varepsilon^{-1} = 0{,}632$, per $t = \tau$).

La conoscenza del valore numerico assunto dalla costante di tempo è dunque importante. Naturalmente un circuito più è induttivo e più alto sarà il valore del rapporto L/R, quindi più elevato risulterà il valore della costante di tempo. Nel grafico di fig. 8.21-3 sono state riportate le curve

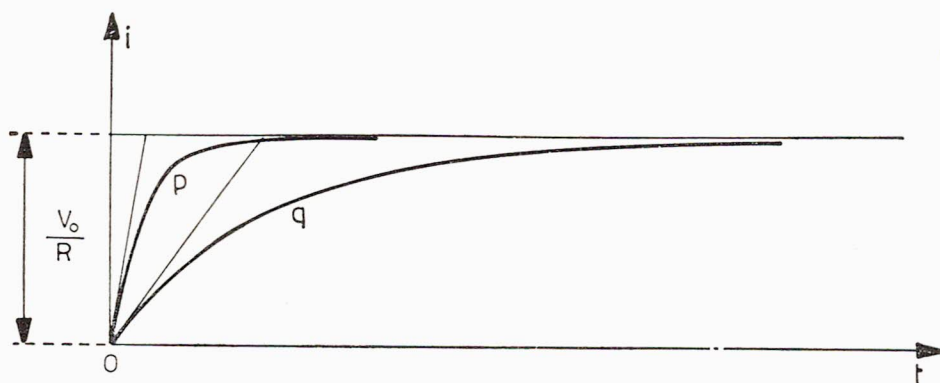



Fig. 8.21-3

relative a due circuiti induttivi differenti, ma che hanno la stessa corrente di regime. È chiaro che il circuito cui dà luogo la curva p sarà meno induttivo del circuito la cui curva caratteristica è contrassegnata con q. Ovviamente in un circuito che presentasse $L = \infty$ la corrente non potrebbe mai raggiungere il valore di regime V_0/R : la costante di tempo infatti in questo caso risulta di valore infinito.

8.22 Per brusca soppressione della *f. e. m.* costante

Con riferimento al circuito di fig. 8.21-1, si consideri di portare bruscamente il commutatore dalla posizione 1 a quella 2, dopo però che nel circuito la corrente si è portata al valore di regime V_0/R. Con questa manovra viene soppressa dunque bruscamente nel circuito la *f.e.m.* costante V_0, pur restando il circuito sempre chiuso.

La corrente i, che continuerà per l' *inerzia* dell' induttanza a fluire nel circuito (fig. 8.22-1*b*), soddisferà la seguente equazione che discende dalla legge di Ohm per i valori istantanei :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \text{ (1)}, \tag{8.22-1}$$

la cui soluzione è costituita dal solo termine transitorio, poiché ovviamente $i_p = 0$. A regime, la corrente è infatti ora nulla, dato che il circuito si trova privo della *f.e.m.* impressa dall'esterno. Sarà perciò:

$$i = i_{tr} = \frac{V_0}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}. \tag{8.22-2}$$

Il tempo t ha naturalmente qui inizio nell' istante in cui il commutatore passa dalla posizione 1 a quella 2 ($t = 0$).

Nel grafico di fig. 8.22-1 si è riportato l'andamento di questa cor-

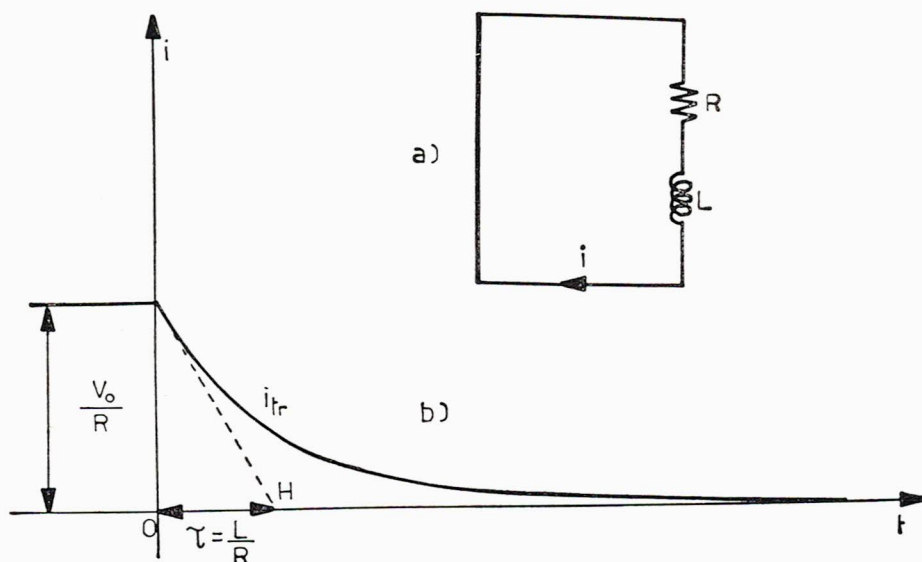



Fig. 8.22-1

rente che, come si vede, risulta del tipo esponenziale decrescente. Si noti (equazione 8.22-2) che il fenomeno transitorio è retto ancora, naturalmente, dalla stessa costante di tempo $\tau = L/R$, poiché i componenti il circuito passivo (cioè quello libero) sono rimasti gli stessi. Così la tangente nell'origine alla curva interseca ancora sull'asse dei tempi un segmento OH pari alla costante di tempo $\tau = L/R$.

La conclusione è che la corrente in un circuito induttivo non può annullarsi di colpo: l'energia elettromagnetica posseduta dall' indut-

---

(1) Naturalmente è l'equazione 8.21-1 con $V_0 = 0$, poiché il circuito passivo rimane sempre lo stesso.

tanza ($w = \frac{1}{2} Li^2$) non può essere infatti ridotta a zero istantaneamente ma solo gradatamente [2]. Per questo motivo, la corrente decrescera con la solita legge esponenziale, tendendo asintoticamente a zero, teoricamente annullandosi così dopo un tempo infinito. Ma dalla 8.22-2 si deduce che la corrente nel circuito si sarà ridotta a meno dell' 1 % del valore iniziale (V_0/R) dopo un tempo eguale a cinque volte la costante di tempo del circuito, per cui si potrà ancora affermare che il transitorio larà esaurito praticamente dopo un tempo non inferiore a cinque volte sa costante di tempo.

Ci si può chiedere da ultimo che cosa succederebbe se, durante il passaggio dalla posizione 1 a quella 2, il commutatore (fig. 8.21-1) si fermasse in posizione intermedia, sì da lasciare aperto il circuito. In realtà il circuito non rimane aperto, poiché un violento arco elettrico, scoccando fra la parte fissa e quella mobile del commutatore, determina immediatamente la chiusura del circuito stesso. L'arco elettrico è conseguenza dunque del fatto che la corrente in un circuito induttivo non può estinguersi mai in un tempo nullo. Si veda a tale scopo l'esercizio 8.253.

8.23 Per brusca applicazione e quindi successiva brusca soppressione di una *f. e. m.* costante

Si consideri sempre il circuito di fig. 8.21-1 nel quale però il commutatore passa, periodicamente e bruscamente dalla posizione 1 a quella 2, quindi dalla posizione 2 a quella 1, e così via, rimanendo sempre un certo intervallo di tempo in ciascuna posizione. Ciò equivale ad applicare al circuito R-L assegnato una *f.e.m.* il cui andamento nel tempo risulta come quello rappresentato in fig. 8.23-1, dove con T' si è indicato l' intervallo di tempo durante il quale il commutatore sta nella posizione 1, con T'' il successivo intervallo di tempo in cui il commutatore sta in posizione 2. Per considerare il caso generale si supponga $T' \neq T''$.

Ora tre sono i casi fondamentali cui può dar luogo l'applicazione di una tensione, come quella di fig. 8.23-1, al circuito dato, di costante di tempo $\tau = L/R$.

1) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la condizione:

8.23-1 $$T' \geq 5\,\tau \,, \quad T'' \geq 5\,\tau \,.$$

In questo caso, si veda il diagramma di fig. 8.23-2, all' istante t_1 la corrente nel circuito R-L avrà certamente raggiunto il valore V_0/R

---

(2) Risulta chiaro che tale energia viene dissipata dalla resistenza del circuito (sotto forma di calore), poiché questo è sede di corrente ($w = Ri^2t$).

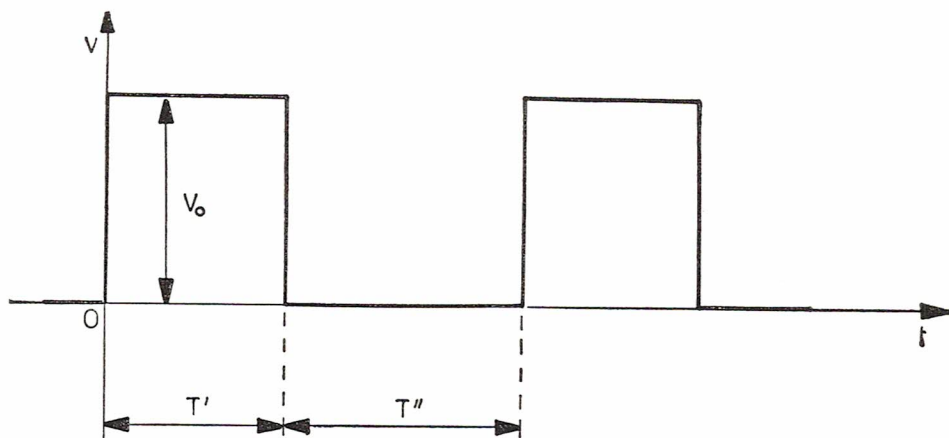



Fig. 8.23-1

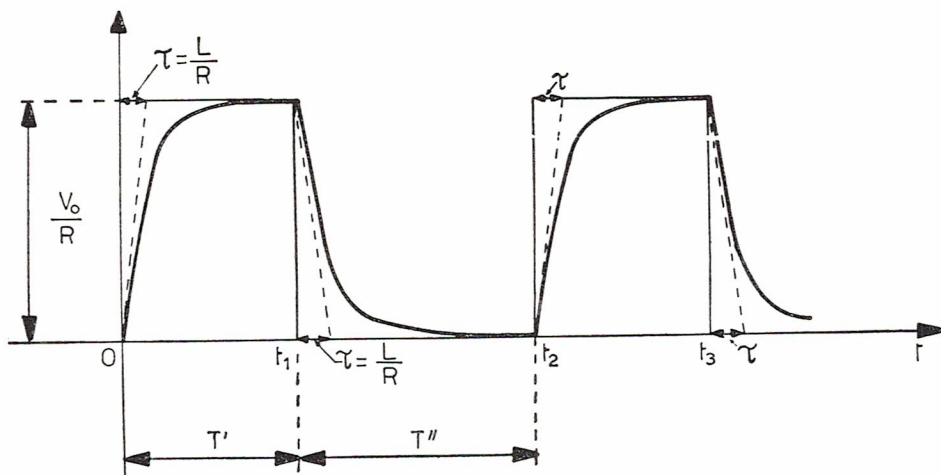



Fig. 8.23-2

(poiché $T' \geq 5\,\tau$) per cui, nel successivo intervallo di tempo $t_1 \div t_2$, la corrente si troverà a partire da questo valore V_0/R (come se il circuito fosse in regime di corrente continua) per raggiungere quindi il valore zero (poiché $T'' \geq 5\,\tau$). In sostanza, la corrente viene a presentare una successione di transitori identici a quelli studiati nei §§ 8.21 e 22.

2) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la seguente condizione:

8.23-2 $$T' < 5\,\tau\ ,\ T'' \geq 5\,\tau\,.$$

In questo caso, all' istante t_1, la corrente non ha raggiunto il valore

V_0/R, poiché $T' < 5\tau$ (in fig. 8.23-3 si è posto $T' = 1{,}25\ \tau$). Si tratta di trovare perciò come la corrente decresce nell' intervallo successivo T'' $(t_1 \div t_2)$.

È chiaro che essa varierà ancora secondo una curva esponenziale decrescente e, se l'origine di questa curva viene posta nel punto O'

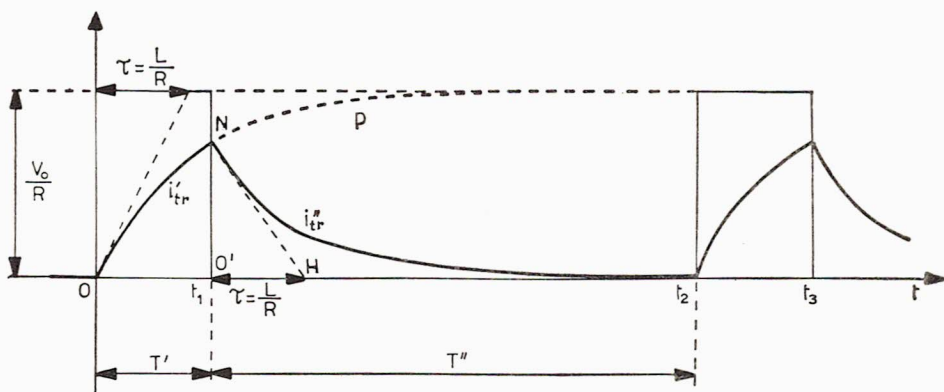



Fig. 8.23-3

(fig. 8.23-3), la sua espressione analitica risulterà la seguente:

8.23-3
$$i''_{tr} = \frac{V_0}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}T'}\right)\varepsilon^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

valida naturalmente per $t \geq t_1$. La 8.23-3 rappresenta dunque un'esponenziale decrescente tale da avere all' istante t_1 lo stesso valore che, per lo stesso istante t_1, presenta la curva esponenziale caratteristica del precedente intervallo di tempo (curva p di fig. 8.23-3). Si noti che il segmento $O'H$ vale ancora la costante di tempo τ del circuito. In sostanza, la corrente i''_{tr} parte dal punto N con la solita legge esponenziale decrescente. L' unica differenza rispetto al caso precedente è che essa incomincia con un valore più basso $(O'N)$.

D'altronde, essendo $T'' \geq 5\tau$, il fenomeno nell' intervallo di tempo $t_1 \div t_2$ terminerà con corrente nulla, per cui nel successivo intervallo $t_2 \div t_3$ il funzionamento riprenderà nel modo solito.

3) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la seguente condizione:

8.23-4
$$T' < 5\ \tau\ ,\ T'' < 5\ \tau\ .$$

In questo caso, la corrente non avrà raggiunto né il valore V_0/R all' istante t_1, poiché $T' < 5\ \tau$, né, all' istante t_2, il valore zero, non avendo

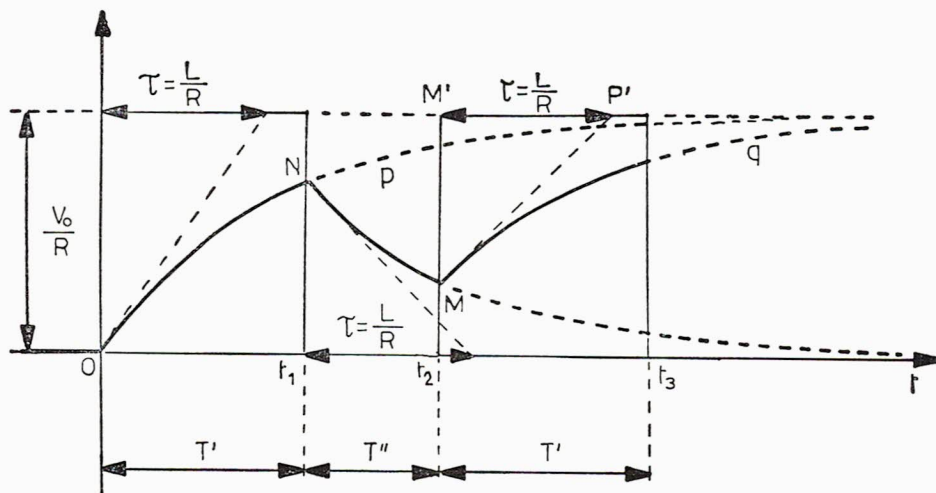



Fig. 8.23-4

avuto il tempo di annullarsi, poiché $T'' < 5\,\tau$ (in fig. 8.23-4 è stato scelto $T' = 1{,}25\,\tau$ e $T'' = 0{,}8\,\tau$). Pertanto all' istante t_2 dovrà riprendere a crescere esponenzialmente, non partendo però più dal valore zero.

Infatti la corrente nel circuito, durante l' intervallo di tempo $t_2 \div t_3$, poiché esso viene a trovarsi di nuovo alimentato dalla tensione V_0 (commutatore in posizione 1), riprenderà a crescere (curva q di fig. 8.23-4) ed è intuitivo pensare che essa incrementerà ancora secondo una legge esponenziale. A tale proposito si può dimostrare effettivamente che il suo andamento è quello di una curva esponenziale crescente, con origine nel punto M (fig. 8.23-4). L'osservazione che la sua tangente in M stacca sulla retta orizzontale V_0/R un segmento $M'\,P'$ eguale alla costante di tempo τ del circuito facilita la costruzione grafica del tratto di curva cercato.

8.24 Per brusca applicazione di una *f. e. m.* sinusoidale

Si supponga che il circuito R-L serie di fig. 8.24-1, inizialmente aperto, venga chiuso ad un certo istante ($t = 0$), tramite un interruttore, su di un generatore ideale di tensione sinusoidale, la cui *f.e.m.* abbia la seguente espressione:

8.24-1 $$e = E_M \operatorname{sen}(\omega t + \xi)\ .$$

Allora, dall' istante in cui sul circuito viene ad agire questa tensione, incomincerà a circolare una corrente i la cui espressione analitica altro non è che la soluzione della seguente equazione (legge di Ohm):

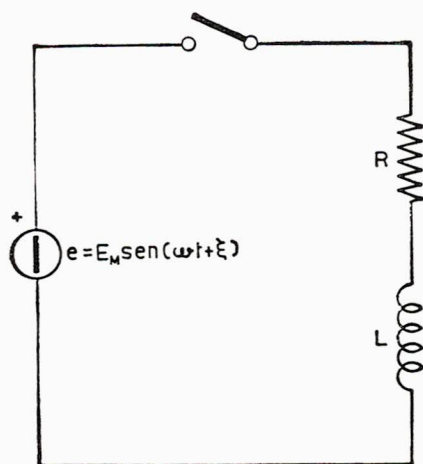



Fig. 8.24-1

8.24-2 $$L \frac{di}{dt} + Ri = E_M \text{sen}(\omega t + \xi) \,,$$

la quale soluzione risulterà costituita, come sempre, da due termini, precisamente quello permanente (vedi anche formula 5.53-4 del capitolo 5); qui naturalmente $1/\omega C = 0$):

8.24-3 $$i_p = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{sen}(\omega t + \psi) \,,$$

dove:

8.24-4 $$\psi = \xi - \varphi \,, \qquad \varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L}{R} \,,$$

e quello transitorio:

8.24-5 $$i_{tr} = - \frac{E_M \text{sen} \psi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \,.$$

Pertanto la corrente i nel circuito, risultando la somma dei due termini ora riportati, avrà la seguente espressione:

8.24-6 $$i = i_p + i_{tr} = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\text{sen}(\omega t + \psi) - \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \text{sen}\, \psi] \,.$$

Essa è dunque la composizione di una grandezza periodica (i_p) con una aperiodica (i_{tr}).

Nella fig. 8.24-2 si sono riportati i tre termini i_p, i_{tr}, i, dei quali quello i_p riferito alla tensione sinusoidale di alimentazione.

Osservando l'espressione analitica del termine transitorio i_{tr}, si deduce che questo è del solito tipo esponenziale decrescente ($i_{tr} = A\,\varepsilon^{-at}$), che il valore iniziale ($A = -\dfrac{E_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\,\text{sen}\,\psi$) è funzione dell'angolo ψ e che lo smorzamento dipende dal valore assunto dal termine L/R, il quale rappresenta ancora la costante di tempo τ del circuito. Il fatto però che il valore iniziale (A) dipenda dall'angolo ψ (precisamente dal seno di quest'angolo), il quale a sua volta dipende dal valore di ξ (istante di chiusura dell' interruttore) e di φ (caratteristiche del circuito passivo), ci mostra come vi sia un caso in cui il termine transitorio possa man-

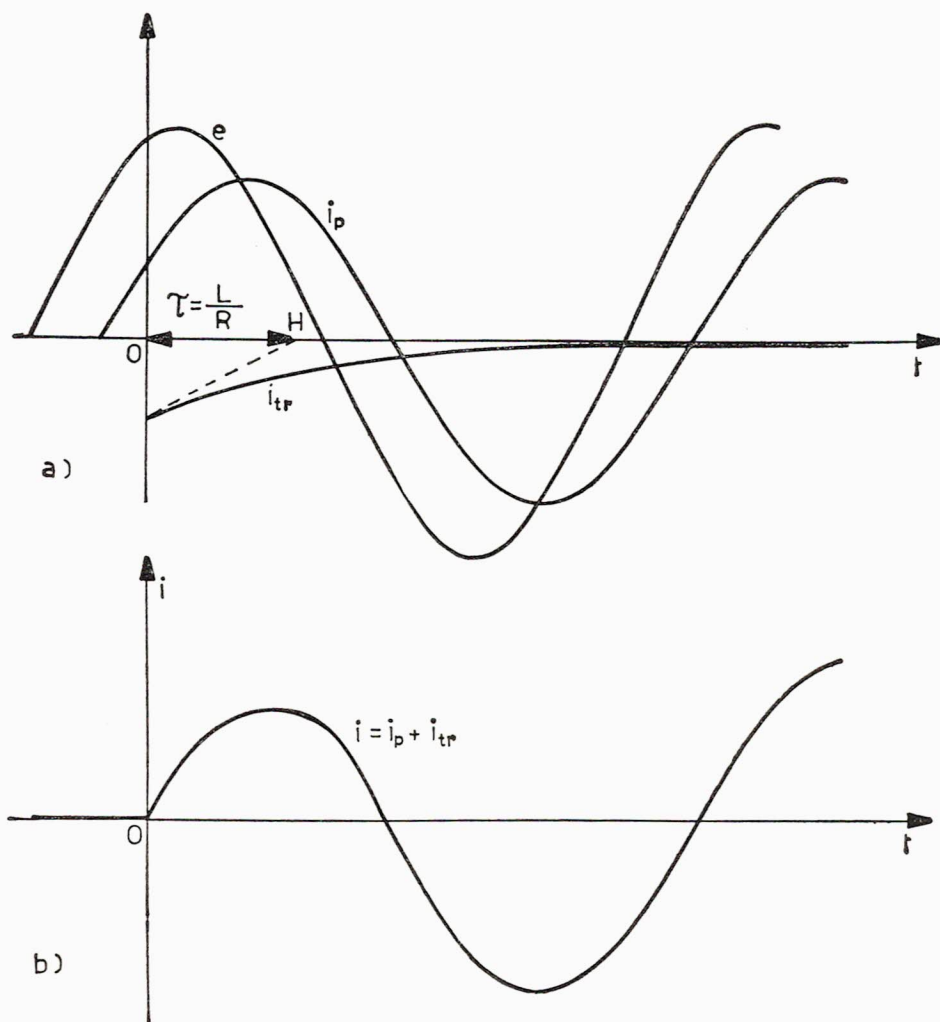



Fig. 8.24-2

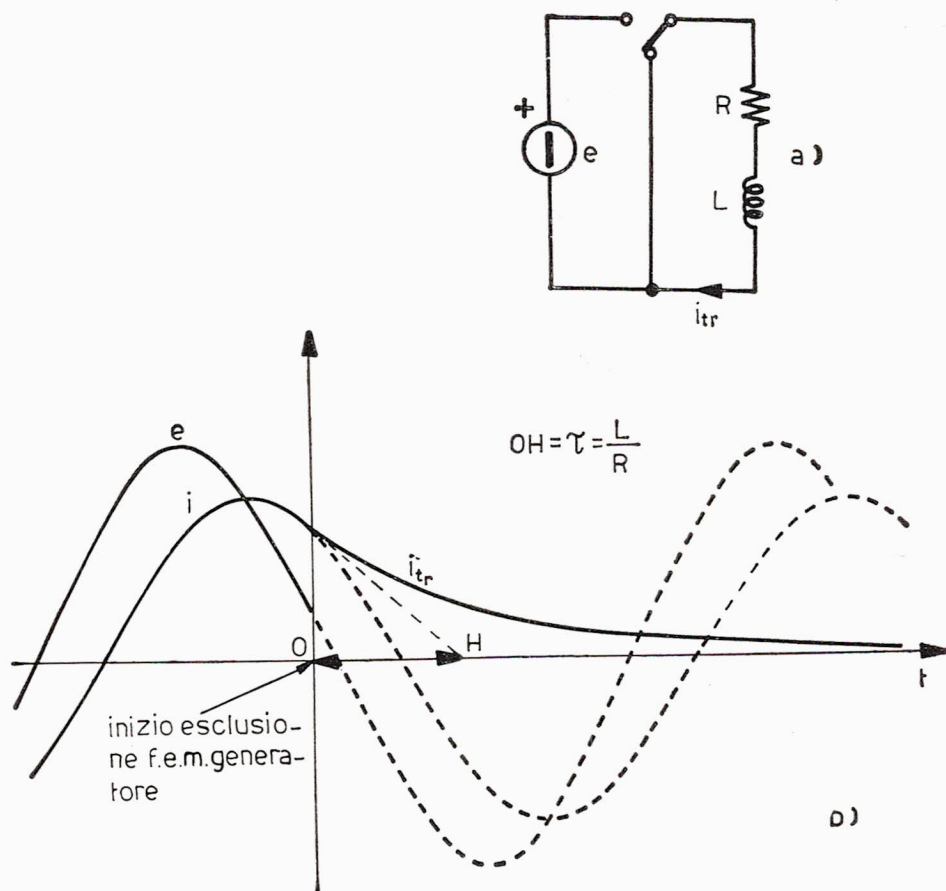



Fig. 8.24-3

care : ciò avverrà precisamente quando $\psi = 0$, cioè se $\xi = \varphi$; oppure invece possa essere massimo, il che avverrà quando $\psi = \pi/2$, cioè se $\xi = \varphi + \pi/2$. In generale le condizioni saranno intermedie a queste.

Concludendo, anche nel caso del circuito induttivo alimentato con tensione sinusoidale, la presenza dell' induttanza impedisce che nello istante iniziale di funzionamento la corrente possa assumere un valore differente da zero e quindi possa assumere quello che corrisponderebbe in quell' istante al regime permanente. Affinché la corrente possa portarsi gradatamente in questa condizione, dovrà nascere nel circuito, per sovrapporsi a quella permanente, una corrente transitoria. Essa (8.24-5) è d'altra parte di tipo esponenziale decrescente (grandezza aperiodica), per cui, dopo un tempo pari a cinque volte la costante di tempo, si sarà ridotta a meno dell'1 % del suo valore iniziale e quindi tale da risultare ormai del tutto trascurabile.

Si noti d'altronde che quando nel circuito, una volta raggiunto il regime, venga soppressa la *f.e.m.* del generatore allora si ricade nel caso

descritto al § 8.22. Infatti il transitorio che prende origine è caratterizzato da una corrente la quale decresce esponenzialmente e parte da quel valore che la corrente presenta all' istante della soppressione della *f.e.m.* del generatore. Il diagramma di fig. 8.24-3*b* illustra appunto questa situazione.

8.25 Problemi di applicazione al § 8.2

Esercizio 8.251

Si trovi l'andamento nel tempo della corrente i circolante nel bipolo induttivo facente parte del circuito di fig. 8.251-1, sapendo che inizialmente il commutatore è in posizione 1, che esso passa quindi bruscamente in posizione 2 ove rimane per 60 μ sec, quindi in posizione 3 nella quale resta per un tempo molto grande.

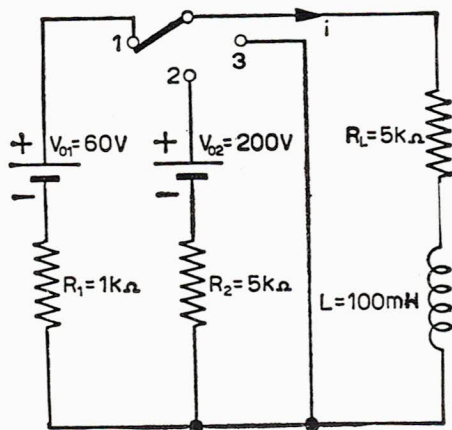



Fig. 8.251-1

Soluzione

Col commutatore in posizione 1 il circuito è in regime permanente; nel bipolo circola pertanto una corrente del valore:

$$I_1 = \frac{V_{01}}{R_1 + R_L} = \frac{60}{(1+5)\,10^3} = 10 \text{ mA}.$$

Ad un certo istante ($t = 0$) il commutatore passa però bruscamente in posizione 2. In tale condizione il circuito presenta una costante di tempo:

$$\tau_2 = \frac{L}{R_L + R_2} = \frac{10^{-1}}{(5+5)\,10^3} = 10 \ \mu \text{ sec},$$

ed una corrente di regime permanente del valore:

$$I_2 = \frac{V_{02}}{R_L + R_2} = \frac{200}{(5 + 5)\,10^3} = 20 \text{ mA},$$

alla quale si arriverà con la legge esponenziale crescente (curva p di fig. 8.251-2).

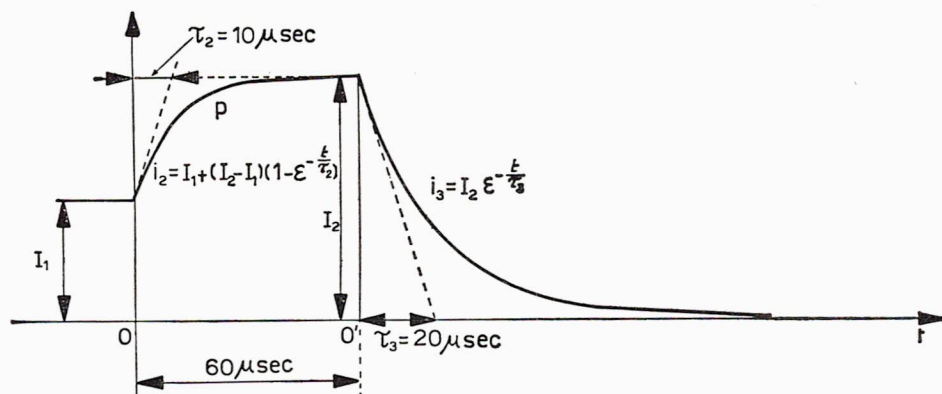



Fig. 8.251-2

Poiché il commutatore permane in questa posizione per un tempo di 60 μsec, eguale quindi a sei volte la costante di tempo del circuito (10 μsec), si può affermare che la corrente nell'istante in cui il commutatore si porta in posizione 3 partirà certamente dal valore di regime I_2.

La corrente poi si annullerà con legge esponenziale decrescente, con costante di tempo eguale a:

$$\tau_3 = \frac{L}{R_L} = \frac{10^{-1}}{5 \cdot 10^3} = 20 \ \mu\text{sec}.$$

Si osservi l'andamento grafico riportato in fig. 8.251-2, nonché le relative espressioni analitiche delle due correnti in regime transitorio.

Esercizio 8.252

Si trovi l'andamento della corrente nel circuito di fig. 8.252-1 per il quale la chiusura dell'interruttore 2 avviene quattro millisecondi dopo la chiusura dell'interruttore 1, che rimane ancora in posizione di chiuso.

Soluzione

Inizialmente la corrente nel circuito (interruttori 1 e 2 aperti) vale $I = \dfrac{V_0}{R_L + R_1 + R_2} = 0{,}33$ A. Ma, all'istante $t = 0$, l'interruttore 1

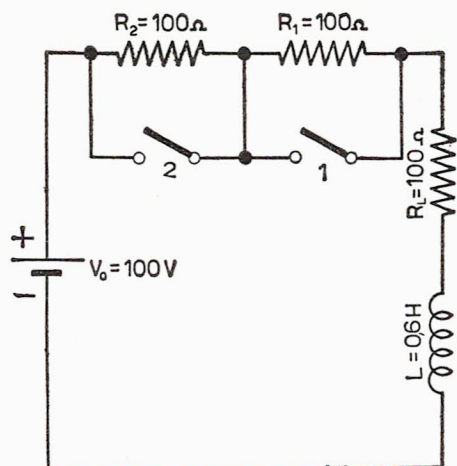



Fig. 8.252-1

si chiude mentre quello 2 rimane aperto: la corrente incomincerà perciò ad aumentare con legge esponenziale partendo dal valore $I = 0{,}33$ A e tendendo al valore $I_1 = \dfrac{V_0}{R_L + R_2} = 0{,}50$ A, con costante di tempo $\tau_1 = \dfrac{L}{R_L + R_2} = \dfrac{0{,}6}{200} = 3$ msec.

Senonché, dopo 4 millisecondi, si chiude anche l'interruttore 2 facendo sì che la corrente, la quale nel frattempo non ha potuto raggiungere il valore I_1, abbia ad aumentare e a tendere al nuovo valore di regime $I_2 = \dfrac{V_0}{R_L} = \dfrac{100}{100} = 1$ A con la nuova costante di tempo $\tau_2 = \dfrac{L}{R_L} = \dfrac{0{,}6}{100} = 6$ msec.

In definitiva, l'andamento della corrente i nel circuito in funzione del tempo, a partire dalla chiusura dell'interruttore 1, risulta perciò come quello riportato in fig. 8.252-2.

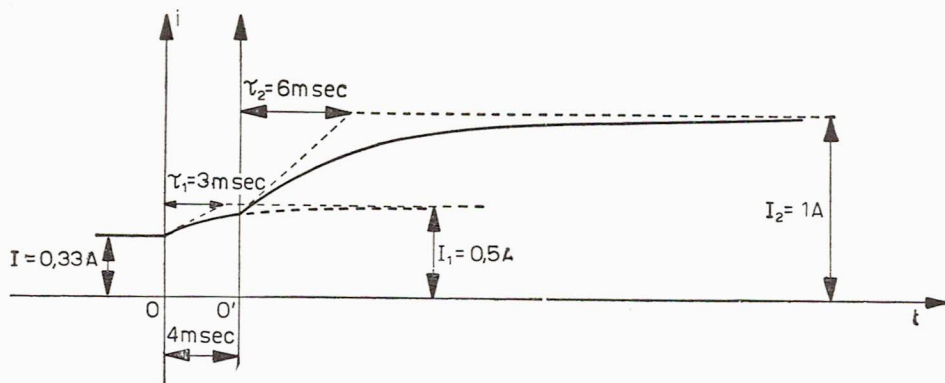



Fig. 8.252-2

Esercizio 8.253

Si trovi l'andamento della corrente nel circuito riportato in fig. 8.253-1 quando l' interruttore, inizialmente chiuso, si apre bruscamente.

Soluzione

Il problema può essere risolto solo qualitativamente, nonostante che il circuito sia noto in tutti i suoi parametri circuitali.

Si incominci anzitutto ad osservare come, all'atto dell'apertura dell' interruttore, la corrente del circuito $I = V_0/R_1 = 100$ mA, che cir-

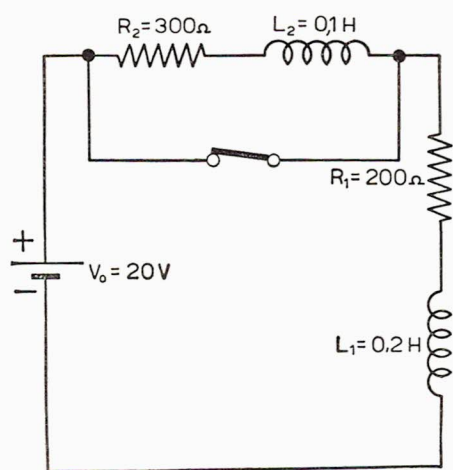
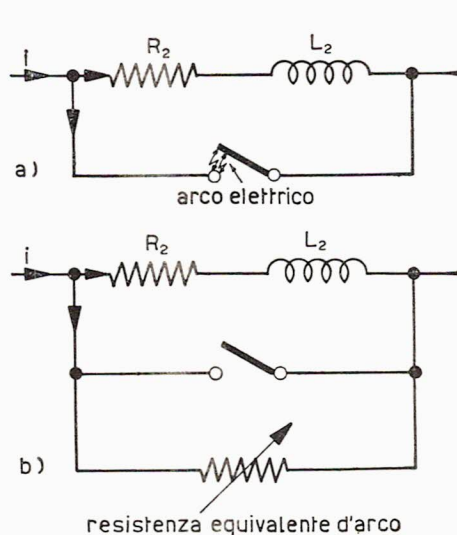



Fig. 8.253-1 *Fig. 8.253-2*

colava tutta attraverso l'interruttore quando questo era chiuso, dovrebbe transitare ora tutta per il tronco costituito da R_2 ed L_2, poiché l' interruttore si è aperto. Ciò però è impossibile, perché si tratterebbe per il tronco R_2, L_2 di passare bruscamente da un regime di corrente nulla (interruttore chiuso) a quello corrispondente al valore di 100 mA (interruttore aperto, nei primissimi istanti); d'altronde la corrente nel circuito a sua volta non si può annullare bruscamente poiché anch'esso è induttivo. Impostato così il problema, esso non si risolve.

In pratica le cose vanno diversamente dato che all'atto dell'apertura dell' interruttore, si manifesta ai capi di questo una *f.e.m.* di autoinduzione, dovuta appunto alla presenza dell' induttanza L_2 e in quanto la corrente in essa tende a variare (precisamente a diminuire), che farà certamente scoccare l'arco elettrico fra la parte mobile e quella fissa dell' interruttore (vedi fig. 8.253-2*a*). È quest'arco che permette ancora il passaggio della corrente : esso d'altra parte si spegnerà solamente quando

il valore della corrente nel tronco inserito (R_2, L_2) sarà diventato eguale a quello della corrente circolante nel resto del circuito.

Lo studio del transitorio dovrà essere condotto dunque tenendo conto di quest'arco elettrico che si manifesta ai capi dell' interruttore; ciò verrà fatto circuitalmente sostituendo l'arco con una resistenza in parallelo ai morsetti dell' interruttore stesso, il quale potrà allora essere considerato aperto (vedi fig. 8.253-2*b*). Questa resistenza (equivalente d'arco) è però di valore variabile, crescendo ovviamente col trascorrere del tempo poiché l'arco va verso lo spegnimento: ciò costringe appunto a far passare la corrente del circuito sempre più attraverso il tronco R_2, L_2.

L'arco si spegnerà quando la corrente attraverso il suddetto tronco avrà raggiunto il valore della corrente che attraversa il circuito, la quale naturalmente durante questo transitorio va diminuendo, poiché dal valore iniziale $I = 100$ mA deve arrivare al valore finale $I' = \dfrac{V_0}{R_1 + R_2} = \dfrac{20}{200 + 300} = 40$ mA .

Si noti che quest'esercizio, così come il precedente, rappresenta un esempio di transitorio dovuto non a brusca variazione di caratteristica degli elementi attivi (*f.e.m.*) ma a brusca variazione delle caratteristiche degli elementi passivi (resistenze, induttanze).

8.3 Transitorio nei circuiti *R*-*C* serie

8.31 Per brusca applicazione di una *f. e. m.* costante

Il commutatore del circuito di fig. 8.31-1 passa bruscamente, ad un certo istante ($t = 0$), dalla posizione 0 di aperto a quella 1, così da sottoporre il circuito *R*-*C* alla tensione costante V_0 del generatore presente nel circuito. Poiché la capacità C all' istante $t = 0$ si suppone scarica, si tratterà in sostanza di studiare la legge con cui avviene la carica di una capacità inserita in un circuito a tensione costante, cioè di studiare quel regime transitorio durante il quale la tensione ai capi della capacità C, che si carica attraverso la resistenza R, si porta dal valore iniziale nullo fino al valore finale V_0.

Naturalmente la corrente i del circuito, cioè la corrente di carica della capacità, risulterà come soluzione della seguente equazione integro-differenziale (legge di Ohm per il circuito di fig. 8.31-2*a*):

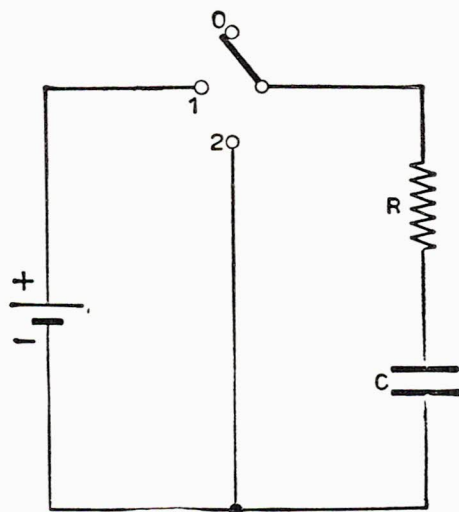



Fig. 8.31-1

8.31-1 $$Ri + \frac{1}{C}\int idt = V_0 ,$$

o, derivandola rispetto al tempo, anche di quest'altra equazione:

8.31-2 $$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}\, i = 0 .$$

D'altronde, la corrente permanente i_p è nulla, poiché in un circuito come quello in studio (fig. 8.31-2*a*) la corrente continua in regime permanente dovrebbe passare attraverso la capacità C: il che è impossibile. Per questo, la corrente i del circuito contiene solo il termine transitorio i_{tr} soluzione della 8.31-2, per il quale vale la seguente espressione:

8.31-3 $$i = i_{tr} = \frac{V_0}{R}\, \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t} .$$

La corrente di carica ha dunque andamento esponenziale decrescente, con costante di tempo uguale al prodotto RC (¹) (vedi fig. 8.31-2*b*), annullandosi teoricamente dopo un tempo infinito, praticamente riducendosi a meno dell'1 % dopo un tempo pari a cinque volte la costante di tempo RC.

Si noti che la costante di tempo $\tau = RC$ viene misurata in secondi, se R e C risultano espressi rispettivamente in ohm e in farad, e che il suo significato è del tutto analogo a quello visto per i circuiti induttivi.

(¹) Infatti RC corrisponde all'inverso della costante a dell'equazione 8.12-3.

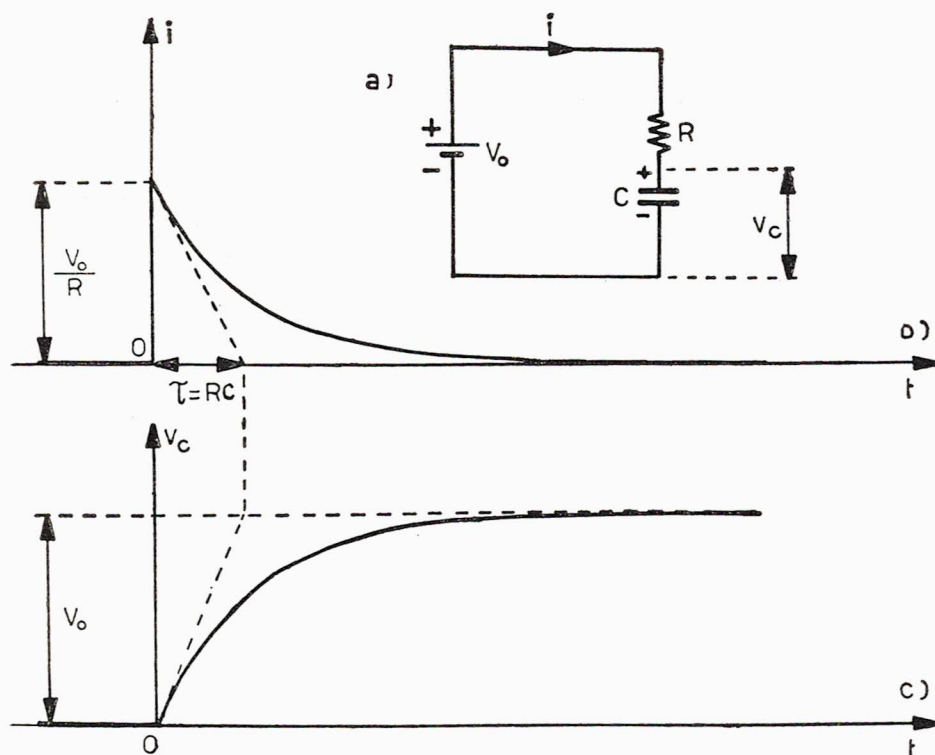



Fig. 8.31-2

Ma per molte applicazioni è necessario conoscere altresì l'andamento in funzione del tempo della *d.d.p.* v_c ai capi della capacità C stessa, la cui espressione analitica, si dimostra, è data dalla seguente formula (²):

8.31-4
$$v_c = V_0\left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}\right),$$

onde si deduce che la tensione v_c ubbidisce anch'essa ad una legge esponenziale, con costante di tempo ovviamente ancora eguale a RC (vedi fig. 8.31-2*c*).

Inizialmente dunque ($t = 0$) la tensione v_c è nulla, poiché la capacità è scarica e d'altra parte la tensione ai suoi capi non può variare bruscamente data la *inerzia* della capacità a caricarsi. D'altronde in quest' istante la tensione V_0 del generatore viene completamente bilanciata dalla caduta di tensione nella resistenza R causata dal *picco* presentato dalla corrente di carica.

(²) v_c è la soluzione dell'equazione differenziale $RC\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = V_0$, la quale deriva dalla 8.31-1 ove al posto di i è stata posta la sua espressione $i = C\frac{dv_c}{dt}$.

Poi gradatamente la *d.d.p.* fra le armature aumenta, poiché queste si caricano, secondo la legge data in 8.31-4, per raggiungere il valore della *f.e.m.* V_0 del generatore teoricamente dopo un tempo infinito, praticamente per differirne a meno dell'1% dopo un tempo eguale a cinque volte la costante di tempo.

Concludendo, un condensatore di capacità C, posto in un circuito di carica avente complessivamente resistenza R (dovuta questa allo stesso condensatore, ai collegamenti, alla resistenza interna del generatore, ecc.), avrà praticamente finito di caricarsi dopo un tempo pari a $5\,RC$.

8.32 Per brusca soppressione della *f. e. m.* costante

Se nel circuito di fig. 8.31-1 il commutatore passa bruscamente dalla posizione 1 a quella 2 si verrà ad avere che la capacità C, preventivamente caricatasi alla tensione V_0 del generatore quando il commutatore era in posizione 1, si troverà nella condizione di doversi scaricare sulla resistenza R (fig. 8.32-1*a*). In sostanza, è come se nel circuito studiato

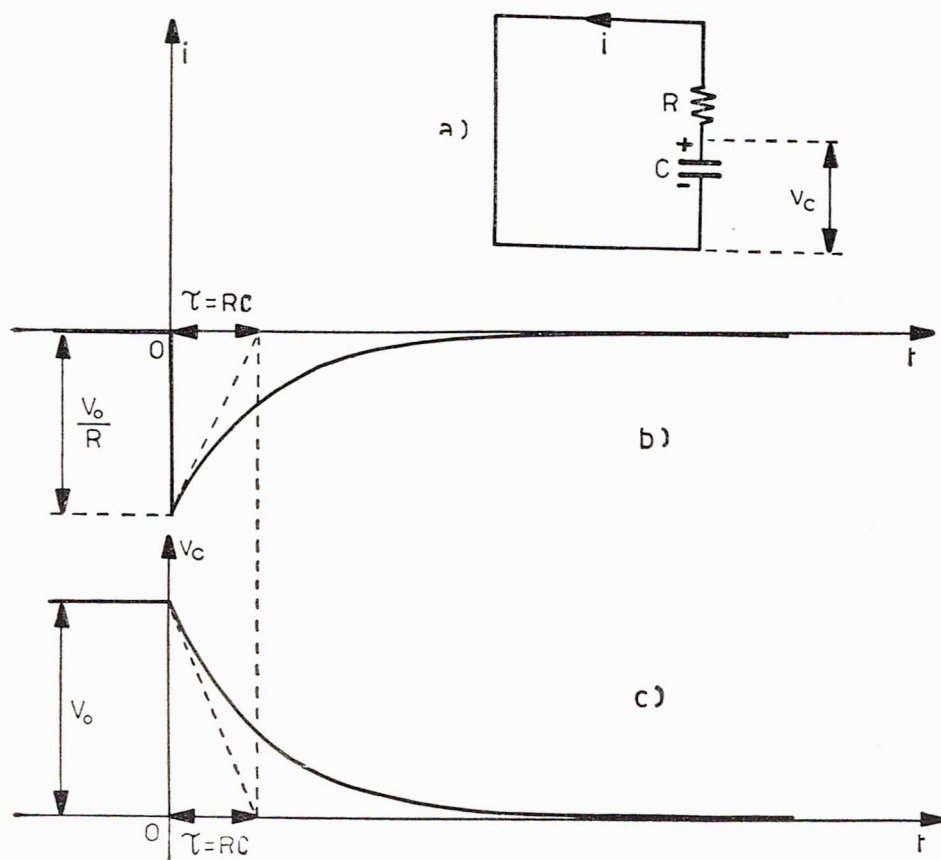



Fig. 8.32-1

nel precedente paragrafo venisse bruscamente soppressa la *f.e.m.* del generatore (rimanendo però il circuito sempre chiuso).

La corrente i che si instaura nel circuito, in questa fase di scarica della capacità, si otterrà come al solito risolvendo l'equazione che interpreta la legge di Ohm per il circuito dato e che nel nostro caso, poiché $V_0 = 0$, è la seguente:

8.32-1 $$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0 \;;$$

cioè, derivando rispetto al tempo, anche:

8.32-2 $$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}\,i = 0 \;.$$

È chiaro d'altronde che la corrente permanente i_p è nulla, per cui la corrente i coinciderà con il termine transitorio i_{tr}, il quale in questo caso risulta:

8.32-3 $$i = i_{tr} = -\frac{V_0}{R}\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t} \;.$$

La corrente di scarica di una capacità segue quindi una legge esponenziale decrescente (vedi fig. 8.32-1*b*), con costante di tempo eguale ad RC. Si noti che all'istante $t = 0$ la corrente balza bruscamente al valore $-V_0/R$: naturalmente questo picco iniziale nella corrente può essere notevole se V_0 è grande e se viceversa R risulta di piccolo valore (1). Il segno meno tien conto semplicemente del fatto che la corrente di scarica ha senso opposto rispetto a quella di carica. Confrontando poi la espressione 8.32-3 con quella data in 8.31-3 ci si accorge che, salvo il segno, le espressioni della corrente di carica e di scarica sono identiche (infatti sono soluzione della stessa equazione differenziale: 8.31-2 e 8.32-2).

Per quanto riguarda invece la tensione v_c ai capi della capacità in questa fase di scarica, si trova che essa ha la seguente espressione analitica (2):

8.32-4 $$v_c = V_0\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t},$$

---

(1) Questo caso lo si ha tutte le volte che si pone in cortocircuito un condensatore preventivamente caricato con tensione superiore a qualche decina di volt.

(2) v_c è la soluzione dell'equazione differenziale $RC\,\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$. Il termine permanente è nullo, mentre quello transitorio ha l'espressione riportata in 8.32-4.

per cui il suo andamento è quello di una curva esponenziale decrescente (vedi fig. 8.32-1*c*), con costante di tempo sempre eguale ad RC.

La capacità C sarà perciò scarica a meno dell'1 %, cioè la tensione ai suoi capi si sarà ridotta a meno dell'1 %, dopo un tempo non inferiore a cinque volte la costante di tempo. Tanto dura praticamente il periodo transitorio. E questo tempo è necessario perché si venga a dissipare nella resistenza R del circuito di scarica tutta l'energia elettrostatica che la capacità C teneva accumulata $\left(W_c = \frac{1}{2} C V_0^2\right)$. Poiché non è possibile dissipare una certa quantità finita di energia in un tempo nullo, è chiaro che il periodo transitorio di scarica di una capacità C non potrà mai essere di durata nulla, ma solamente tanto più piccola quanto minore risulterà il valore di R.

8.33 Per brusca applicazione e quindi successiva brusca soppressione di una *f. e. m.* costante

Si consideri ancora il circuito di fig. 8.31-1, nel quale però il commutatore passa bruscamente dalla posizione 1 a quella 2, quindi dalla posizione 2 a quella 1, e così via, rimanendo sempre un certo intervallo di tempo in ciascuna posizione: precisamente il tempo T' in posizione 1, T'' in posizione 2 [1].

Ciò, come è stato detto nel § 8.23, equivale ad applicare al circuito R-C assegnato una *f.e.m.* il cui andamento nel tempo rimane dunque quello riportato in fig. 8.23-1.

Si noti che la capacità C risulta inizialmente ($t = 0$) scarica.

Ora, anche per questo circuito, tre sono i casi interessanti che si possono presentare in pratica, precisamente:

1) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la condizione:

8.33-1 $$T' \geq 5\tau; \quad T'' \geq 5\,\tau .$$

In questo caso, si vedano i diagrammi di fig. 8.33-1, all'istante t_1 il condensatore avrà terminato di caricarsi alla tensione V_0 del generatore, per cui nell'intervallo di tempo successivo la tensione v_c del condensatore partirà appunto dal valore V_0, per annullarsi praticamente entro l'intervallo T'' stesso.

Si tratta quindi di un fenomeno costituito da una successione di transitori completi. Si noti come la corrente di carica e scarica sia costituita da una serie di guizzi positivi e negativi abbastanza stretti (per il fatto che $RC << T$).

---

[1] Questi intervalli di tempo possono essere eguali o diseguali fra di loro.

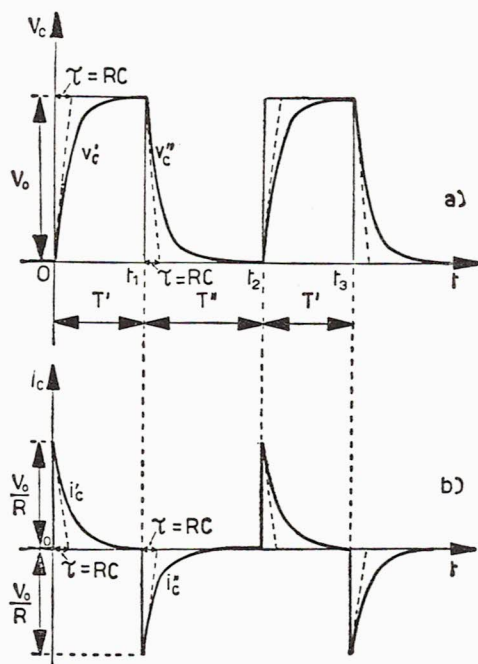



Fig. 8.33-1

2) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la seguente condizione:

8.33-2 $$T' < 5\,\tau \quad ; \qquad T'' \geq 5\,\tau \,.$$

In questo caso all'istante t_1, si vedano i diagrammi di fig. 8.33-2, la tensione ai capi della capacità C non ha avuto il tempo di raggiungere il valore V_0 della tensione agente nel circuito, per cui la capacità non risulterà caricata completamente, bensì solamente al valore:

8.33-3 $$V_{c_1} = V_0\,(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC}\,t_1})\,.$$

Nel successivo intervallo di tempo ($t_1 \div t_2$) la capacità C deve invece scaricarsi sulla resistenza R, partendo dal valore V_{c_1} dato in 8.33-3. Ciò avverrà con la solita legge esponenziale [2], con costante di tempo RC, come è stato indicato nel diagramma di fig. 8.33-2 (curva q).

Si noti che il guizzo negativo di corrente (cioè di scarica) presenta

---

[2] Se l'origine di tale curva viene posta nel punto O', essa ha per equazione la seguente espressione:

$$v_C'' = V_{C_1}\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}\,(t - t_1)}\,.$$

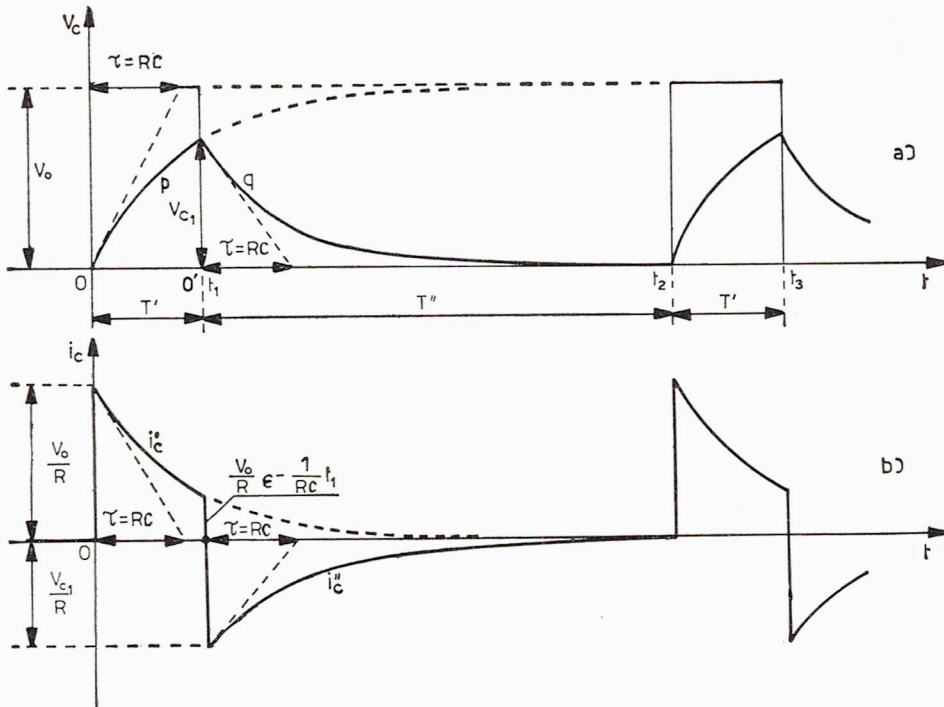



Fig. 8.33-2

un'ampiezza $\left(\frac{V_{c_1}}{R}\right)$ minore di quella $\left(\frac{V_0}{R}\right)$ del precedente guizzo positivo (cioè di carica), poiché ovviamente risulta $V_{c_1} < V_0$.

3) I valori degli intervalli di tempo T' e T'' sono tali da soddisfare la seguente condizione:

8.33-4 $$T' < 5\,\tau\,; \qquad T'' < 5\,\tau\,.$$

In questo caso, all' istante t_1 (vedi fig. 8.33-3) la capacità non avrà potuto portare a termine la carica, per cui nell' intervallo successivo la scarica avverrà partendo da un valore V_{c_1} inferiore a V_0, come è stato spiegato nel precedente punto 2. Senonché ora anche la scarica non potrà essere completa, poiché $T'' < 5\,\tau$; all' istante t_2 la capacità presenterà quindi una tensione residua V_{c_2} espressa dalla seguente formula:

8.33-5 $$V_{c_2} = V_0\,(\varepsilon^{+\frac{1}{RC}t_1} - 1)\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t_2}\,,$$

o anche più semplicemente, conoscendo V_{c_1}, :

8.33-6 $$V_{c_2} = V_{c_1}\varepsilon^{-\frac{1}{RC}T''}\,.$$

Ma dall' istante t_2 in poi, fino a t_3, la capacità tornerà a ricaricarsi, partendo ovviamente dal valore V_{c_2}. Ciò avverrà secondo la solita legge esponenziale, con costante di tempo sempre eguale ad RC. Per questo, la curva r della fig. 8.33-3, che rappresenta la fase di ricarica della capacità C in questo intervallo di tempo $t_2 \div t_3$, risulta nel punto M tangente al segmento $M\,P'$, per la cui costruzione è interessata la costante RC, come la stessa fig. 8.33-3 mostra chiaramente.

In sostanza, il fenomeno è dunque costituito da una successione di transitori interrotti, i quali, da un certo istante in poi, diventeranno periodici, cioè si riprodurranno sempre nello stesso modo, se la tensione agente nel circuito sarà rettangolare periodica, asimmetrica ($T' \neq T''$) o simmetrica ($T' = T''$).

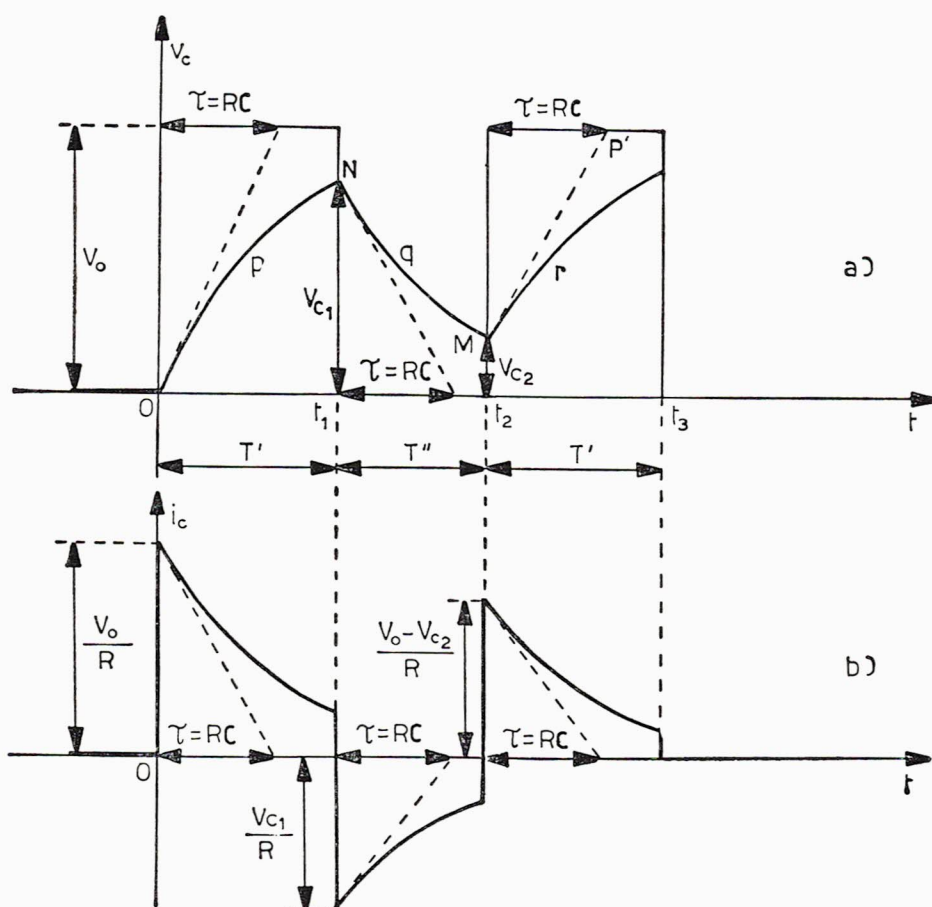



Fig. 8.33-3

8.34 Problemi di applicazione al § 8.3

Esercizio 8.341

Nel circuito di fig. 8.341-1 ad un certo istante l'interruttore viene chiuso. Si trovi l'andamento della corrente i assorbita dalla capacità C e della sua *d.d.p.* sapendo che la capacità è inizialmente carica alla tensione $V_c = 40$ volt, con la polarità segnata in figura.

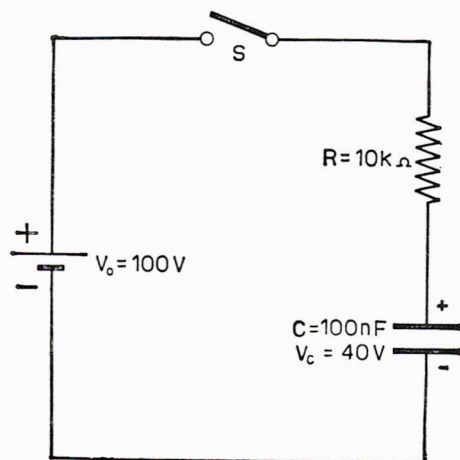



Fig. 8.341-1

Soluzione

Si osservi che per le *componenti variabili* delle grandezze elettriche in gioco, la capacità C, che risulta inizialmente carica alla tensione V_c ed assoggettata dall'istante $t = 0$ in poi all'azione della tensione V_0 del generatore, può essere considerata scarica ma sottoposta all'azione di un generatore di tensione equivalente del valore $V_0 - V_c$.

La dimostrazione è facile. Infatti l'equazione discendente dalla legge di Ohm applicata al circuito dato può essere scritta nel seguente modo:

$$V_0 - \left(V_c + \frac{1}{C} \int i \, dt \right) = Ri ,$$

poiché la tensione ai capi della capacità $\left(V_c + \frac{1}{C} \int i \; dt \right)$ risulta controelettromotrice rispetto alla tensione V_0. Dall'equazione sopra riportata discende immediatamente che:

$$Ri + \frac{1}{C} \int i \; dt = V_0 - V_c = V_{0eq} ,$$

espressione identica alla 8.31-1 vista nel testo purché appunto al posto di V_0, tensione del generatore, ora compaia il termine $V_0 - V_c$.

Segue quindi che la corrente di carica sarà individuata dalla seguente formula :

$$i = i_{tr} = \frac{V_0 - V_c}{R} \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t};$$

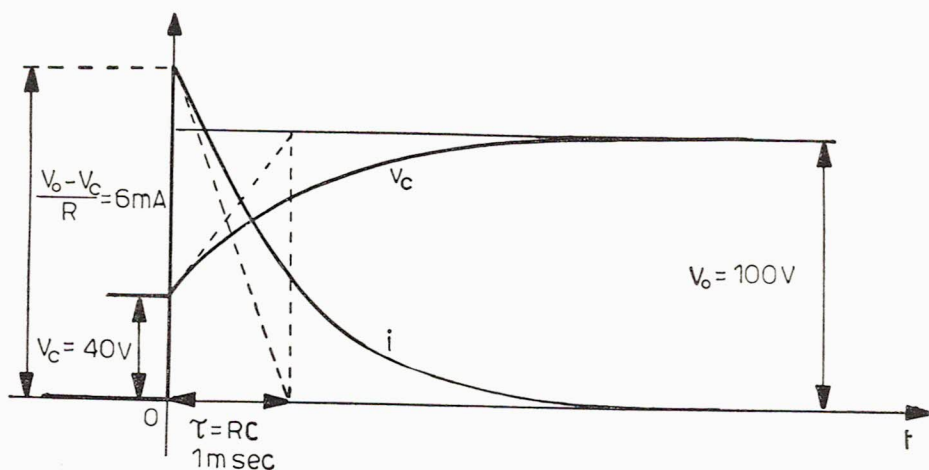



Fig. 8.341-2

mentre la tensione v_c ai capi della capacità, poiché la parte variabile segue la legge $(V_0 - V_c)\left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}\right)$, sarà data in definitiva dall'espressione :

$$v_c = V_c + (V_0 - V_c)\left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

Il grafico di fig. 8.341-2 è stato tracciato tenendo conto di quanto ora è stato osservato, dopo aver calcolato i dati necessari, e cioè la costante di tempo $\tau = RC = 10^4 \cdot 10^{-7} = 1$ msec e il picco di corrente $\frac{V_0 - V_c}{R} = \frac{100 - 40}{10^4} = 6$ mA.

Esercizio 8.342

Nel circuito di fig. 8.342-1 ad un certo istante viene chiuso l' interruttore S. Trovare l'andamento della corrente i e della *d.d.p.* v_c ai capi della capacità C sapendo che essa è inizialmente carica alla tensione $V_c = 400$ volt ($V_c > V_0$), la cui polarità appare chiaramente in figura.

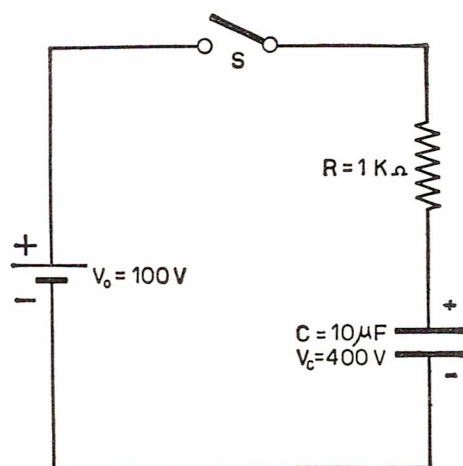



Fig. 8.342-1

Soluzione

Alla chiusura dell' interruttore avverrà che la capacità C dovrà scaricarsi tramite la resistenza R sul generatore di *f.e.m.* V_0; tutto questo perché la tensione della capacità è inizialmente superiore a quella del generatore ($V_c > V_0$). D'altronde il transitorio finirà quando la tensione della capacità avrà raggiunto il valore V_0 della *f.e.m.* del generatore.

Ma, similmente come si è ragionato nell'esercizio precedente, per le componenti variabili delle grandezze elettriche in gioco la capacità C, inizialmente carica alla tensione V_c e sottoposta all'azione della tensione V_0 del generatore (fig. 8.342-2*a*), potrà essere considerata carica alla tensione $V_c - V_0$ ed agente nel circuito senza il generatore (fig. 8.342-2*b*).

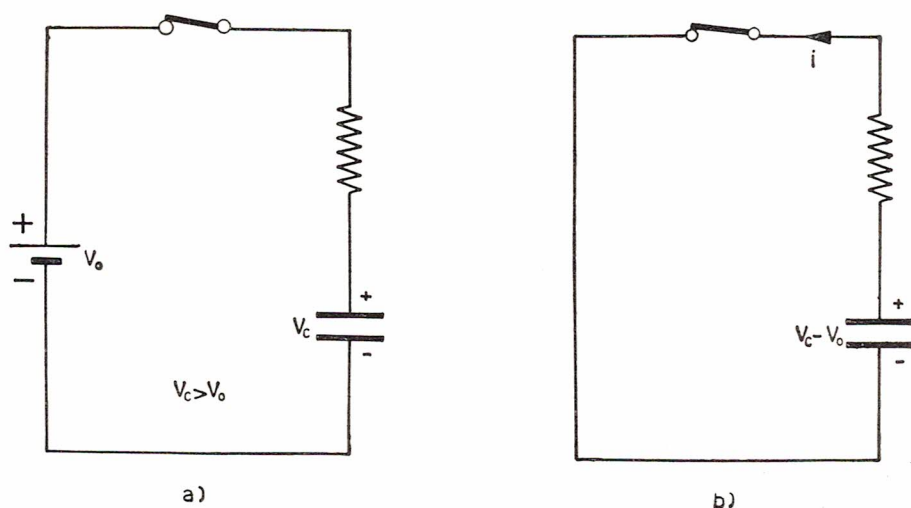



Fig. 8.342-2

Pertanto, la corrente di scarica avrà la seguente espressione:

$$i = -\frac{V_c - V_0}{R}\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t};$$

mentre la tensione v_c ai capi del condensatore, poiché la parte variabile segue la legge $(V_c - V_0)\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}$, sarà data in definitiva dall'espressione:

$$v_c = V_0 + (V_c - V_0)\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}.$$

I grafici di fig. 8.342-3 sono stati tracciati tenendo conto di quanto

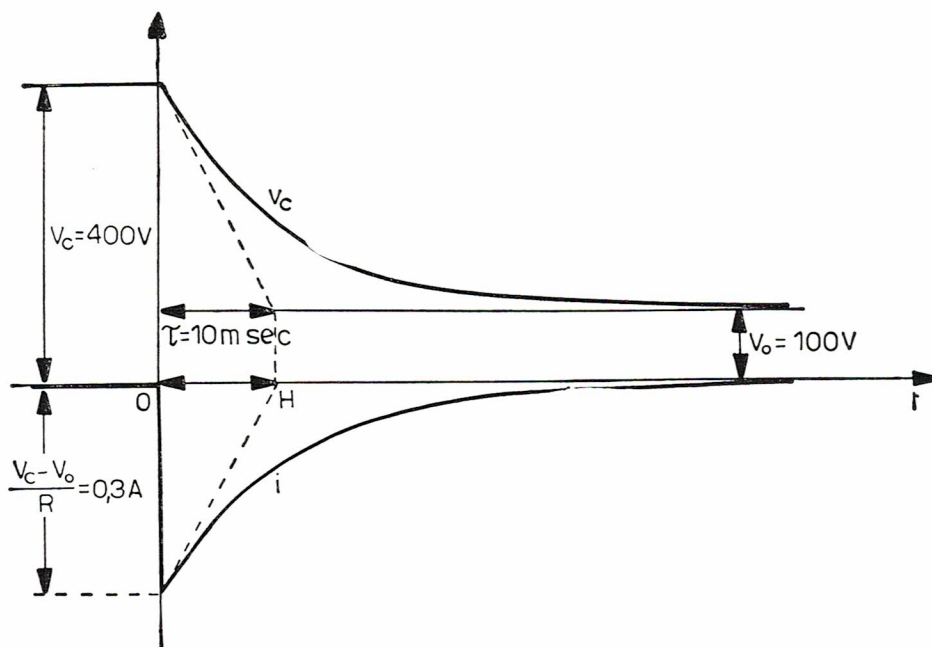



Fig. 8.342-3

è stato ora osservato, dopo aver calcolato i dati necessari e cioè la costante di tempo $\tau = RC = 10^3 \cdot 10^{-5} = 10$ msec e il picco di corrente iniziale: $\dfrac{V_c - V_0}{R} = \dfrac{300}{1000} = 0{,}3$ A.

Esercizio 8.343

Si risolva l'esercizio precedente, sapendo che la capacità C è inizialmente carica alla stessa tensione $V_c = 400$ volt, ma con polarità opposta a quella che appare in fig. 8.342-1.

Soluzione

Alla chiusura dell' interruttore succede che la capacità C deve inizialmente scaricarsi tramite la resistenza R sul generatore; solo così, dopo che si sarà scaricata completamente, si potrà caricare di segno opposto (rispetto alla sua polarità iniziale) per portarsi, alla fine del transitorio, al valore di tensione V_0 che caratterizza lo stesso generatore.

D'altronde lo studio del transitorio può essere condotto assai facilmente osservando che, come nei due esercizi precedenti, per le componenti variabili delle grandezze elettriche in gioco la capacità C, inizialmente carica alla tensione V_c e sottoposta alla tensione V_0 del generatore, può essere considerata scarica, purché si consideri agente nel circuito dato una tensione del valore $V_0 + V_c$.

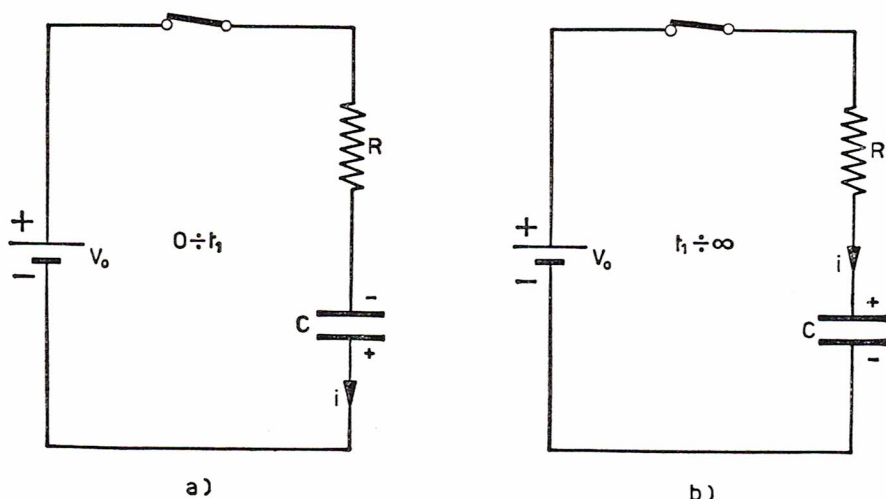



Fig. 8.343-1

Pertanto la corrente i nel circuito, che nel primo intervallo di tempo $(0 \div t_1)$ è dovuta alla corrente di scarica (vedi circuito di fig. 8.343-1*a*), mentre nel successivo $(t_1 \div \infty)$ è dovuta alla corrente di carica (vedi circuito di fig. 8.343-1*b*) (si noti che queste due correnti hanno fisicamente lo stesso verso perché la capacità si carica poi di segno opposto), presenterà la solita espressione:

$$i = \frac{V_0 + V_c}{R} \varepsilon^{-\frac{1}{RC} t} ;$$

mentre la tensione v_c ai capi della capacità, poiché la parte variabile segue la legge esponenziale: $(V_0 + V_c)(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC} t})$, sarà data in definitiva dall'espressione:

$$v_c = (V_0 + V_c)(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{RC} t}) - V_c .$$

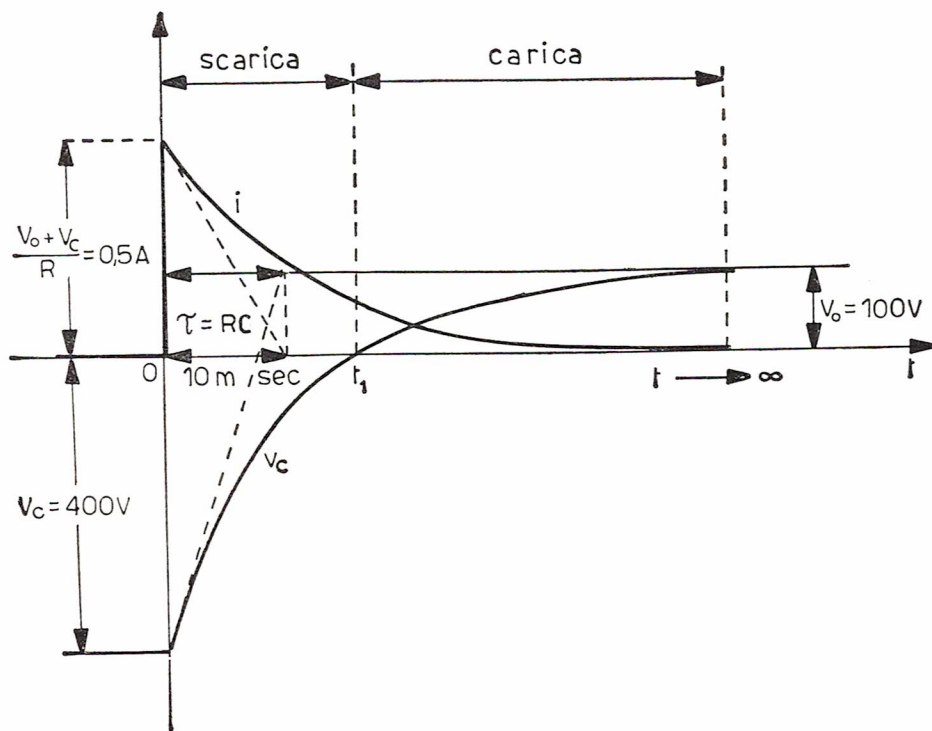



Fig. 8.343-2

I grafici di fig. 8.343-2 sono stati tracciati tenendo conto di quanto ora è stato osservato.

8.4 Transitorio nei circuiti *R-L-C* serie

8.41 Per brusca applicazione di una *f. e. m.* costante

Il circuito di fig. 8.41-1 è costituito da una resistenza R, da un' induttanza L e da una capacità C (inizialmente scarica), collegate in serie fra di loro, e da un commutatore che può inserire o disinserire un generatore di *f.e.m.* costante V_0. Si supponga ora che in un certo istante ($t = 0$) il commutatore passi bruscamente dalla posizione 0 a quella 1: ciò farà sì che nel circuito dato venga ad agire repentinamente una ten-

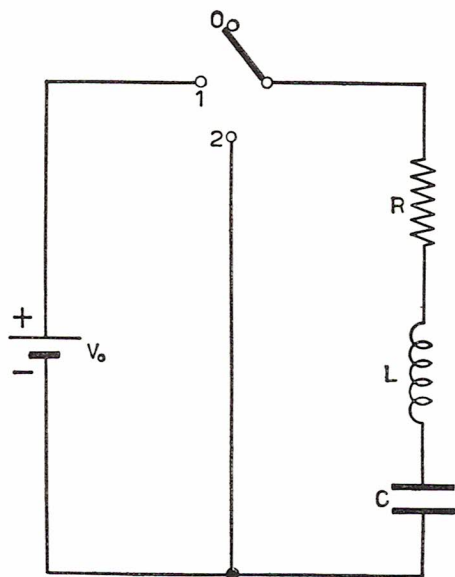
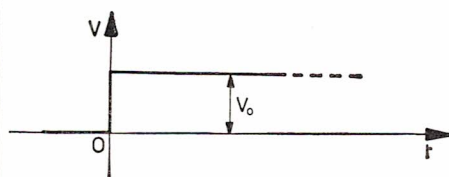



Fig. 8.41-1 *Fig. 8.41-2*

sione di ampiezza costante V_0, il cui andamento nel tempo perciò risulta come quello riportato in fig. 8.41-2 (tensione a gradino).

Il problema sarà risolto naturalmente quando si conoscerà, in funzione del tempo, l'andamento della corrente i nel circuito e delle singole tensioni ai capi di R, L, C. Per ragioni di semplicità, qui si indagherà un po' a fondo solamente sulla corrente i. Della tensione v_c ai capi della capacità C si riporteranno invece i relativi diagrammi.

È ormai chiaro che l'espressione della corrente i risulta come soluzione dell'equazione integro-differenziale esprimente la legge di Ohm per il circuito dato:

8.41-1
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = V_0$$

o, derivandola rispetto al tempo, anche della seguente equazione differenziale del secondo ordine:

8.41-2
$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = 0 .$$

Si osservi d'altronde che il termine permanente i_p è nullo, poiché in regime stazionario ovviamente non può passare corrente attraverso la capacità C. La corrente i coincide allora con la corrente transitoria i_{tr}, la cui espressione analitica, soluzione dell'equazione 8.41-2, si dimo-

stra, è costituita da una somma di due funzioni esponenziali [1], cioè del tipo:

8.41-3 $$i = i_{tr} = A_1\, \varepsilon^{a_1 t} + A_2\, \varepsilon^{a_2 t},$$

dove a_1 e a_2 sono individuate dalle seguenti formule:

8.41-4 $$a_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

8.41-4′ $$a_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}},$$

ed A_1 e A_2 sono invece costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali del problema.

Osservando il fenomeno da un punto di vista generale e qualitativo si comprende che la presenza dell' induttanza L in serie al circuito fa sì che all' istante iniziale la corrente deve essere certamente nulla, poi essa tenderà a crescere; d'altronde la corrente da un certo momento dovrà incominciare a decrescere per la presenza della capacità C il cui comportamento è opposto a quello dell' induttanza L. Ma anche la resistenza R avrà un ruolo molto importante, perché da essa dipenderà l'entità della perdita di energia (è infatti il solo parametro dissipativo del circuito) e quindi il grado di smorzamento del fenomeno. Anzi, è proprio in base a quest' ultima considerazione che il problema di solito viene impostato.

D'altra parte, osservando le espressioni di a_1 e a_2 date in 8.41-4 e 4′, si comprende che si potrà presentare in pratica uno dei seguenti tre casi, a seconda di come risulta il termine sotto radice; precisamente:

1) I parametri R, L, C del circuito hanno un valore tale per cui la quantità sotto radice che compare nelle formule di tipo 8.41-4 è positiva, cioè sono tali da soddisfare la seguente diseguaglianza:

8.41-5 $$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$$

dalla quale, sviluppando, si deduce quindi che la resistenza R dovrà soddisfare la seguente diseguaglianza:

8.41-6 $$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\ \text{[2]}.$$

---

[1] Perché l'equazione differenziale è del secondo ordine.

[2] Come risulterà più avanti, il termine $2\sqrt{L/C}$ viene denominato *resistenza critica* del circuito ed indicato con R_{cr}.

In questo caso le costanti a_1 e a_2 sono reali ed entrambe negative per cui la corrente i risulterà, in definitiva, dalla differenza di due esponenziali decrescenti, precisamente:

$$i = \frac{V_0}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}\left(\varepsilon^{a_1 t} - \varepsilon^{a_2 t}\right), \tag{8.41-7}$$

dove a_1 e a_2 risultano, come si è detto, numericamente negative.

Nella fig. 8.41-3 è stato riportato sia l'andamento di i, sia quello di v_C. Come si vede, corrente e tensione ai capi della capacità presentano un andamento aperiodico. Ciò avviene appunto quando R risulta di valore superiore alla *resistenza critica* del circuito ed è dovuto proprio all'elevato valore presentato da R, cioè allo smorzamento notevole che essa esercita sul circuito stesso.

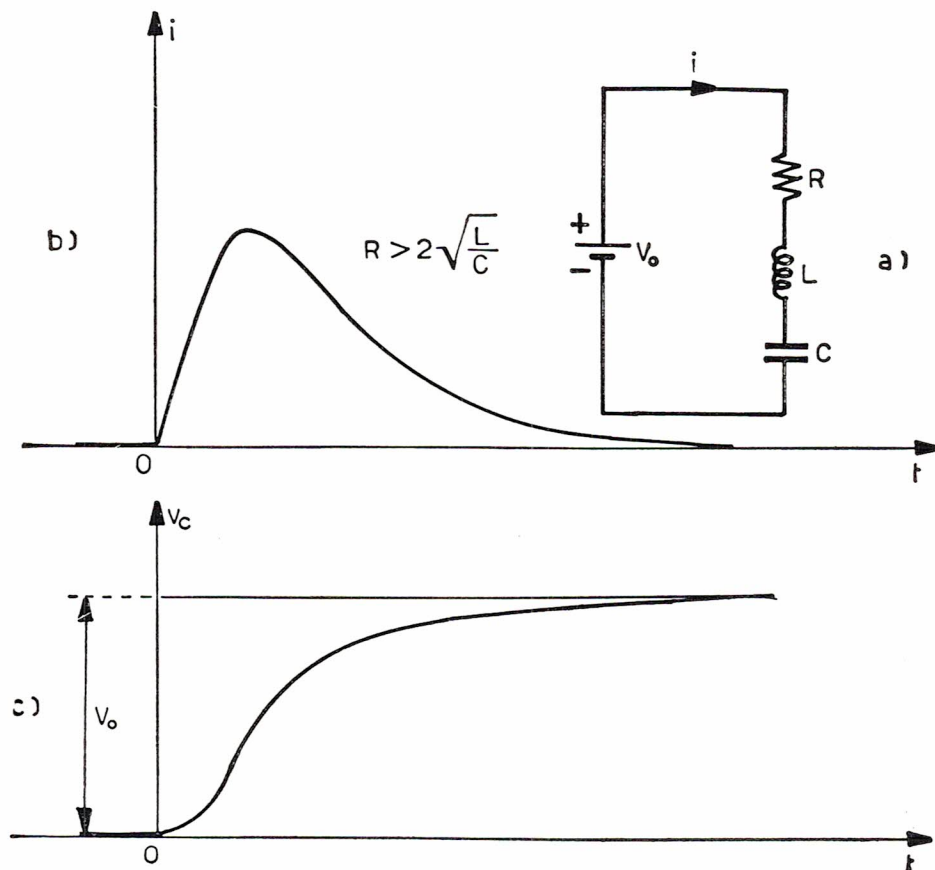



Fig. 8.41-3

2) I parametri R, L, C del circuito hanno un valore tale per cui la quantità sotto radice che compare nelle formule di tipo 8.41-4 è nulla, cioè sono tali da soddisfare la seguente eguaglianza:

8.41-8
$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0 ,$$

dalla quale si deduce quindi che la resistenza R dovrà avere il seguente valore:

8.41-9
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} ,$$

detto *valore critico* e molte volte indicato con R_{cr}, come è stato accennato nella nota (2).

In questo caso a_1 e a_2 sono uguali, reali ed entrambi negativi per cui la corrente i risulterà molto semplicemente dalla seguente formula:

8.41-10
$$i = \frac{V_0}{L}\, t\, \varepsilon^{-\frac{R}{2L}t} .$$

L'andamento della corrente i e di v_c è stato riportato in fig. 8.41-4. Si tratta ancora di un fenomeno aperiodico però con *smorzamento critico.*

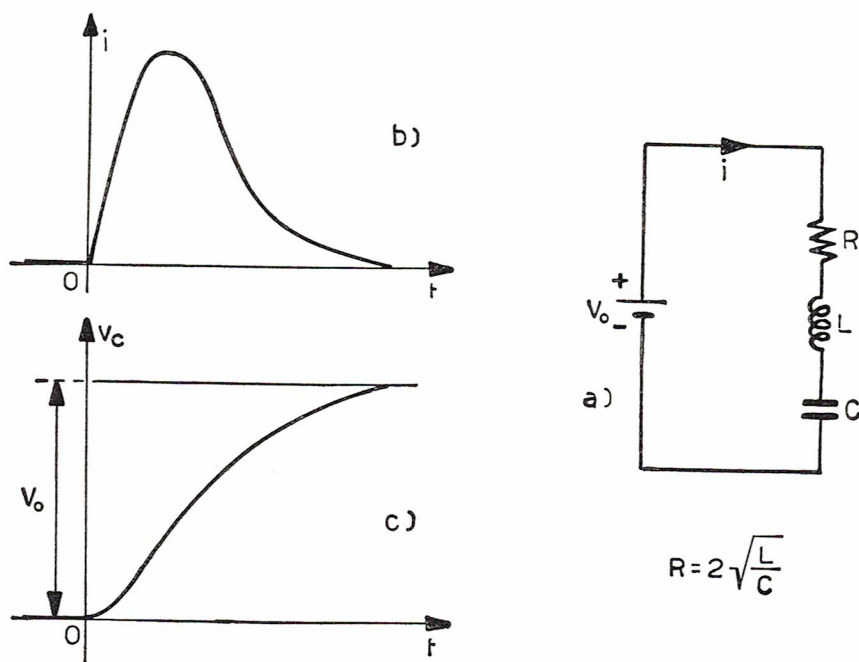



Fig. 8.41-4

3) I parametri R-L-C del circuito hanno un valore tale per cui la quantità sotto radice che compare nelle formule tipo 8.41-4 è negativa, cioè sono tali da soddisfare la seguente diseguaglianza:

8.41-11 $$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0,$$

dalla quale si deduce quindi che la resistenza R dovrà soddisfare la seguente condizione:

8.41-12 $$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

In questo caso le costanti a_1 e a_2 risultano complesse e coniugate fra di loro. Posto infatti:

8.41-13 $$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2} = \omega,$$

per cui la radice diventa positiva, e:

8.41-14 $$\frac{R}{2\,L} = \alpha,$$

si ottiene di conseguenza:

8.41-15 $$a_1 = -\frac{R}{2\,L} + \sqrt{-\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2\right]} = -\alpha + j\,\omega \text{ (3)}$$

8.41-15′ $$a_2 = -\frac{R}{2\,L} - \sqrt{-\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2\right]} = -\alpha - j\,\omega.$$

La corrente i assume allora, in base alla 8.41-3 e dopo opportuni calcoli, in definitiva la seguente espressione:

8.41-16 $$i = \frac{V_0}{\omega\,L}\,\varepsilon^{-\alpha t}\cdot \operatorname{sen}\omega t;$$

così la tensione v_c ai capi della capacità C risulta espressa dalla seguente relazione:

---

(3) Infatti:

$$\sqrt{-\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]} = \sqrt{-1}\;\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = j\omega.$$

8.41-17
$$v_c = V_0\left[1 - \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\omega\sqrt{LC}}\,\text{sen}\,(\omega\, t + \gamma)\right],$$

dove

8.41-18
$$\text{tg}\gamma = \frac{\omega}{\alpha}.$$

In fig. 8.41-5 è stato riportato l'andamento della corrente i e quello della tensione v_c. Come si vede, il fenomeno non si presenta più aperiodico, bensì sinusoidale *smorzato*. Lo smorzamento è dato dal termine $\varepsilon^{-\alpha t}$. Per questo motivo la costante α viene denominata anche *fattore di smorzamento*. La corrente tende dunque necessariamente, come

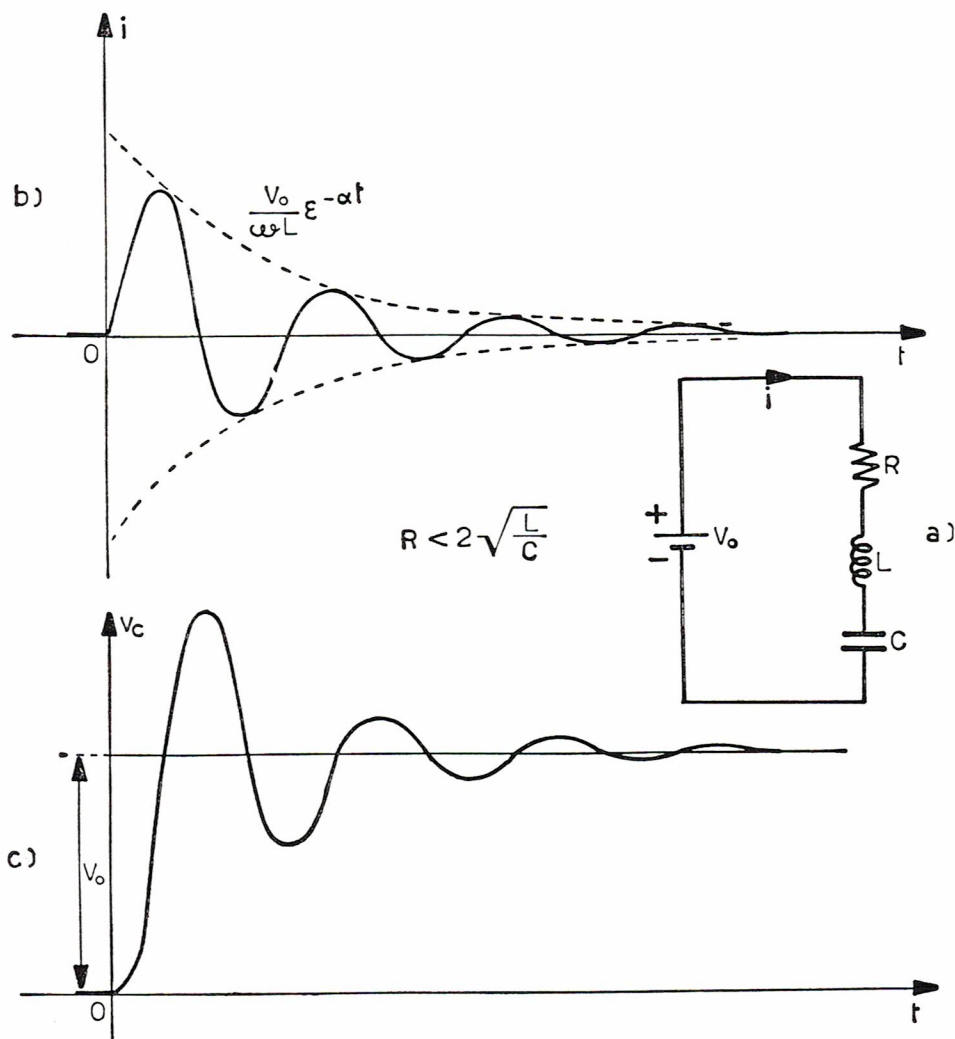



Fig. 8.41-5

negli altri due casi, ad annullarsi, poiché tale è il valore che spetta al regime stazionario ($i_p = 0$), così come la tensione ai capi della capacità tende al valore V_0 del generatore, però, nel presente caso di circuito con smorzamento inferiore al critico $\left(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$, ciò avviene con andamento oscillatorio smorzato. In queste condizioni dunque il circuito R-L-C serie, chiuso bruscamente su di un generatore di tensione continua V_0, entra in oscillazione e solamente dopo un numero teoricamente infinito di oscillazioni, ma in pratica dopo circa cinque volte il valore rappresentato da $\frac{1}{\alpha}$, cioè da $\frac{2L}{R}$, il transitorio sarà terminato.

8.42 Per brusca soppressione della *f. e. m.* costante

Se nel circuito di fig. 8.41-1 si porta, dopo che la capacità C si è caricata alla tensione V_0, il commutatore dalla posizione 1 a quella 2 si obbligherà la capacità stessa a scaricarsi, tramite la resistenza R, sull' induttanza L.

L'equazione che interpreta il funzionamento del circuito in questo caso sarà rappresentata, se scritta in termini di corrente, dalla seguente equazione integro-differenziale (legge di Ohm):

8.42-1
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

cioè, derivandola rispetto al tempo, anche dalla:

8.42-2
$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = 0\,;$$

se scritta invece in termini di tensione, detto v_c il valore istantaneo della *d.d.p.* ai capi della capacità C, dalla seguente equazione:

8.42-3
$$LC\frac{d^2v_c}{dt^2} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = 0$$

che si ottiene molto semplicemente dalla 8.42-2 ponendo $i = C\frac{dv_c}{dt}$ (espressione questa nota se si considera che i è anche la corrente che attraversa la capacità C; infatti $i = \frac{dq}{dt}$, ove $q = Cv_c$).

Prima però di iniziare l'esame dei vari casi che si possono presentare sarà bene osservare quanto segue:

a) i diagrammi e le formule relative alla corrente i sono, salvo un segno meno davanti al termine V_0, identici a quelli visti nel paragrafo

precedente e ciò per il semplice motivo che nei due casi le relative equazioni differenziali del secondo ordine (equazioni 8.41-2 e 8.42-2) sono identiche (solo le condizioni iniziali sono ovviamente differenti). Naturalmente, il fatto che la corrente di scarica presenti verso opposto rispetto alla corrente di carica giustifica il segno meno nelle nuove formule della corrente e relativi diagrammi.

b) L'equazione differenziale della tensione v_c (equazione 8.42-3) è del tutto simile a quella della corrente (equazione 8.42-2), salvo il fatto ovviamente che ora la variabile è v_c anziché i. Pertanto la soluzione di quest'equazione sarà pure essa del tipo:

8.42-4
$$v_c = B_1\, \varepsilon^{a_1 t} + B_2\, \varepsilon^{a_2 t},$$

con a_1 e a_2 espresse dalle 8.41-4 e 4'.

c) I vari casi di regime elettrico che si possono avere in pratica sono gli stessi di quelli descritti nel precedente paragrafo, a seconda cioè del valore assunto dalla resistenza R in confronto col valore presentato dal termine $2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. In questo paragrafo si tratterà solamente il caso $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$; nel prossimo invece l'altro caso $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Se dunque $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, vuol dire che la resistenza totale del circuito è di valore superiore a quella critica. Il regime elettrico risulta allora nettamente aperiodico, poiché lo smorzamento dovuto all'alto valore di R è notevole: la capacità si scarica quindi senza dar luogo ad oscillazioni.

Si vedano i diagrammi di fig. 8.42-1 che mostrano l'andamento di i e di v_c in funzione del tempo.

Le espressioni analitiche di queste curve sono: per la corrente i:

8.42-5
$$i = -\frac{V_0}{2L\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}}\left(\varepsilon^{a_1 t} - \varepsilon^{a_2 t}\right),$$

con a_1 e a_2 reali e negative (per le loro espressioni vedi formule 8.41-4 e 4'); per la tensione v_c:

8.42-6
$$v_c = \frac{V_0}{\sqrt{LC}\sqrt{\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2 - \dfrac{1}{LC}}}\,\varepsilon^{-\alpha t}\,\mathrm{senh}\left[\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,t + \gamma\right] \text{(1)},$$

---

(1) Si definisce *seno iperbolico* della variabile reale x la seguente funzione:

$$\mathrm{senh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

così analogamente per la *tangente iperbolica*:

$$\mathrm{tgh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

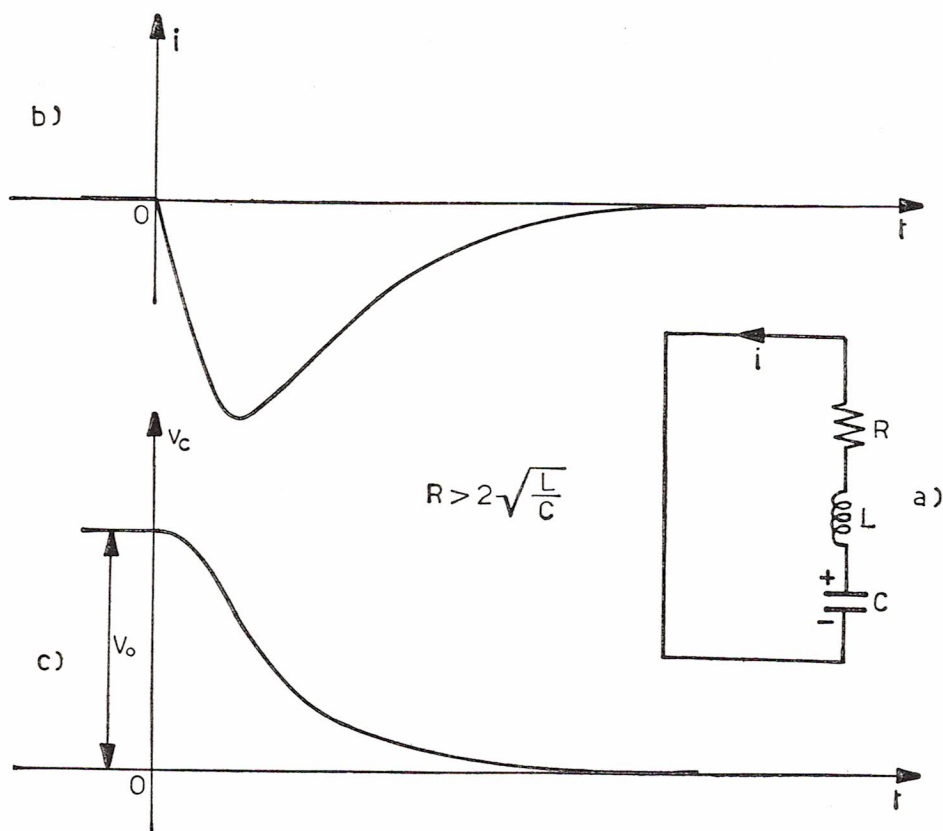



Fig. 8.42-1

dove:

$$\alpha = \frac{R}{2L}\,, \qquad \operatorname{tgh}\gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\,. \tag{8.42-7}$$

8.43 Oscillazioni libere

Quando $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, cioè quando la resistenza del circuito è di valore inferiore a quella critica, per quanto si è già visto nel § 8.41, il regime elettrico diventa oscillatorio smorzato. I diagrammi di fig. 8.43-1 mostrano l'andamento della corrente i e della *d.d.p.* v_c in funzione del tempo. Ora naturalmente sia la corrente nel circuito che la tensione ai capi della capacità tendono entrambe a zero.

Le equazioni sono:
per la corrente i:

8.43-1
$$i = -\frac{V_0}{\omega L}\varepsilon^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,;$$

e per la tensione v_c:

8.43-2
$$v_c = \frac{V_0}{\omega\sqrt{LC}}\,\varepsilon^{-\alpha t}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \gamma)\,,$$

ove:

8.43-3
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,, \qquad \alpha = \frac{R}{2L}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\omega}{\alpha}\ (^1)\,.$$

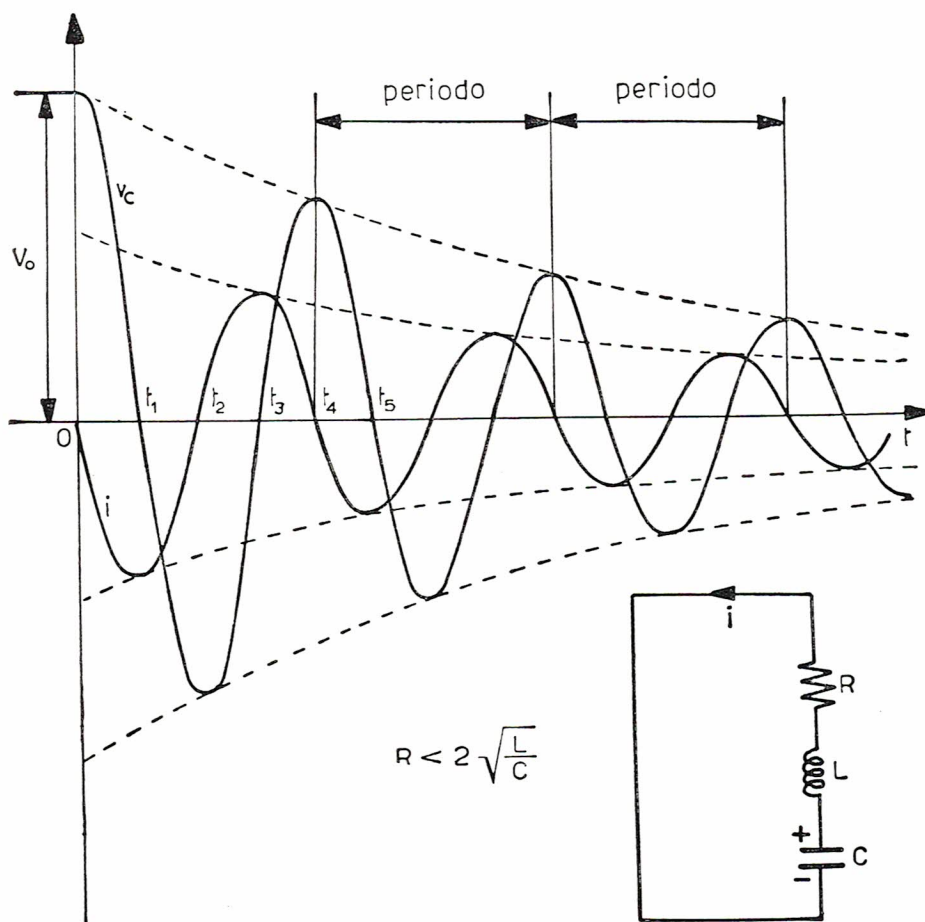



Fig. 8.43-1

---

(1) Poiché in generale $\omega >> \alpha$, risulta che l'angolo γ è di poco inferiore a $\pi/2$.

Le equazioni 8.43-1 e 2 rappresentano analiticamente delle sinusoidi smorzate (lo smorzamento è dato dal termine $\varepsilon^{-\alpha t}$) : per questo motivo si dice che il circuito è sede di oscillazioni elettriche libere smorzate. È interessante notare a tale proposito che, pur non essendo la corrente i e la tensione v_c periodiche nel vero senso della parola, esse sono grandezze però che presentano l' interessante caratteristica di passare per i valori massimi o minimi (vedi fig. 8.43-1) sempre regolarmente agli stessi intervalli di tempo. Questi, essendo appunto tutti eguali, definiscono il cosiddetto *periodo* della funzione sinusoidale smorzata.

Il fenomeno delle oscillazioni libere smorzate è perciò caratterizzato dall'avere una frequenza f e quindi una pulsazione ω la quale, in forza delle equazioni 8.43-1 e 2, risulta espressa ovviamente dalla seguente formula :

8.43-4
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2}\,.$$

Introducendo il coefficiente α e la pulsazione di risonanza ω_r del circuito $\left(\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$, la 8.43-4 assume anche la semplice espressione :

8.43-5
$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}\,.$$

Questa pulsazione ω rappresenta dunque un nuovo parametro per i circuiti *R-L-C* serie, parametro che viene definito pulsazione *naturale* o propria del circuito. La formula 8.43-5 mostra quindi come la pulsazione naturale differisca da quella di risonanza a causa del termine α, cioè del fattore di smorzamento. Ovviamente se α fosse nullo, ciò avviene solamente per $R = 0$, la qual cosa è però impossibile nei casi reali, si avrebbe che $\omega = \omega_r$. Ma questa osservazione è importante egualmente perché conferma in sostanza che un circuito *R-L-C* in risonanza si può considerare come un circuito oscillatorio libero privo di perdite (cioè $R = 0$). Infatti questo modo di vedere il fenomeno è verosimile in quanto l'energia perduta nella resistenza viene fornita dal generatore elettrico che alimenta il circuito risonante ([2]).

Dalla formula 8.43-5 si deduce ancora che la pulsazione delle oscillazioni si annulla di valore, cioè il periodo diventa di valore infinito (funzione aperiodica), quando $\omega_r = \alpha$. Questa condizione è soddisfatta per $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Si ritrova dunque per altra via la conferma che il circuito

---

([2]) In tal caso dunque l'energia dissipata dalla resistenza R non viene sottratta a quella immagazzinata dagli elementi *L-C* : il circuito si comporta perciò, ai fini delle oscillazioni, come se fosse privo di perdite.

oscillerà solamente nel caso in cui la resistenza R soddisfi la condizione $0 \leq R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, cioè oscillerà finché la resistenza R si manterrà inferiore al valore critico, poiché solo così $\omega \neq 0$.

Naturalmente il fenomeno delle oscillazioni elettriche, che è stato illustrato fino ad ora con formule e diagrammi, ha un' interpretazione ed una spiegazione fisica assai semplice. Si consideri infatti un circuito formato da un condensatore di capacità C, inizialmente carico alla tensione V_c, che venga connesso ad esempio ad un induttore di induttanza L e resistenza R. Orbene, nei primissimi istanti ($0 < t < t_1$, fig. 8.43-2) l'energia elettrostatica persa dal condensatore, che tende ovviamente a scaricarsi, si troverà quasi tutta accumulata nel campo magnetico generato dalla bobina, se le perdite dovute alla resistenza R non saranno molto forti. Ciò avviene in quanto il condensatore scaricandosi fa circolare nella bobina una corrente (corrente di scarica).

All' istante $t = t_1$ (vedi fig. 8.43-2) si avrà, è vero, che il condensatore non possiederà più energia elettrostatica, poiché $v_c = 0$, ma questa si sarà tutta (salvo quella perduta in calore nella resistenza) accumulata sotto forma di energia elettromagnetica nella bobina per cui la corrente dovrà

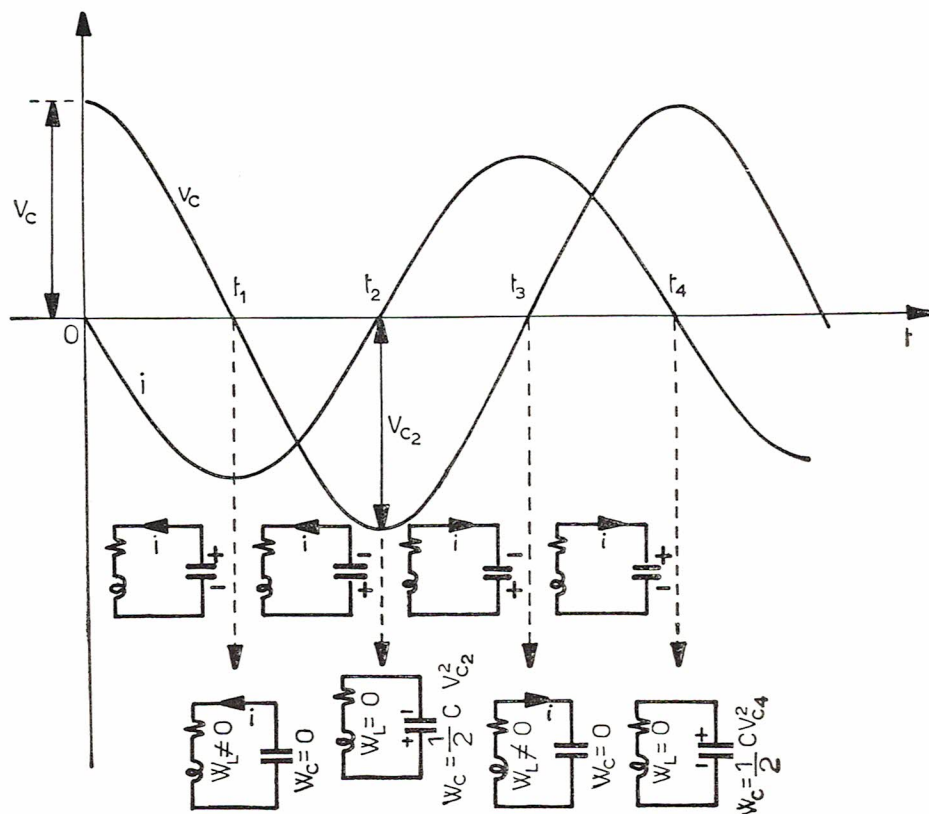



Fig. 8.43-2

essere in quest'istante massima. Ma questa situazione non può permanere poiché la corrente, continuando a circolare, trasporterà nuove cariche sulle armature del condensatore il quale perciò si dovrà ricaricare (intervallo di tempo $t_1 \div t_2$). Energeticamente, ciò avverrà a spese dell'energia elettromagnetica posseduta dalla bobina, che essa perderà a poco a poco: la corrente in quest' intervallo di tempo dovrà perciò diminuire di valore.

Arrivati all' istante $t = t_2$ la corrente nel circuito si sarà dunque ridotta a zero, per cui nulla risulterà in tale istante l'energia elettromagnetica; viceversa invece sarà massima l'energia accumulata nel frattempo dal condensatore il quale perciò risulterà carico alla tensione massima V_{c_2}, valore questo però inferiore a quello di partenza V_c, poiché $\frac{1}{2} C V_{c2}^2 < \frac{1}{2} C V_c^2$ a causa delle perdite.

Il fenomeno proseguirà così teoricamente all' infinito poiché continuo sarà lo scambio di energia fra campo elettrico del condensatore e campo magnetico dell' induttore. Solamente che, venendo continuamente dissipata in calore, a causa della resistenza R del circuito, una certa frazione dell'energia in gioco, si arriverà ad un certo punto in cui le oscillazioni avranno praticamente termine e ciò naturalmente avverrà tanto più rapidamente quanto più alta risulterà la percentuale di energia persa in ogni ciclo.

8.44 Problemi di applicazione al § 8.4

Esercizio 8.441

Quale valore deve avere la resistenza R del circuito oscillatorio libero di fig. 8.441-1 affinché, una volta entrato in oscillazione, l'ampiezza delle oscillazioni si riduca a metà dopo 100 oscillazioni?

Soluzione

Dalle formule 8.43-1 e 2 riportate nel testo si desume che è il termine $\varepsilon^{-\alpha t}$ quello che tien conto della riduzione dell'ampiezza delle oscillazioni libere. Perciò, affinché l'ampiezza di queste abbia a ridursi al 50 % del valore iniziale, occorrerà lasciar trascorrere, dall' istante in cui il circuito inizia ad oscillare, un tempo t' tale che:

$$\varepsilon^{-\frac{R}{2L} t'} = 0{,}50 \, .$$

Da questa relazione si ricava:

$$t' = 0{,}692 \frac{2L}{R} \, .$$

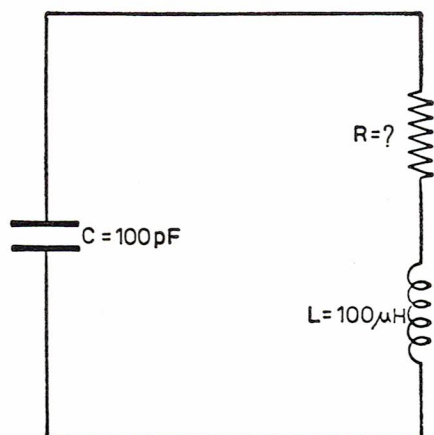



Fig. 8.441-1

D'altronde il valore di t' rappresenta anche quel particolare valore di tempo necessario affinché si abbiano a compiere 100 oscillazioni complete, per cui, detto T il periodo di queste oscillazioni, si potrà scrivere che :

$$t' = 100\, T = 100 \frac{2\,\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2\,L}\right)^2}} .$$

Uguagliando le due espressioni di t' scritte sopra si otterrà finalmente un'equazione nella sola incognita R, dalla quale sarà quindi possibile ricavare il valore di R stesso. Si ottiene così, dopo avere eseguito i passaggi, la seguente espressione :

$$R = \sqrt{4{,}85 \cdot 10^{-6} \frac{L}{C}} ,$$

la quale, risolta numericamente con i dati del problema, fornisce per R il valore di 2,2 ohm.

Nota R, si potrà di conseguenza calcolare, se necessario, il valore del periodo T delle oscillazioni (che ammonta a 0,628 μsec), il valore di α (che vale $1{,}1 \cdot 10^4$), ecc..

Esercizio 8.442

Si trovino i valori da assegnare ad R_0, R ed L affinché il circuito oscillatorio libero di fig. 8.442-1*a* possa produrre treni d'onda di pulsazione $\omega = 0{,}1$ Mrad/sec e della durata di 1 msec (fig. 8.442-1*b*). Si noti che la capacità C deve risultare carica alla tensione V_0 del generatore quando

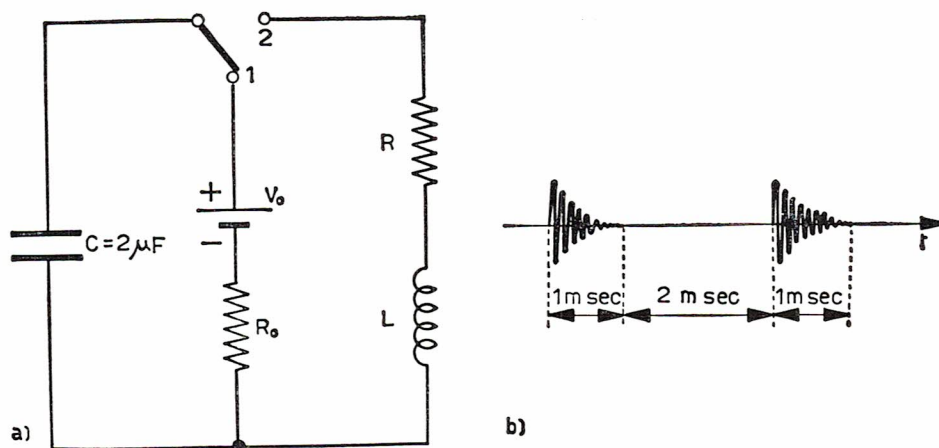



Fig. 8.442-1

il commutatore è in posizione 1 e deve scaricarsi sul circuito R-L quando il commutatore è in posizione 2. Il commutatore rimane d'altronde periodicamente in posizione 1 per la durata di 2 msec e in posizione 2 per 1 msec.

Soluzione

a) Il tempo T' disponibile per la carica completa della capacità è di 2 msec ed esso dovrà essere maggiore, o tutt'al più eguale, a cinque volte la costante di tempo del circuito di carica, cioè:

$$T' \geq 5\, R_0 C\,,$$

da cui si ricava perciò che:

$$R_0 \leq \frac{T'}{5\,C}\,,$$

ossia con i dati del problema:

$$R_0 \leq \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ ohm}\,.$$

b) Il tempo T'' disponibile per la scarica completa della capacità è invece di 1 msec. Pertanto si potrà scrivere $\alpha\, T'' = 5$, quindi:

$$\frac{R}{2\,L} = 5 \cdot 10^3\,. \tag{8.442-1}$$

È così possibile ricavare dalla formula che dà la pulsazione ω, cioè $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, il valore dell'induttanza L. Infatti:

$$\frac{1}{LC} = \omega^2 + \frac{R^2}{4L^2} = 10^{10} + 25 \cdot 10^6 \cong 10^{10} ,$$

da cui:

$$L = \frac{1}{C \cdot 10^{10}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}\, 10^{10}} = 50\ \mu\text{H} .$$

Sostituendo ora tale risultato nella 8.442-1 si ottiene finalmente per R il valore:

$$R = 10^4 L = 10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0{,}5 \text{ ohm} .$$

Esercizio 8.443

Si trovino i valori da assegnare a R e a C del circuito di fig. 8.443-1*a* affinché la scarica del condensatore di capacità C, preventivamente caricato, avvenga con legge aperiodica, precisamente tale che la corrente di scarica abbia l'andamento riportato in fig. 8.443-1*b* (curva a tratto marcato).

L'induttanza del circuito ammonta ad 1 mH.

Soluzione

Dalla teoria è noto (formula 8.42-5) che la curva di fig. 8.443-1*b*, rappresentante la corrente di scarica aperiodica del circuito R-L-C dato, risulta dalla differenza di due esponenziali (decrescenti) di cui il primo termine è del tipo:

$$i'_{tr} = A\,\varepsilon^{a_1 t}$$

ed analogamente il secondo termine:

$$i''_{tr} = A\,\varepsilon^{a_2 t} ,$$

con a_1 e a_2 espressi da numeri reali e negativi.

Ora sullo stesso diagramma di fig. 8.443-1*b* è facile tracciare queste due curve poiché basterà prolungare esponenzialmente il tratto decrescente della curva data per avere subito la curva i'_{tr}, quindi dal punto M tracciare un'altra curva esponenziale decrescente tale che si annulli praticamente in corrispondenza dell'istante segnato con N in fig. 8.443-1*b* e che corrisponde all'istante in cui la curva data si discosta dalla curva

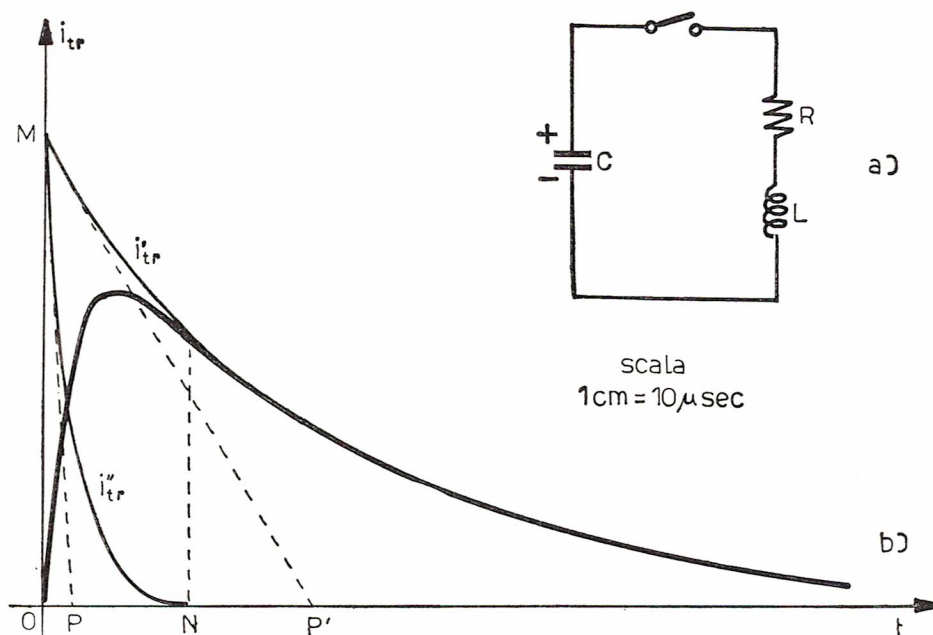



Fig. 8.443-1

esponenziale i'_{tr}. La differenza di queste due curve $(i'_{tr} - i''_{tr})$ deve dare (con l'approssimazione dovuta al graficismo) la curva data i_{tr}.

Tracciate perciò le tangenti nell'origine (punto M) di queste due curve esponenziali decrescenti, i segmenti $OP \cong 4$ μsec ed $OP' \cong 36$ μsec rappresenteranno rispettivamente i valori di $1/a_2$ e $1/a_1$. Risulta quindi:

$$a_1 = -\frac{1}{16 \cdot 10^{-6}} = -27800$$

$$a_2 = -\frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} = -250000\,.$$

Avvalendosi d'altronde delle formule 8.41-4 e 4' si potrà scrivere che:

$$-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -27800$$

$$-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -250000\,.$$

Si viene con ciò a disporre di due equazioni nelle due incognite R e C. Da queste due equazioni, sommando membro a membro, si ottiene $R/L = 277800$, per cui:

$$R = 277{,}8 \text{ ohm};$$

mentre sottraendo dalla prima la seconda si ottiene $2\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} =$ $= 222200$, da cui:

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 1{,}23 \cdot 10^{10},$$

ove l'unica incognita è la C. Questa vale dunque:

$$C = \frac{1}{7 \cdot 10^9 \cdot L} = \frac{1}{7 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3}} = 0{,}143 \ \mu\text{F}.$$

8.5 Transitorio nelle reti a due maglie

8.51 Generalità

Nel § 8.1 è stato accennato alle difficoltà che si incontrano nella risoluzione dei circuiti in regime transitorio quando questi sono formati da più di una maglia, difficoltà che sorgono in quanto i mezzi matematici ordinari non sono più in grado di risolvere agevolmente il problema.

Il caso delle reti costituite da due sole maglie può essere tuttavia ancora trattato con il metodo visto per una sola maglia, risolvendo cioè le equazioni differenziali o integro-differenziali nel modo solito, ciò però limitatamente ad alcuni tipi particolari di reti, come si dirà nel prossimo paragrafo.

Da un punto di vista generale la soluzione di una qualsiasi rete elettrica a due maglie, come è ad esempio quella riportata in fig. 8.51-1, verrà impostato nel seguente modo. Si incomincerà, come al solito, a scrivere le equazioni che esprimono il funzionamento elettrico delle due maglie (2° principio di Kirchhoff per i valori istantanei). Esse saranno pertanto del tipo come queste (che si sono ottenute applicando per semplicità il metodo delle correnti di maglia alla rete di fig. 8.51-1):

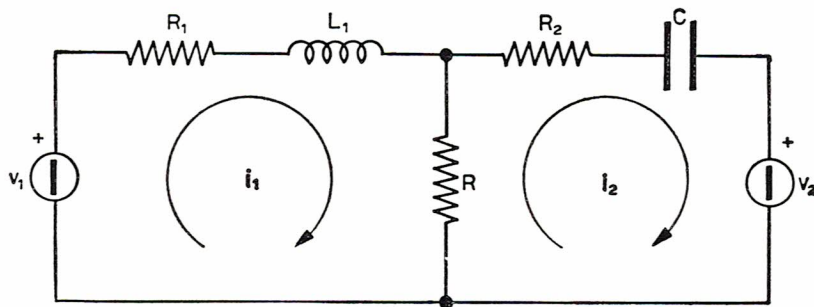



Fig. 8.51-1

8.51-1 $$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R(i_1 - i_2) = v_1$$

8.51-1′ $$R_1 (i_2 - i_1) + R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 \, dt = - v_2 \ ,$$

quindi si osserverà che la corrente di ciascuna maglia, cioè i_1 e i_2, poiché si è in regime transitorio, risulterà sempre esprimibile come somma di due termini, quello permanente e quello transitorio, per cui si potrà scrivere precisamente che:

8.51-2 $$i_1 = i_{p_1} + i_{tr_1} \ ,$$

8.51-2′ $$i_2 = i_{p_2} + i_{tr_2} \ .$$

Naturalmente i_1 e i_2 rappresentano le soluzioni del sistema di equazioni differenziali di partenza (8.51-1 e 1′). D'altronde, i_{p_1} e i_{p_2} si otterranno risolvendo la rete in regime permanente, mentre i_{tr_1} e i_{tr_2} saranno invece le soluzioni del sistema di equazioni differenziali sopra menzionate ove però i termini rappresentanti le *f.e.m.* esterne sono stati soppressi ($v_1 = v_2 = 0$).

Per il calcolo di i_p si ricorrerà dunque ad uno dei metodi descritti nei capitoli precedenti; mentre per l'espressione e il calcolo dei termini rappresentanti la corrente transitoria si rimanda al prossimo paragrafo.

8.25 Impostazione del problema - Esempi di applicazioni pratiche

Ai fini pratici del calcolo dei termini rappresentanti la corrente transitoria è bene distinguere le reti che contengono *un solo* elemento induttivo o capacitivo da quelle che ne contengono *più d'uno* (più induttanze o più capacità dislocate però in più rami, oppure induttanze e capacità in rami diversi, ecc.).

1) *Reti che contengono un solo elemento induttivo o capacitivo*

Questo caso, risolubile facilmente, si ha precisamente quando, oltre al generatore e alle resistenze, vi è una sola induttanza o una sola capacità che entra nella costituzione della rete. Allora il sistema di equazioni da risolvere risulta costituito da un certo numero di equazioni differenziali del primo ordine [1], quindi abbastanza semplici, per cui il ter-

---

[1] Queste equazioni provengono ad esempio dall'applicazione dei principi di Kirchhoff (scritti nel modo classico o secondo il metodo delle correnti di maglia), come già si è detto.

mine transitorio di ciascuna corrente è del tipo:

8.52-1
$$i_{tr} = A\,\varepsilon^{at}\,.$$

È importante ricordare che tutte le funzioni esponenziali del tipo 8.52-1 hanno lo stesso esponente e che questo risulta negativo, poiché $1/a$ rappresenta ancora la costante di tempo delle correnti in gioco.

Si riporta qui un modo molto semplice per risolvere praticamente il problema, per il quale cioè il calcolo dell'unica costante di tempo viene basato sul principio del generatore equivalente [2].

Si voglia risolvere ad esempio la rete di fig. 8.52-1*a* quando la *f.e.m.*

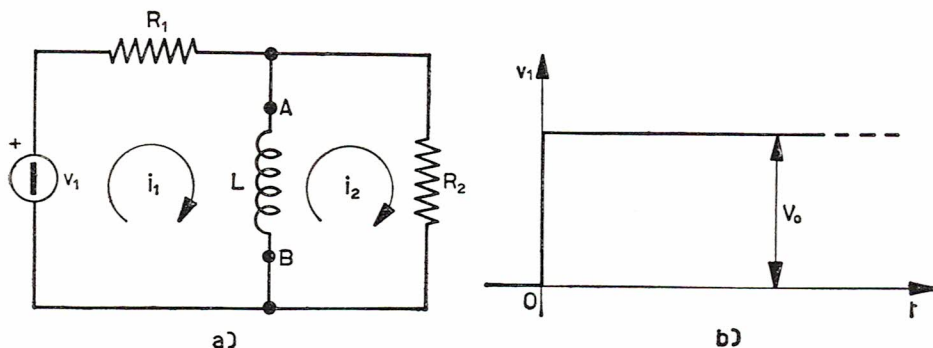



Fig. 8.52-1

dell'unico generatore presente ha un andamento nel tempo come in fig. 8.52-1*b* (tensione a gradino, il che significa brusca applicazione allo istante $t = 0$ di una *f.e.m.* costante V_0). Il sistema delle due equazioni differenziali che si dovrebbe risolvere è dunque il seguente:

8.52-2
$$L\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 - L\frac{di_2}{dt} = V_0\,,$$

8.52-2′
$$-L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0\,;$$

sistema che qui però non si risolverà poiché si seguirà una strada molto più semplice, come è stato detto, precisamente cercando di calcolare l'unica costante di tempo $(1/a)$ ed i coefficienti A_1 e A_2 che compaiono nelle espressioni delle due correnti transitorie di tipo 8.52-1.

Ora il calcolo della costante di tempo è molto facile applicando il principio di Thévenin alla rete data fra i punti A e B (fig. 8.52-1*a*). Infatti, per questo teorema (fig. 8.52-2), l'induttanza L è come se fosse

---

(2) Questo principio vale anche in regime transitorio.

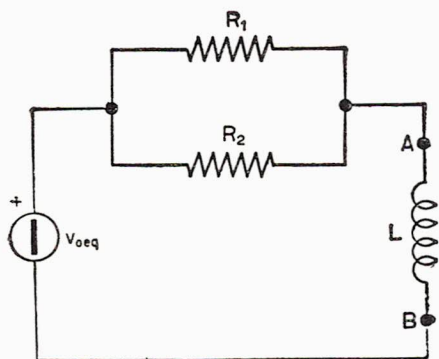



Fig. 8.52-2

alimentata da un generatore ideale di tensione avente però resistenza interna R_0 del valore: $R_1R_2/(R_1 + R_2)$. La costante di tempo della corrente che circola nell' induttanza L ammonterà perciò (vedi circuito di fig. 8.52-2) a:

8.52-3 $$\frac{L}{R_0} = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1R_2} = \frac{1}{a},$$

ma questa sarà anche la costante di tempo $\left(\frac{1}{a}\right)$ delle correnti i_1 e i_2.

Per il calcolo delle costanti A_1 e A_2 si procederà invece nel modo classico, cioè facendo uso delle cosiddette *condizioni iniziali*. Per questo è necessario lavorare sulle correnti totali i_1 e i_2. Pertanto si incomincerà a trovare i valori di i_{p_1} e i_{p_2}. Ma è chiaro che in regime di corrente continua l' induttanza si comporterà come un cortocircuito per cui si avrà in definitiva (fig. 8.52-1*a*):

8.52-4 $$i_{p_1} = \frac{V_0}{R_1}, \qquad i_{p_2} = 0.$$

Quindi le correnti i_1 e i_2 risultano così espresse:

8.52-5 $$i_1 = i_{p_1} + i_{tr_1} = \frac{V_0}{R_1} + A_1\varepsilon^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1 + R_2)}t}$$

8.52-5′ $$i_2 = i_{p_2} + i_{tr_2} = 0 + A_2\varepsilon^{-\frac{R_1R_2}{L(R_1 + R_2)}t}.$$

È possibile procedere ora al calcolo di A_1 e A_2 facendo uso appunto delle condizioni iniziali in cui si trova la rete data, condizioni che sono note. Si comprende infatti come all' istante $t = 0$ (inizio della brusca applicazione della tensione costante V_0) la corrente attraverso l' induttanza L sarà nulla. Ciò imporrà che sia dunque:

8.52-6 $$(i_2 = i_1)_{t=0}.$$

D'altronde, sempre in quest' istante, dovrà essere (2° principio di Kirchhoff applicato alla maglia esterna):

8.52-7 $$(R_1 i_1 + R_2 i_2 = V_0)_{t=0}$$

da cui, in base alla 8.52-6, si ottiene che:

8.52-8 $$(i_1)_{t=0} = (i_2)_{t=0} = \frac{V_0}{R_1 + R_2} \, .$$

Imponendo ora $t = 0$ anche nelle due espressioni 8.52-5 e 5′ si otterranno le seguenti condizioni:

8.52-9 $$(i_1)_{t=0} = \frac{V_0}{R_1} + A_1$$

8.52-9′ $$(i_2)_{t=0} = A_2 \, ,$$

dalle quali, ricordando quanto trovato in 8.52-8, si ricaverà finalmente:

8.52-10 $$A_1 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} - \frac{V_0}{R_1} \, ,$$

8.52-10′ $$A_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} \, .$$

Il problema è così completamente determinato, poiché le correnti i_1 e i_2 sono note in tutti i particolari. Perciò risulterà pure nota la corrente i_L nell' induttanza L che ne è la differenza $(i_L = i_1 - i_2)$. In fig. 8.52-3 è stato riportato l'andamento grafico delle due correnti i_1 e

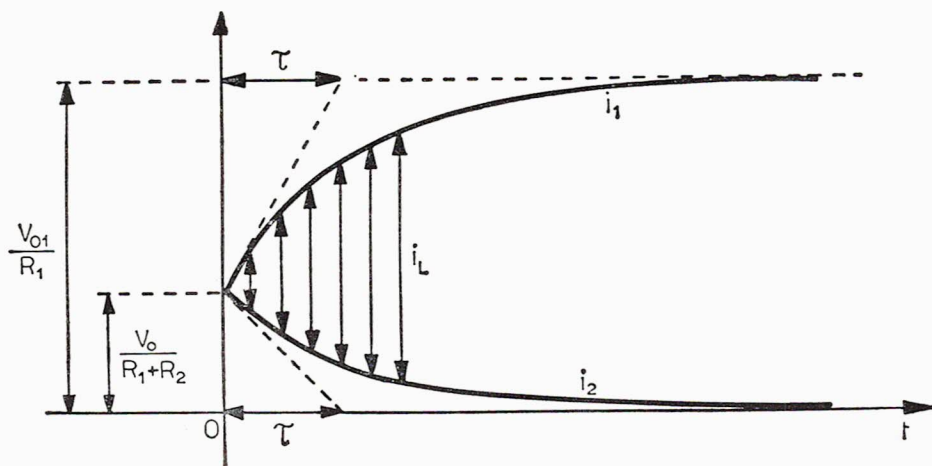



Fig. 8.52-3

i_2. Come si vede la corrente i_1 è rappresentata da una funzione esponenziale crescente mentre la corrente i_2 da una funzione esponenziale decrescente: leggi quindi del tutto identiche a quelle viste nei precedenti paragrafi.

2) *Reti che contengono più elementi induttivi e capacitivi*

Questo caso non è risolubile con i mezzi offerti dall' Analisi Matematica ordinaria. Tuttavia è utile fare qualche considerazione. A tale scopo risulta conveniente distinguere le reti che contengono più rami induttivi (fig. 8.52-4*a*) o capacitivi (fig. 8.52-5*a*) da quelle che contengono

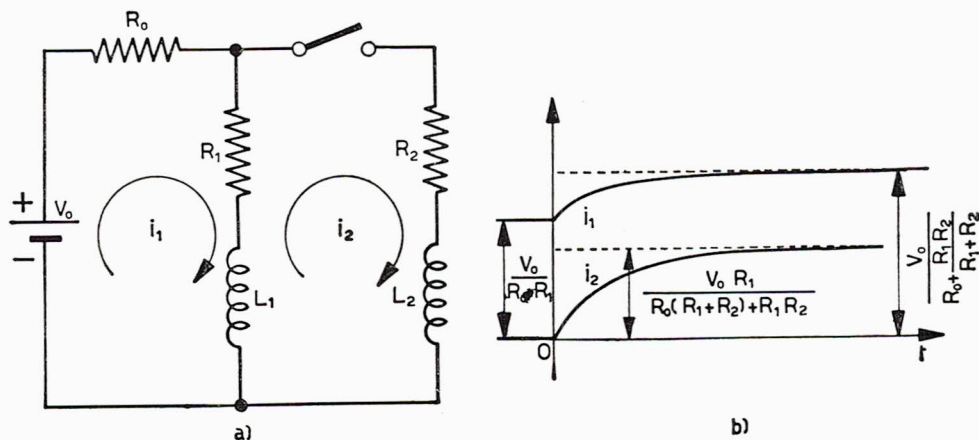



Fig. 8.52-4

invece contemporaneamente sia induttanze che capacità (fig. 8.52-6*a*), poiché nel primo caso la rete certamente non entra in oscillazione nel periodo transitorio, mentre ciò può accadere nel secondo caso.

Per quanto riguarda le correnti e le tensioni si può dire che, in entrambi i casi, i termini transitori delle correnti e delle tensioni sono sempre esprimibili in generale come somma di più funzioni esponenziali (di tipo 8.12-2) i cui esponenti sono certamente reali e negativi nel caso che la rete non entri in oscillazione.

Se dunque da un punto di vista quantitativo non è possibile risolvere il problema con i mezzi ordinari, da un punto di vista qualitativo risulta possibile qualche volta tuttavia avere un' idea del fenomeno transitorio che caratterizza la rete data, tenendo conto di quanto è stato esposto in precedenza.

Ad esempio l'andamento delle correnti i_1 e i_2 per la rete di fig. 8.52-4*a*, i cui grafici sono stati riportati in fig. 8.52-4*b*, si giustifica assai facilmente ricordando che all' istante $t = 0$ la corrente i_1 vale $\dfrac{V_0}{R_0 + R_1}$, mentre la corrente i_2 è nulla; entrambe raggiungeranno poi

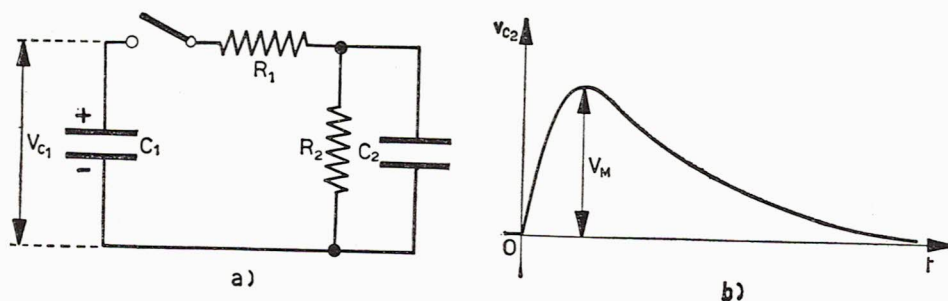



Fig. 8.52-5

il valore di regime stazionario con legge che sarà sempre del tipo *esponenziale* poiché, come si è detto, gli esponenti dei termini esponenziali in gioco risultano in questo caso reali e negativi (3).

Così l'andamento della tensione v_{c_2} ai capi della capacità C_2 facente parte della rete riportata in fig. 8.52-5*a*, ove la capacità C_1 si intenda preventivamente caricata alla tensione V_{c_1} (inoltre è $C_1 > C_2$ ed $R_2 > R_1$), si giustifica osservando che, nei primissimi istanti dopo la chiusura dell' interruttore, la corrente di scarica della capacità C_1 *circolerà* prevalentemente per la capacità C_2 cosicché il suo potenziale potrà salire rapidamente (fig. 8.52-5*b*). Raggiunto quindi il valore massimo V_M la tensione ai capi della capacità C_2 dovrà incominciare ovviamente a

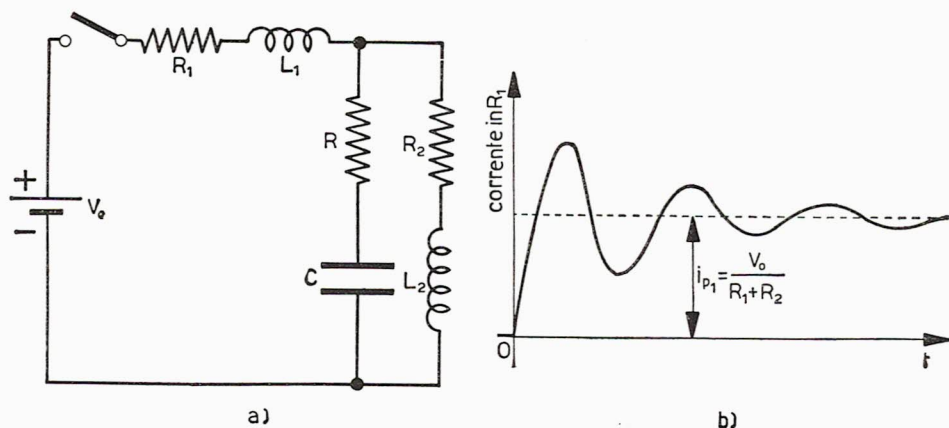



Fig. 8.52-6

(3) L'espressione analitica delle correnti i_1 e i_2 della rete di fig. 8.52-4*a* è infatti del tipo:

$$i_1 = i_{p_1} + A_1\varepsilon^{at} + B_1\varepsilon^{bt}$$

$$i_2 = i_{p_2} + A_2\varepsilon^{at} + B_2\varepsilon^{bt} ,$$

con a e b reali e negativi.

decrescere ma lentamente, con legge esponenziale, poiché C_2 si scarica ora praticamente sulla resistenza R_2, di grande valore ([4]).

Per il circuito di fig. 8.52-6*a*, il quale all'atto della chiusura dell' interruttore entra in regime oscillatorio smorzato, si potrà invece osservare che le correnti nelle due maglie raggiungeranno, partendo da zero, il valore di regime, però compiendo delle pendolazioni più o meno notevoli. In fig. 8.52-6*b* si è riportato l'andamento della corrente circolante nella resistenza R_1 nel caso che lo smorzamento sia abbastanza forte.

8.53 Problemi di applicazione al § 8.5

Esercizio 8.531

Si trovi l'andamento in funzione del tempo della corrente erogata dal generatore e della tensione ai capi della capacità (inizialmente scarica) facenti parte della rete a due maglie riportata in fig. 8.531-1, quando l' interruttore viene chiuso bruscamente.

Soluzione

Si indichi con i_1 la corrente erogata dal generatore di tensione V_0 e con i_2 la corrente che attraversa la resistenza R_2. Allora il valore della tensione v_c ai capi della capacità C si potrà esprimere come caduta di tensione $R_2 i_2$, dato che C ed R_2 sono in parallelo.

D'altronde ciascuna corrente sarà espressa, secondo il solito, come somma del termine permanente con quello transitorio, cioè:

$$i_1 = i_{p_1} + i_{tr_1}$$

$$i_2 = i_{p_2} + i_{tr_2} ,$$

dove nel nostro caso:

$$i_{p_1} = i_{p_2} = \frac{V_0}{R_1 + R_2} ;$$

mentre i termini transitori si metteranno nella forma:

$$i_{tr_1} = A_1 \varepsilon^{at}$$

$$i_{tr_2} = A_2 \varepsilon^{at} ,$$

([4]) L'espressione analitica della tensione v_{c_2} è del tipo:

$$v_{c_2} = A \left(\varepsilon^{-a_1 t} - \varepsilon^{-a_2 t}\right) ,$$

con a_1 e a_2 reali positivi e con $a_1 < a_2$. La tensione v_{c_2} risulta quindi come differenza di due esponenziali decrescenti.

dove a è negativo e rappresenta l' inverso della costante di tempo. Le espressioni analitiche delle correnti i_1 e i_2 diventano perciò:

8.531-1 $$i_1 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} + A_1 \varepsilon^{at}$$

8.531-2 $$i_2 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} + A_2 \varepsilon^{at}.$$

La costante di tempo sarà d'altra parte facilmente calcolabile applicando il teorema di Thévenin fra i punti A e B della rete data. Si ha così (vedi fig. 8.531-2) che:

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = -\frac{1}{a}.$$

Per il calcolo delle costanti A_1 e A_2 si farà ricorso invece alle condizioni iniziali. Si osservi dunque lo schema elettrico della rete data (figura 8.531-1): all' istante $t = 0$ (inizio dell'applicazione della tensione

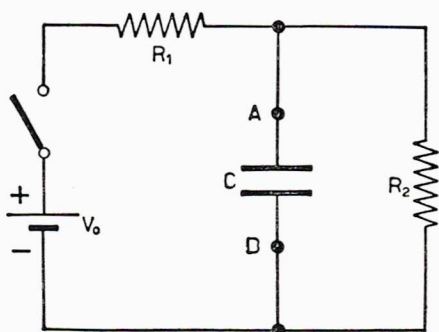
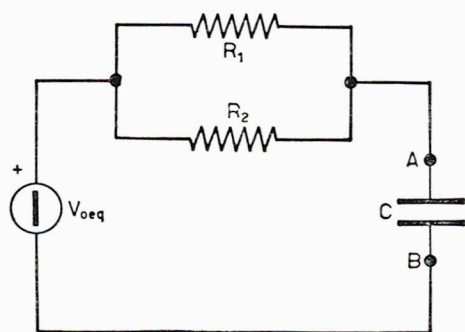



Fig. 8.531-1 *Fig. 8.531-2*

costante V_0), per essere $v = 0$, poiché la capacità è inizialmente scarica, si ha ovviamente che:

$$i_1 = \frac{V_0}{R_1}$$

$$i_2 = 0.$$

Ponendo allora $t = 0$ nelle due equazioni 8.531-1 e 2 deve risultare:

$$\frac{V_0}{R_1} = \frac{V_0}{R_1 + R_2} + A_1$$

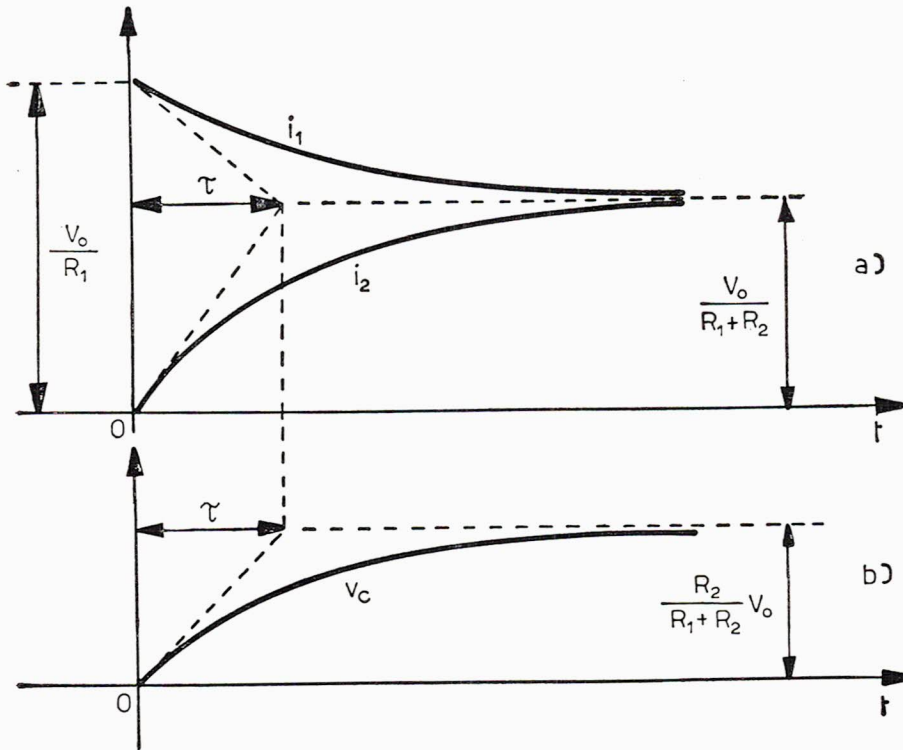



Fig. 8.531-3

$$0 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} + A_2,$$

cosicché le due costanti sono espresse da:

$$A_1 = \frac{V_0}{R_1} - \frac{V_0}{R_1 + R_2}$$

$$A_2 = -\frac{V_0}{R_1 + R_2}.$$

Pertanto la corrente erogata dal generatore avrà la seguente espressione analitica:

$$i_1 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} + \left(\frac{V_0}{R_1} - \frac{V_0}{R_1 + R_2}\right) \varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t};$$

mentre la tensione v_c ai capi della capacità raggiungerà il valore deter-

minato dal partitore di tensione costituito da R_1 ed R_2 con la seguente legge:

$$v_c = R_2 i_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 \left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right).$$

Nella fig. 8.531-3 sono stati riportati gli andamenti di i_1, i_2 e v_c.

Esercizio 8.532

Si tracci il grafico che esprime in funzione del tempo l'andamento della tensione ai capi della capacità C facente parte della rete di fig. 8.532-1, n seguito alla chiusura dell' interruttore.

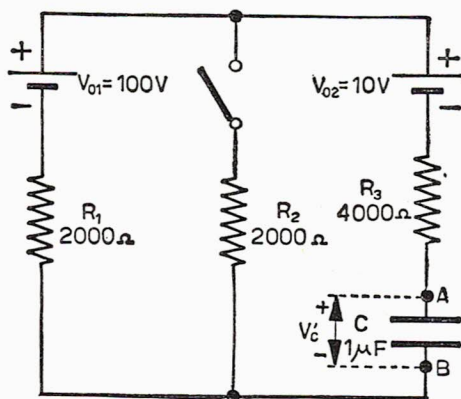



Fig. 8.532-1

Soluzione

La tensione iniziale V_c' (ad interruttore aperto) posseduta dalla capacità C ammonta ovviamente a:

$$V_c' = V_{01} - V_{02} = 90 \text{ volt}.$$

con le polarità segnate in fig. 8.532-1.

La tensione finale V_c'', cioè a transitorio estinto, che si stabilirà ai capi della capacità C con l' interruttore chiuso (fig. 8.532-2) vale invece:

$$V_c'' = \frac{V_{01}}{R_1 + R_2} R_2 - V_{02} = 50 - 10 = 40 \text{ volt}.$$

La capacità durante il transitorio si deve dunque scaricare e ciò avverrà con una costante di tempo che si può calcolare tramite il cir-

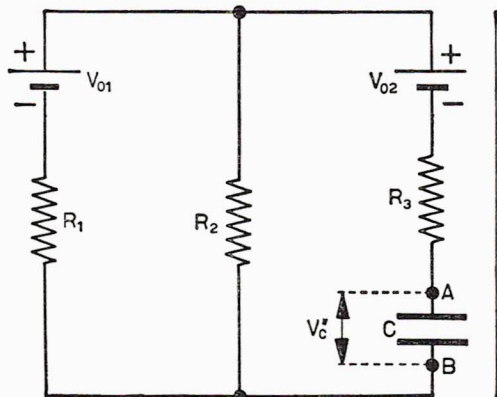
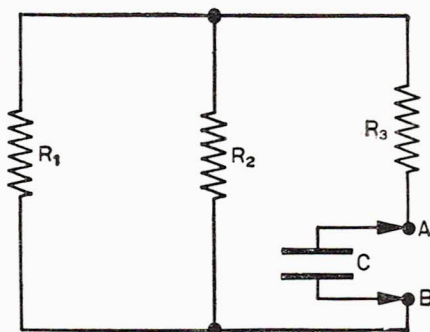



Fig. 8.532-2 *Fig. 8.532-3*

cuito di fig. 8.532-3. Risulta così che:

$$\tau = C\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right) = 10^{-6}\,(1000 + 4000) = 5 \text{ msec}\,.$$

Si hanno ora tutti gli elementi per tracciare l'andamento della tensione di scarica della capacità che, partendo dal valore iniziale V_c', si porterà esponenzialmente a quello V_c'' come appare per l'appunto nel grafico di fig. 8.532-4.

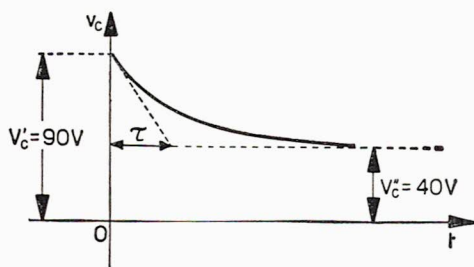



Fig. 8.532-4

Esercizio 8.533

Si trovi quale condizione devono soddisfare i parametri del ponte riportato in fig. 8.533-1 affinché sulla *diagonale* R_{AB}, il cui valore di resistenza si può considerare infinito, non si faccia sentire il transitorio dovuto alla chiusura del tasto.

Soluzione

Si incominci ad osservare che tanto all'inizio come alla fine del transitorio, comunque siano i valori dei parametri della rete elettrica

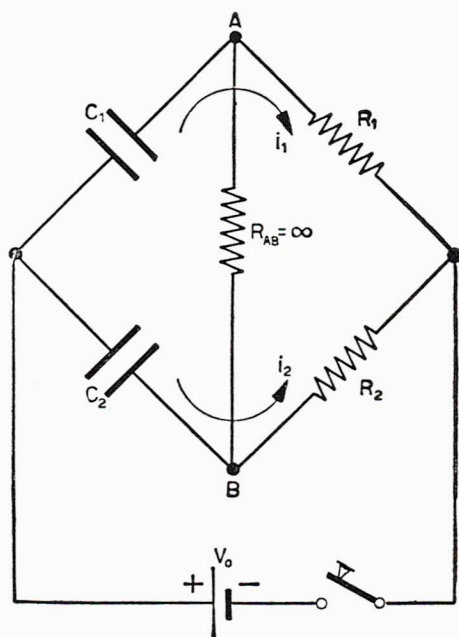



Fig. 8.533-1

assegnata, la tensione V_{AB} è sempre nulla. Infatti all'inizio le due capacità C_1 e C_2 sono scariche, quindi $V'_{AB} = 0$; alla fine le due capacità C_1 e C_2 sono invece cariche entrambe alla stessa tensione V_0 del generatore, il che porta ancora alla condizione $V''_{AB} = 0$.

Perché anche in ogni altro istante del transitorio si verifichi, come richiesto dal problema, che:

$$v_{AB} = 0 ,$$

siccome $v_{AB} = v_{R_1} - v_{R_2}$, dovrà essere:

$$v_{R_1} = v_{R_2} .$$

Esprimendo ora $v_{R_1} = R_1 i_1$ e $v_{R_2} = R_2 i_2$ analiticamente, si ottiene:

$$R_1 \frac{V_0}{R_1} \varepsilon^{-\frac{1}{R_1 C_1} t} = R_2 \frac{V_0}{R_2} \varepsilon^{-\frac{1}{R_2 C_2} t} ,$$

ossia, semplificando, anche:

$$\varepsilon^{-\frac{1}{R_1 C_1} t} = \varepsilon^{-\frac{1}{R_2 C_2} t} ,$$

eguaglianza che dovrà essere verificata per qualsiasi valore di t. Perché

ciò avvenga, le due funzioni esponenziali sopra citate dovranno avere lo stesso esponente, cioè dovrà verificarsi che:

$$\frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{R_2C_2}.$$

Concludendo, se ciascuna coppia di rami *R-C* del ponte presenterà la stessa costante di tempo, cioè se:

$$R_1C_1 = R_2C_2,$$

non vi sarà transitorio sulla *diagonale* R_{AB}.

8.6 4 esercizi completamente svolti sui fenomeni transitori

Esercizio 8.61

Il commutatore che appare nel circuito riportato in fig. 8.61-1 rimane periodicamente nella posizione contrassegnata con 1 per un tempo pari a 10 μsec e nella posizione contrassegnata con 2 per un tempo pari a 0,2 m sec. Si disegni l'andamento in funzione del tempo rispettivamente della tensione ai capi di R_c e di C.

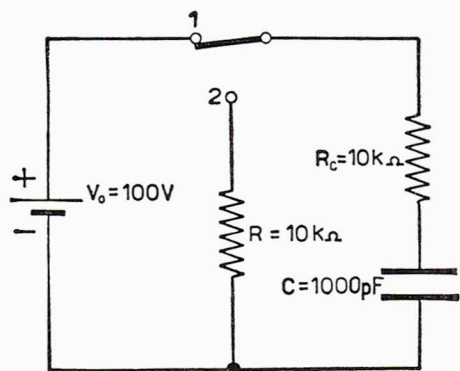



Fig. 8.61-1

Soluzione

La costante di tempo del circuito col commutatore in posizione 1 vale:

$$\tau_1 = R_cC = 10^4 \cdot 10^{-9} = 10^{-5} = 10\ \mu\text{sec};$$

mentre col commutatore in posizione 2 vale:

$$\tau_2 = (R + R_c)\, C = 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-5} = 20\ \mu\text{sec}.$$

Pertanto si può subito dedurre che col commutatore in posizione 1 il condensatore si caricherà parzialmente, poiché $T' = \tau$ (a fine carica si ha che $V_{c_1} = 63{,}2$ volt); mentre nel successivo intervallo di tempo T'' esso si scaricherà completamente, poiché $T'' = 10\ \tau$. È quanto si può vedere dai diagrammi di fig. 8.61-2.

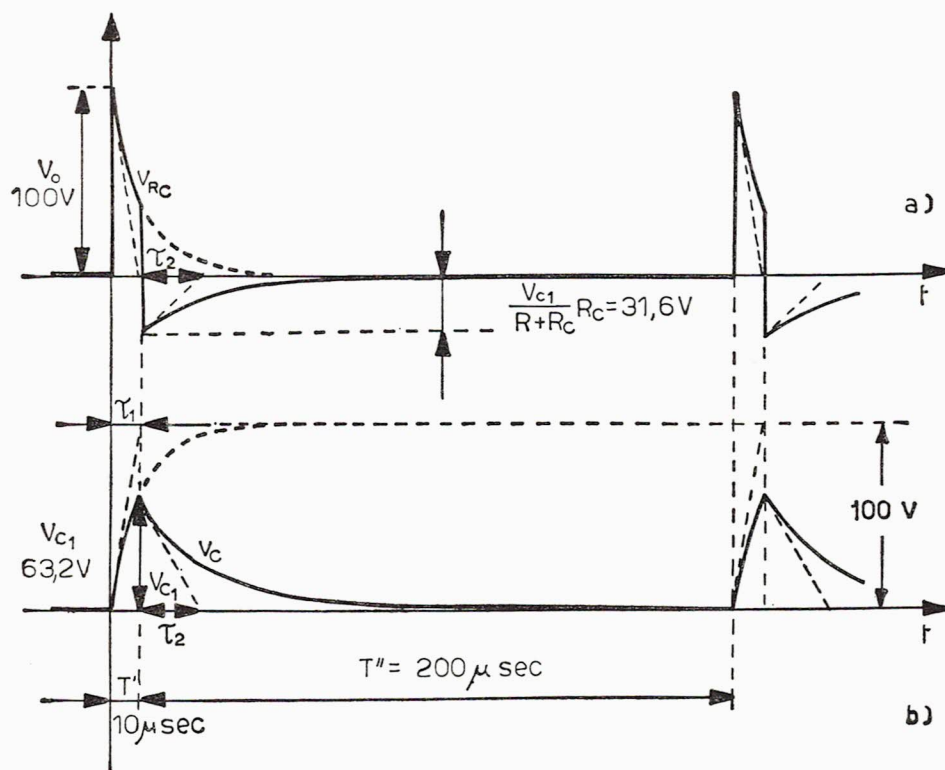



Fig. 8.61-2

Esercizio 8.62

Due condensatori diseguali, caricati preventivamente con tensioni differenti ($V_{c_1} > V_{c_2}$) e tali da determinare le polarità indicate nella fig. 8.62-1, vengono ad un certo istante collegati fra di loro tramite una

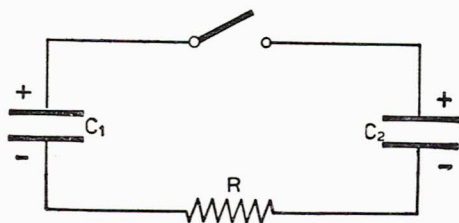



Fig. 8.62-1

resistenza R. Si scriva la legge con la quale varia la tensione ai capi del condensatore C_2.

Soluzione

Alla fine del transitorio i due condensatori C_1 e C_2 debbono essere carichi alla stessa tensione V, poiché nulla è in tali condizioni la corrente nel circuito e quindi la caduta nella resistenza R. I due condensatori risultano quindi in parallelo. Pertanto, a causa della conservazione delle cariche elettriche, la tensione V è legata ai dati del problema dalla seguente relazione:

$$V = \frac{Q_{tot}}{C_{eq}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_{eq}} = \frac{C_1 V_{c_1} + C_2 V_{c_2}}{C_1 + C_2} \; (^1) .$$

D'altronde V è il valore finale di tensione a cui tendono i due condensatori: a tale valore arriveranno con legge esponenziale caratterizzata dalla seguente costante di tempo:

$$\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} ,$$

poiché durante il transitorio i due condensatori sono in serie.

Il condensatore C_2 si caricherà perciò, partendo dalla sua tensione V_{c_2}, a quella V con la seguente legge:

$$V_{c_2} = V_{c_2} + (V - V_{c_2}) (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}) ,$$

del tutto analoga a quella vista nell'esercizio 8.341.

Esercizio 8.63

Le estremità di un condensatore ($C = 0{,}1\ \mu F$), portato da un dispositivo girevole che compie 3000 giri al minuto primo, durante la rotazione vengono a toccare due settori cilindrici metallici (apertura 90°) come appare in fig. 8.63-1. Si tracci l'andamento in funzione del tempo della tensione ai capi del condensatore, partendo col condensatore come in figura.

---

(1) Numericamente, la tensione V risulta compresa fra i valori V_{c_1} e V_{c_2}

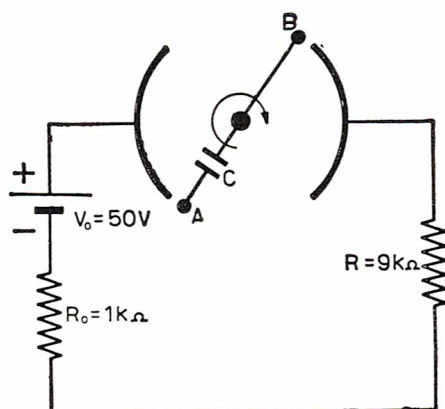



Fig. 8.63-1

Soluzione

La costante di tempo del circuito, quando esso è chiuso, ammonta a:

$$\tau = (R_0 + R)C = 10^4 \cdot 10^{-7} = 1 \text{ msec} .$$

D'altronde si può osservare che il tempo necessario affinché il condensatore compia un giro completo è di 20 millisecondi (infatti a 3000

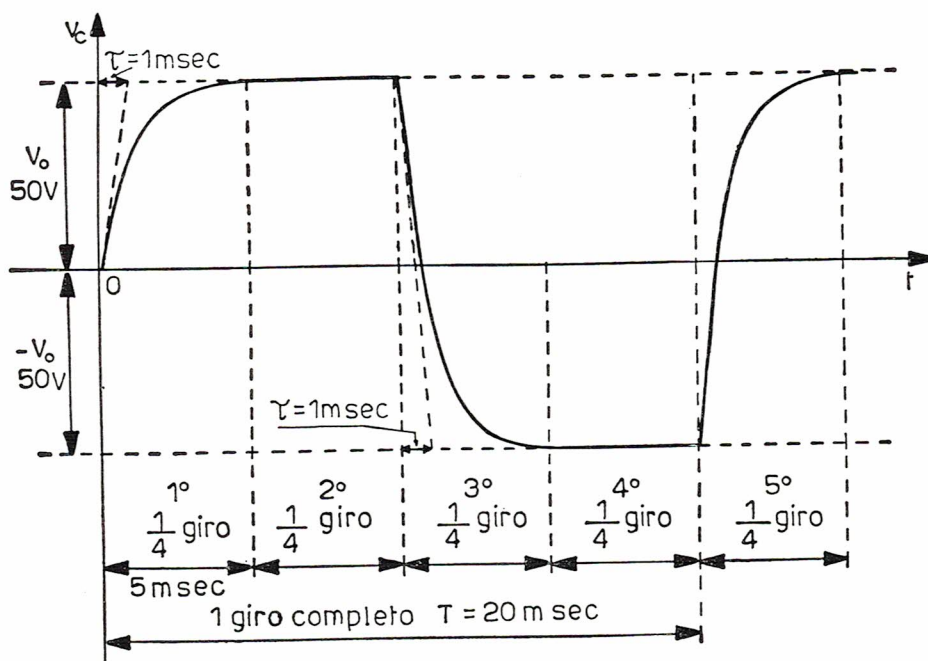



Fig. 8.63-2

giri/min = 50 giri/sec corrisponde $T = \frac{1}{50} = 0{,}020$ sec). Ora, partendo con la rotazione nella situazione riportata in fig. 8.63-1, avviene che il condensatore per il primo quarto di giro della durata quindi di 5 millisecondi, cioè cinque volte la costante di tempo, chiude il circuito e ha il tempo per caricarsi alla tensione V_0 del generatore; poi nel secondo quarto di giro rimarrà così carico (con A positivo rispetto a B). Successivamente, nel terzo quarto di giro, esso invece si scaricherà sul generatore V_0 e quindi si ricaricherà con polarità opposta (con A negativo rispetto a B): tutto ciò avverrà in maniera completa dato che il tempo a disposizione per questa operazione è sempre cinque volte la costante di tempo; così nel successivo quarto di giro il condensatore rimarrà carico alla tensione V_0 (con A negativo rispetto a B) per cui nel quarto di giro successivo esso dovrà scaricarsi e caricarsi quindi alla tensione V_0 (con A positivo rispetto a B), e così via.

Il diagramma della tensione ai capi del condensatore risulta perciò come quello riportato in fig. 8.63-2, ove si considera che la partenza ($t = 0$) avvenga a condensatore completamente scarico.

Esercizio 8.64

Quale valore deve soddisfare la resistenza R facente parte del circuito di fig. 8.64-1 affinché, nell'istante di chiusura del tasto, la corrente in essa assuma l'intensità di 1 ampere?

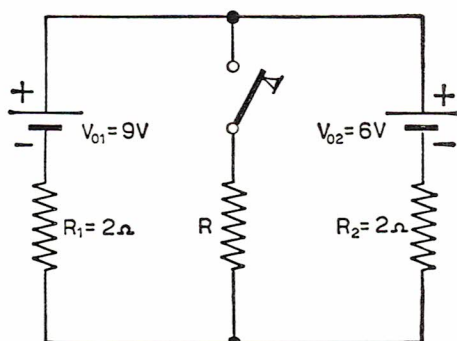



Fig. 8.64-1

Soluzione

È necessario osservare anzitutto che la rete data, essendo costituita da generatori di tensione ideali e da sole resistenze, non può essere sede di fenomeni transitori. Pertanto la chiusura del tasto porterà bruscamente (istantaneamente) la rete al nuovo regime permanente che in questo caso è differente da quello che si aveva a tasto aperto e viceversa.

In conclusione, nell'istante di chiusura del tasto, nella resistenza R passerà una corrente di 1 ampere anche se molto tempo dopo la sua chiusura vi passerà la stessa corrente. Il problema che si presenta è quindi quello di risolvere una rete a due maglie in corrente continua. Applicando ad esempio il principio di Thévenin si trova $R = 6{,}5$ ohm.

SISTEMI POLIFASI 9

9.1 Generalità

9.11 Introduzione

I generatori elettrici e gli utilizzatori che sono entrati fino ad ora nello studio delle correnti alternate hanno avuto fra le varie caratteristiche quella di presentare sempre il minimo numero di morsetti, cioè di presentarne solo due. Proprio per questo fatto essi sono stati indicati nell' Elettrotecnica circuitale col nome di *bipoli*, mentre nella pratica essi vengono denominati sovente con il nome di dispositivi *monofasi*. La ragione di quest' ultima dizione troverà giustificazione più avanti.

È bene sapere d'altronde che nell' Elettrotecnica industriale i generatori elettrici e quindi gli utilizzatori hanno invece, salvo casi eccezionali, più di due morsetti : precisamente un numero tale da costituire o da dar luogo ad un sistema elettrico polifase, anziché monofase.

La ragione di questa apparente complicazione sta nel fatto che i sistemi polifasi, e in particolare quelli trifasi, presentano degli innegabili vantaggi sui sistemi monofasi, come migliore utilizzazione del macchinario elettrico e degli impianti relativi, maggior facilità di trasporto dell'energia elettrica e di conversione della corrente alternata in corrente continua, possibilità d' impiego di un' importante categoria di motori elettrici. Un complesso di vantaggi quindi sia tecnici che economici.

La diffusione dei sistemi polifasi è pertanto assai vasta per cui la loro conoscenza è importante. Naturalmente scopo dello studio di questi sistemi polifasi è quello di poter calcolare correnti, cadute di tensione, potenze in determinati elementi del circuito o della rete polifase. Prima però di affrontare tale problema si rende necessario premettere una serie di definizioni e di nozioni su tali sistemi, ciò che verrà fatto nei prossimi paragrafi.

9.12 Definizioni

Si definisce circuito polifase un sistema costituito da due o più circuiti elettrici alimentati con altrettante *f.e.m.* sinusoidali rigorosamente isofrequenziali fra di loro ma fra le quali esiste sempre una voluta e costante differenza di fase. Si noti che ciascun circuito costituente il sistema polifase rappresenta quella che si dice una fase del sistema stesso. In un sistema bifase si possono quindi individuare due circuiti, in quello trifase tre circuiti, e così via; si vedano a tale proposito ad esempio le figg. 9.12-1*a* e 2*a*.

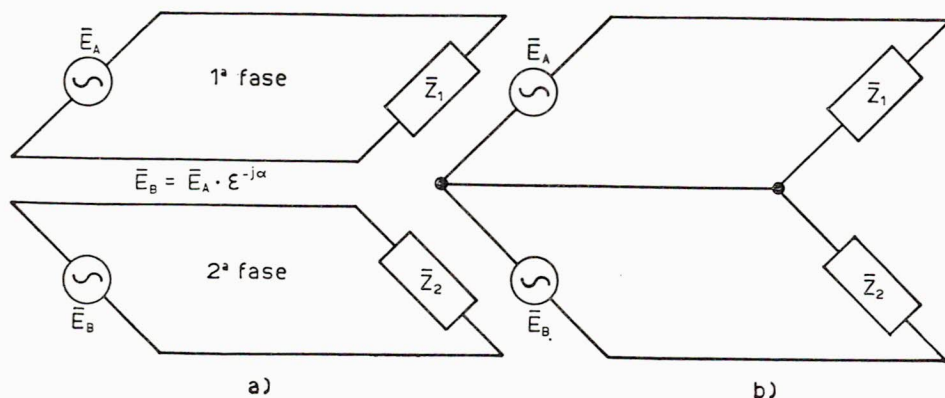



Fig. 9.12-1

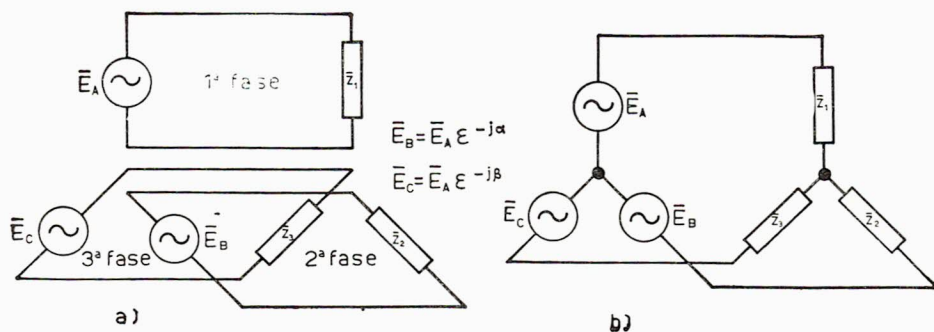



Fig. 9.12-2

Si osservi ancora che i vari circuiti di fase costituenti il sistema polifase non sempre sono indipendenti fra di loro e quindi chiaramente visibili. Il più delle volte infatti i circuiti polifasi sono *composti*, risultando per speciale collegamento delle varie fasi. Nelle figg. 9.12-1*b* e 2*b* sono stati riportati rispettivamente un sistema bifase ed uno trifase composto. L' individuazione delle fasi è dunque assai semplice nel primo caso, molto meno nel secondo (circuito trifase a tre fili).

Pur non essendovi alcuna limitazione sul numero delle fasi, i sistemi polifasi che si possono incontrare in pratica sono il bifase, il trifase, l'esafase, il dodecafase. Il più diffuso però è il trifase, essendo il più semplice e il più economico fra tutti i sistemi polifasi. Poiché dunque il sistema trifase è il più diffuso e poiché d'altronde esso rappresenta il sistema fondamentale il suo studio verrà affrontato nei prossimi paragrafi in maniera molto approfondita.

9.13 Generatori trifasi

Come è stato enunciato nel § 9.12 le tre *f.e.m.* sinusoidali e_A, e_B, e_C che agiscono in un circuito trifase debbono essere rigorosamente isofrequenziali ed avere certe differenze di fase. Si può aggiungere ancora che inoltre le ampiezze E_{AM}, E_{BM}, E_{CM} debbono essere il più possibilmente eguali tra di loro.

Si comprende perciò come le tre forze elettromotrici e_A, e_B, e_C debbano provenire da un unico generatore, poiché solo un unico generatore può soddisfare economicamente quanto sopra richiesto (in particolare la isofrequenzialità e quindi la costanza delle differenze di fase). È necessario allora realizzare un' unica macchina la quale possieda entro di sé i tre bipoli attivi : nasce così l'alternatore trifase il cui funzionamento è basato, come del resto avviene per l'analogo generatore monofase, sul principio dell' induzione elettromagnetica.

Un generatore trifase risulta quindi costituito, si veda la fig. 9.13-1, da una parte girevole (sistema induttore, detto anche più semplicemente induttore), la quale porta diametralmente opposti dei poli magnetici (in fig. 9.13-1 essi sono in numero di due, cioè un nord e un sud, ma in pratica possono essere in numero assai maggiore), e da una parte fissa (indotto) nella quale sono disposti un certo numero di conduttori ; questi costituiscono i cosiddetti avvolgimenti di indotto.

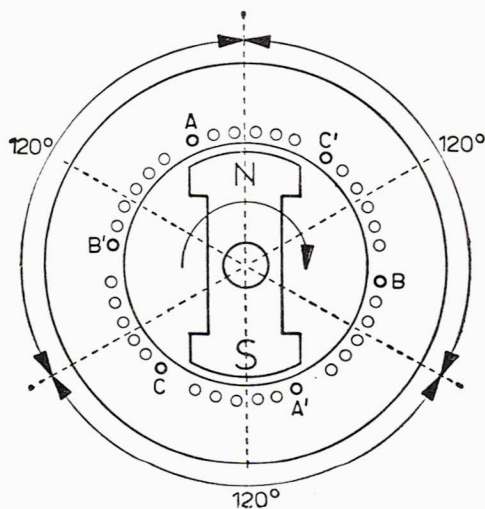



Fig. 9.13-1

Ora, ad ogni avvolgimento corrisponde una fase: pertanto in un alternatore trifase si possono individuare tre avvolgimenti [1]. Poiché d'altronde, per ragioni di semplicità e di praticità, le tre tensioni e_A, e_B, e_C debbono essere sfasate fra di loro dello stesso angolo $\left(\text{quindi } \frac{360°}{3} = 120°\right.$, cui corrisponde un terzo di periodo) gli assi di detti avvolgimenti risulteranno spostati fra di loro, se l' induttore è a due poli, come in fig. 9.13-1, cioè di 120°.

Come avvenga la generazione delle tre tensioni necessarie per costituire un sistema trifase è presto detto. Siccome il sistema induttore è in rotazione, verranno indotte nei singoli avvolgimenti costituenti l' indotto delle *f.e.m.* le quali, poiché l' induttore ruota naturalmente con velocità uniforme, saranno isofrequenziali e risulteranno d'altronde sfasate di 120°. Infatti si comprende come ciascuna *f.e.m.* indotta diventi massima quando l'asse dei poli di induttore coincide con l'asse degli avvolgimenti. Poiché questi ultimi sono distanziati angolarmente sull' indotto di 120° e l' induttore impiega un terzo di periodo per compiere tale distanza angolare, si deduce che il massimo di tensione in ciascun avvolgimento avverrà rispetto al precedente con un ritardo di un terzo di periodo.

Le tensioni generate dall'alternatore trifase possono essere quindi rappresentate come in fig. 9.13-2*a* e quindi anche da una terna di vettori come appare in fig. 9.13-2*b*. Le ampiezze di queste tensioni sono state assunte eguali, come deve essere in pratica. L'alternatore trifase realizza appunto anche questa condizione.

È importante osservare che, essendo le tre fasi dell'alternatore differenti per quanto riguarda lo sfasamento nel tempo delle relative *f.e.m.*

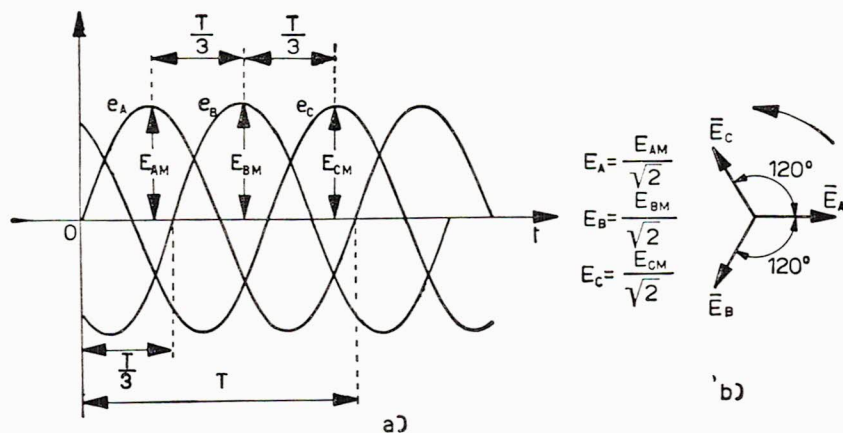



Fig. 9.13-2

[1] In fig. 9.13-1 i conduttori di questi avvolgimenti appaiono sezionati. Il principio e la fine di ciascun avvolgimento sono stati contraddistinti con le stesse lettere (A e A' per il primo avvolgimento, B e B' per il secondo, C e C' per il terzo).

prodotte, diventa necessario contraddistinguerle con numeri (ad esempio 1, 2, 3) o con lettere (ad esempio *A*, *B*, *C*, come è stato fatto nella fig. 9.13-1) al fine di una loro precisa individuazione. D'altronde il verso ciclico delle fasi [2] è del tutto arbitrario. Per convenzione si considera normale quel verso ciclico tale per cui la seconda fase ritarda sulla prima di un terzo di periodo e così la terza fase ritarda sulla seconda di un terzo di periodo. È il caso riportato nelle figg. 9.13-1 e 2.

9.14 Collegamenti delle fasi di un generatore e di un utilizzatore trifase

Si è visto dunque che un generatore trifase risulta fondamentalmente costituito da tre avvolgimenti, uno cioè per fase, e che ai capi di questi si manifestano delle *d.d.p.* sinusoidali sfasate fra di loro di 120°. Trattandosi d'altronde di un sistema di avvolgimenti che dovranno essere collegati è necessario per prima cosa conoscere, e quindi contraddistinguere, le entrate e le uscite di ciascun avvolgimento. Chiameremo ad esempio con *A*, *B*, *C* le uscite rispettivamente del primo, del secondo, del terzo avvolgimento; con *A'*, *B'*, *C'* ne distingueremo invece le entrate (vedi fig. 9.13-1). Il significato di queste lettere è semplice ed è il seguente: se ad un certo istante la tensione ai capi del primo avvolgimento risulta tale da rendere il morsetto *A* positivo rispetto ad *A'* di un certo valore, allora dopo un terzo di periodo sarà il morsetto *B* ad essere positivo rispetto a *B'* dello stesso valore, così come dopo un altro terzo di periodo sarà il morsetto *C* ad essere positivo rispetto a *C'* ancora dello stesso valore.

Ciascun avvolgimento del generatore trifase costituisce naturalmente un bipolo attivo (vedi fig. 9.14-1*a*): d'altronde nulla vieta che esso possa essere rappresentato circuitalmente anche come in fig. 9.14-1*b*,

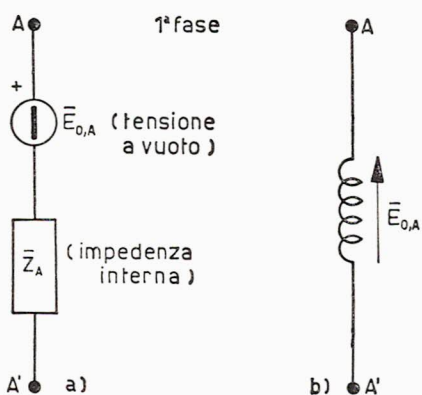



Fig. 9.14-1

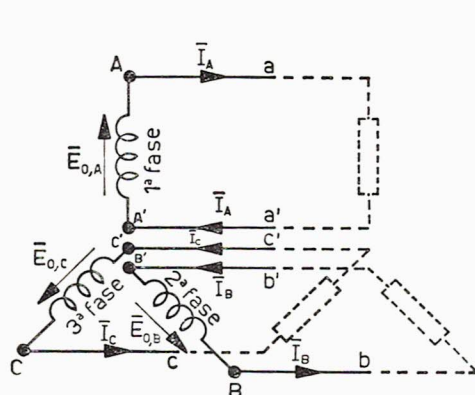



Fig. 9.14-2

[2] Cioè l'ordine di successione delle fasi le quali, come si è detto, sono contraddistinte ad esempio rispettivamente coi numeri 1, 2, 3 o con le lettere *A*, *B*, *C*.

per cui il generatore trifase potrà essere schematizzato, si veda ad esempio la fig. 9.14-2, con tre avvolgimenti disposti di solito nel piano del disegno a 120° per ricordare meglio che essi generano tensioni sfasate fra loro di 120°. Si noti che l'impedenza Z che appare nella fig. 9.14-1*a* (Z_A a dire il vero perché relativa alla 1ª fase) sta a rappresentare l'impedenza interna del generatore (cioè di una sua fase), impedenza interna che non può mai essere nulla dato che il generatore è reale [1] e che quindi si deve sempre considerare presente anche quando si ricorre allo schema grafico di fig. 9.14-1*b*.

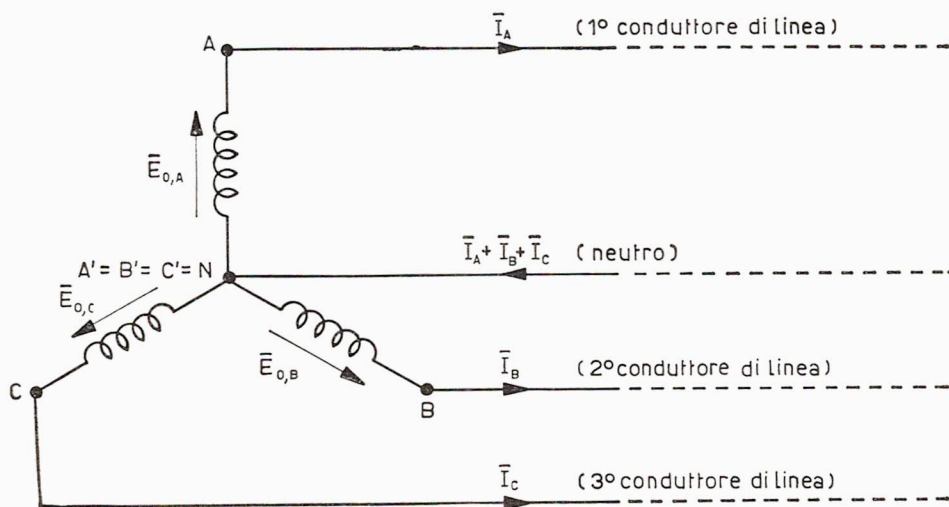



Fig. 9.14-3

Si tratta di vedere quali collegamenti sono possibili per realizzare un sistema trifase con l'alternatore descritto nel precedente paragrafo. Il caso del sistema trifase con le singole fasi indipendenti, come appare in fig. 9.14-2, risulta ovvio. Caratteristica di questo collegamento è che ciascuna impedenza di carico richiama per la propria fase una corrente che risulta assolutamente indipendente dalle altre. Un tale sistema non viene però mai realizzato perché occorrerebbero sei conduttori di collegamento fra l'utilizzatore e il generatore e anche perché l'indipendenza delle correnti può essere realizzata con il collegamento a stella a quattro fili (stella con centro accessibile).

Precisamente gli avvolgimenti di un generatore trifase risultano collegati a stella (simbolo Y) quando, si veda la fig. 9.14-3, vengono unite in un solo morsetto tutte le entrate degli avvolgimenti. Tale morsetto comune, chiamato centro stella, è stato indicato con la lettera N, mentre gli altri rimanenti tre morsetti restano indicati con le loro lettere A, B, C. Con quattro conduttori partenti allora dai morsetti A, B, C, N si

---

(1) Questa impedenza è induttiva, con $X > R$.

realizza così un sistema generatore trifase dove le correnti delle varie fasi sono indipendenti fra di loro, potendo queste circolare nel conduttore comune di ritorno (detto anche neutro o quarto filo) che fa capo al punto N. In sostanza, il circuito di fig. 9.14-3 deriva da quello di figura 9.14-2 qualora si pensi di riunire in un unico conduttore i tre conduttori di ritorno di ciascuna fase (conduttori a', b', c' di fig. 9.14-2).

È importante osservare però che nei sistemi trifasi manca spesso il quarto conduttore, cioè il neutro, cosicché la situazione diventa come quella riportata in fig. 9.14-4. In questo caso le correnti nelle tre fasi del gene-

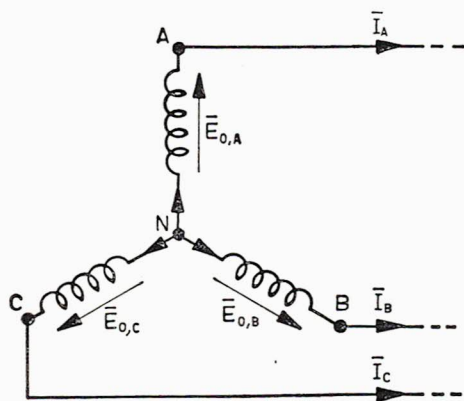
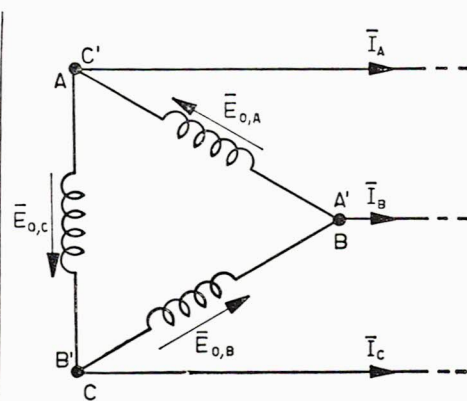



Fig. 9.14-4 *Fig. 9.14-5*

ratore non sono più indipendenti fra di loro poiché devono ubbidire al primo principio di Kirchhoff applicato ad esempio al nodo N, per il quale si verifica appunto che:

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0\,. \tag{9.14-1}$$

Si osservi ancora che quando il generatore è a vuoto, cioè non risulta collegato esternamente ad un carico, le correnti nelle varie fasi sono nulle poiché il collegamento a stella degli avvolgimenti porta ad un sistema circuitale aperto di per sé.

Ma le fasi di un generatore trifase a tre fili possono essere collegate anche a triangolo (simbolo △), come appare in fig. 9.14-5. Si tratta di collegare rispettivamente l' uscita di un avvolgimento con l'entrata di quello successivo e ciò per tutti e tre gli avvolgimenti. Il generatore presenta disponibili allora solo tre morsetti (²) ai quali faranno capo i conduttori di linea. Si noti che i tre avvolgimenti collegati a triangolo danno luogo di per sé ad un circuito chiuso. In esso però, quando il generatore non risulta collegato ad un carico, non vi è circolazione di

---

(²) Indicati con le lettere che contraddistinguono le uscite, quindi con le lettere A, B, C, vedi fig. 9.14-6.

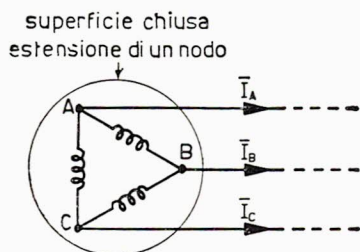



Fig. 9.14-6

corrente poiché in ogni istante la somma delle tre *f.e.m.* e_A, e_B, e_C che agiscono in questo circuito chiuso è nulla. La dimostrazione si presenta facile. Basti considerare ad esempio che è nulla la risultante dei tre vettori $\overline{E}_A$, $\overline{E}_B$, $\overline{E}_C$ rappresentativi delle suddette *f.e.m.* (vedi diagramma vettoriale di fig. 9.13-2*b*) poiché per ipotesi $E_A = E_B = E_C$ e lo sfasamento relativo è di 120°.

Si osservi ancora che, come per il collegamento a stella a tre fili, anche in questo caso le tre correnti erogate dal generatore non sono indipendenti fra di loro, ma devono soddisfare la stessa condizione 9.14-1, scritta per le correnti di linea, poiché si può sempre pensare di applicare il 1° principio di Kirchhoff alla superficie che racchiude il generatore (vedi fig. 9.14-6), superficie intesa come estensione di un nodo.

Per quanto riguarda il carico, questo, dovendo essere trifase (la ragione apparirà più avanti, nel § 9.24), sarà costituito da tre impedenze collegate fra di loro a stella (fig. 9.14-7*a*) o a triangolo (fig. 9.14-7*b*).

Si noti che, nel caso del collegamento a stella, il centro O' [3] potrà

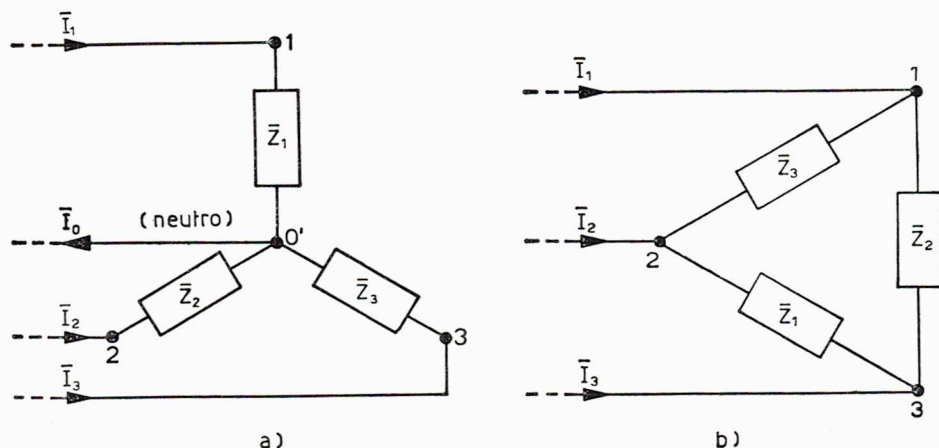



Fig. 9.14-7

[3] In questo capitolo il centro stella di tre impedenze diseguali verrà indicato con O', se sono invece eguali ($\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3$) con O.

essere unito al centro N del generatore, qualora il sistema sia a quattro fili, se invece questo è a tre fili il centro O' potrà anche non essere accessibile (vedi fig. 9.14-8).

Ovviamente la natura del carico può essere qualsiasi. Le tre impedenze costituenti il carico possono essere quindi sia eguali (tutte ohmiche oppure induttive o capacitive) che differenti per natura e valore. Di solito

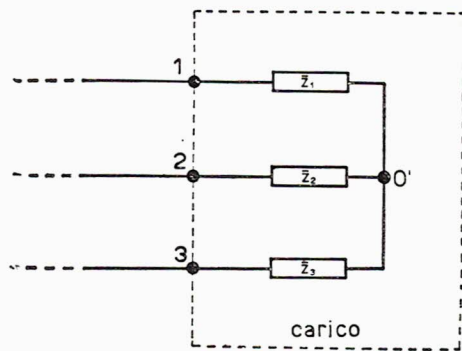



Fig. 9.14-8

in pratica si cercano però di realizzare quelle condizioni che portano all'eguaglianza delle impedenze di fase ($\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$), poiché questo è il solo accorgimento per non dare luogo ai cosiddetti *squilibri* nel circuito. A tale proposito va precisato che quando nelle fasi sono presenti forze controelettromotrici, come è il caso dei motori trifasi, allora per uguaglianza delle impedenze di fase si deve intendere, oltre alla condizione sopra indicata, anche quella che vuole le *f.c.e.m.* delle tre fasi eguali in modulo, ma sfasate ciclicamente fra di loro di 120°.

9.15 Problemi di applicazione al § 9.1

Esercizio 9.151

Si scrivano le espressioni ai valori istantanei delle tre tensioni costituenti un sistema trifase sapendo che l'ampiezza e lo sfasamento di queste tensioni sono eguali fra loro, che l'origine del tempo coincide con lo zero crescente della tensione della prima fase e che la successione delle fasi è quella normale.

Soluzione

L'espressione ai valori istantanei della tensione della prima fase risulta semplicemente:

$$e_A = E_M \operatorname{sen} \omega t ,$$

poiché per $t = 0$ la funzione sinusoidale deve passare per lo zero crescente, come richiesto. D'altronde la tensione e_B della seconda fase è in ritardo sulla e_A di un terzo di periodo, poiché la successione delle fasi è quella normale. Si scriverà perciò:

$$e_B = E_M \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = E_M \operatorname{sen}(\omega t - 120^\circ).$$

Così la tensione e_C della terza fase risulta in ritardo sulla e_A di due terzi di periodo. Si potrà porre pertanto:

$$e_C = E_M \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_M \operatorname{sen}(\omega t - 240^\circ).$$

Esercizio 9.152

Si pongano in forma simbolica (esponenziale) le tensioni del sistema trifase dell'esercizio precedente.

Soluzione

La rappresentazione simbolica delle tre tensioni $\bar{E}_A$, $\bar{E}_B$, $\bar{E}_C$, il cui modulo vale E (naturalmente $E = E_M/\sqrt{2}$) e il cui diagramma vettoriale è quello riportato in fig. 9.152-1, risulta assai facile perché:

$$\bar{E}_A = E,$$

dato che il vettore rappresentante la tensione della prima fase è sull'asse reale.

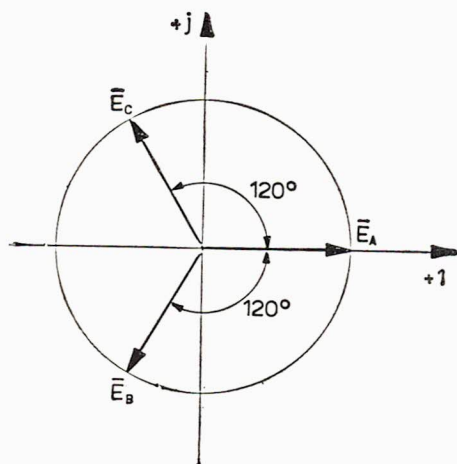



Fig. 9.152-1

Introducendo ora l'operatore vettoriale a modulo unitario $\varepsilon^{-j\,120^0}$, che sfasa quindi di 120° in ritardo, si ha immediatamente che:

$$\bar{E}_B = \bar{E}_A\,\varepsilon^{-j\,120^0} = E\,\varepsilon^{-j\,120^0}\,;$$

così analogamente per la tensione $\bar{E}_C$ introducendo l'operatore vettoriale a modulo unitario $\varepsilon^{-j\,240^0} = \varepsilon^{+j\,120^0}$, che sfasa quindi di 240° in ritardo (o di 120° in anticipo che è la stessa cosa), :

$$\bar{E}_C = \bar{E}_A\,\varepsilon^{-j\,240^0} = E\,\varepsilon^{-j\,240^0} = E\,\varepsilon^{j\,120^0}\,.$$

Esercizio 9.153

Si pongano in forma binomia le espressioni simboliche delle tensioni del sistema trifase dell'esercizio precedente.

Soluzione

Naturalmente l'espressione della tensione della prima fase rimane:

$$\bar{E}_A = E\,.$$

Per la tensione della seconda fase si ha invece:

$$\bar{E}_B = E\,\varepsilon^{-j\,120^0} = E\,(\cos 120^\circ - j \text{ sen } 120^\circ)\,,$$

e ricordando che (vedi anche fig. 9.153-1):

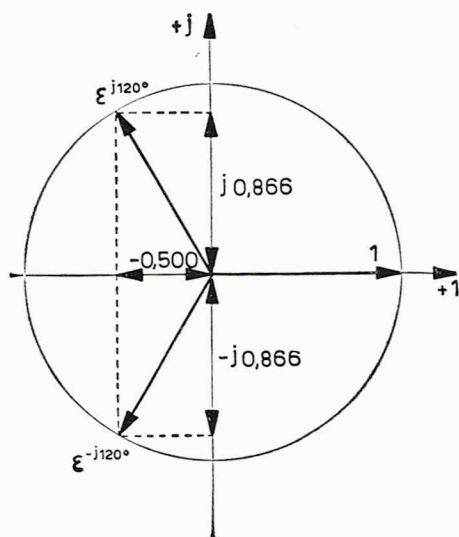



Fig. 9.153-1

$$\cos 120° = -\frac{1}{2} = -0{,}500$$

$$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\,,$$

si ha anche:

$$\bar{E}_B = E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -E\,(0{,}500 + j\,0{,}866)\,.$$

Per la tensione della terza fase risulta invece:

$$\bar{E}_C = E\,\varepsilon^{j\,120°} = E\,(\cos 120° + j \operatorname{sen} 120°)\,,$$

cioè anche:

$$\bar{E}_C = E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E\,(-\,0{,}500 + j\,0{,}866)\,.$$

9.2 Tensioni e correnti nei sistemi trifasi

9.21 Tensioni stellate e tensioni concatenate

Si definisce tensione stellata la tensione (*f.e.m.*, *d.d.p.*, caduta di tensione) relativa ad una fase di un generatore o di un carico trifase collegato a stella [1]; si definisce invece tensione concatenata la tensione (*f.e.m.*, *d.d.p.*, ecc.) relativa a due dei tre morsetti principali (1, 2, 3, o A, B, C) di un dispositivo trifase il collegamento delle cui fasi può essere qualsiasi.

Alcuni esempi serviranno a far comprendere e ad illustrare le peculiarità di questi due tipi di tensioni.

Si consideri un generatore trifase con gli avvolgimenti collegati a stella chiuso su di un carico costituito da tre impedenze pure esse collegate a stella, come appare in fig. 9.21-1, e si inizi ad esaminare le tensioni

---

(1) A fine paragrafo si vedrà che cosa si debba intendere per tensione stellata nel caso in cui le fasi di un generatore o di un carico siano collegate a triangolo o più in generale nel caso in cui il sistema trifase sia a soli tre fili.

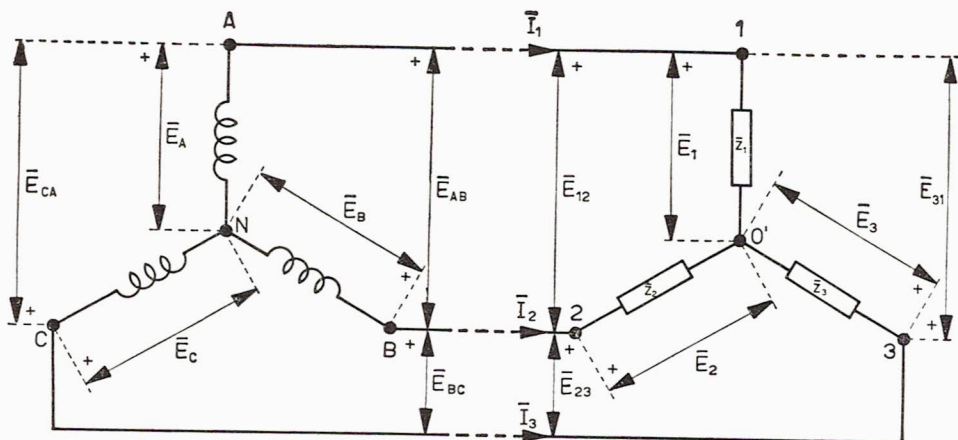



Fig. 9.21-1

del generatore. Si può vedere allora che la tensione $\overline{E}_A$, cioè la *d.d.p* $\overline{E}_{AN}$ (fra i morsetti *A* ed *N*) ai capi dell'avvolgimento costituente la 1ª fase, rappresenta per l'appunto una tensione di fase, precisamente la tensione della prima fase. La stessa cosa può essere ripetuta per la tensione $\overline{E}_B$, cioè per la *d.d.p.* $\overline{E}_{BN}$, che rappresenta la tensione di fase relativa alla seconda fase del generatore, e così via.

La tensione esistente fra i morsetti *A* e *B* del generatore è invece una tensione concatenata, poiché la *d.d.p.* $\overline{E}_{AB}$ interessa direttamente due morsetti principali del generatore. Così le tensioni $\overline{E}_{BC}$ ed $\overline{E}_{CA}$ sono da considerarsi altrettante tensioni concatenate.

Quali sono le proprietà di queste tensioni? Si osservi anzitutto che solo tre sono le tensioni fondamentali di fase (²) (cioè le tensioni $\overline{E}_A$, $\overline{E}_B$, $\overline{E}_C$, intese come *d.d.p.* $\overline{E}_{AN}$, $\overline{E}_{BN}$, $\overline{E}_{CN}$) e solo tre sono le tensioni fondamentali concatenate (cioè le *d.d.p.* $\overline{E}_{AB}$, $\overline{E}_{BC}$, $\overline{E}_{CA}$,) in quanto le *d.d.p.* $\overline{E}_{NA}$, $\overline{E}_{NB}$, $\overline{E}_{NC}$ ed $\overline{E}_{BA}$, $\overline{E}_{CB}$, $\overline{E}_{AC}$ differiscono dalle precedenti, assunte come fondamentali, semplicemente per un segno meno ($\overline{E}_{NA} = -\overline{E}_{AN}$, $\overline{E}_{BA} = -\overline{E}_{AB}$, ecc.).

Per vedere invece quali siano le relazioni esistenti fra le tensioni stellate e quelle concatenate si scrivano, con riferimento allo schema e ai simboli di fig. 9.21-1, le seguenti equazioni:

9.21-1 $$\overline{E}_{AB} = \overline{E}_{AN} + \overline{E}_{NB} = \overline{E}_{AN} - \overline{E}_{BN} = \overline{E}_A - \overline{E}_B$$

9.21-2 $$\overline{E}_{BC} = \overline{E}_{BN} + \overline{E}_{NC} = \overline{E}_{BN} - \overline{E}_{CN} = \overline{E}_B - \overline{E}_C$$

(²) Le tensioni stellate vengono denominate anche tensioni di fase, così come le tensioni concatenate vengono molte volte indicate come tensioni di linea.

$$9.21\text{-}3 \qquad \bar{E}_{CA} = \bar{E}_{CN} + \bar{E}_{NA} = \bar{E}_{CN} - \bar{E}_{AN} = \bar{E}_C - \bar{E}_A \,.$$

Naturalmente vale anche la seguente relazione:

$$9.21\text{-}4 \qquad \bar{E}_{AB} + \bar{E}_{BC} + \bar{E}_{CA} = 0 \ ,$$

come si può facilmente verificare.

Ora le prime tre equazioni dimostrano che, nota la terna delle tensioni stellate, resta definita la terna delle tensioni concatenate [il contrario non è possibile ([3])].

La quarta equazione (9.21-4) afferma invece che le tensioni concatenate di un sistema trifase sono, nella rappresentazione vettoriale, individuate *sempre* da tre vettori la cui risultante è nulla. I tre vettori danno luogo quindi ad un triangolo chiuso. Posta allora sull'asse reale una delle tensioni concatenate, ad esempio la tensione $\bar{E}_{BC}$ (per ragioni di abitudine), il triangolo delle tensioni concatenate assume di conseguenza l'aspetto che appare in fig. 9.21-2*a*, dove il triangolo è equilatero poiché si suppone, come di solito avviene, che $E_{AB} = E_{BC} = E_{CA}$. Si osservi che la terna delle tensioni $\bar{E}_{AB}$, $\bar{E}_{BC}$, $\bar{E}_{CA}$ è caratterizzata, si veda la fig. 9.21-2*b* che riporta la stessa terna di fig. 9.21-2*a*, ma ridisegnata in forma di stella (vettori uscenti da un punto comune detto centro stella), anziché in forma di poli-

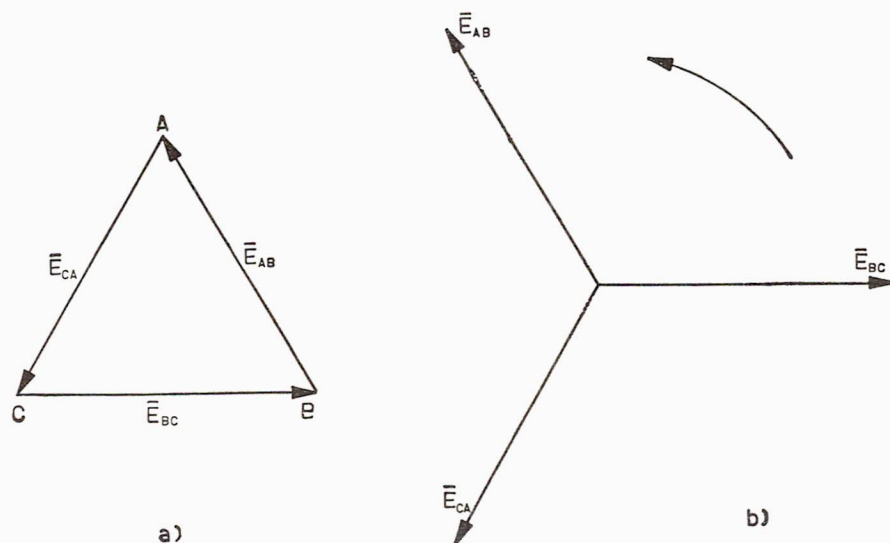



Fig. 9.21-2

([3]) Si osservi infatti che l'equazione 9.21-3 altro non è che una conseguenza delle prime due. Note perciò le tensioni $\bar{E}_{AB}$, $\bar{E}_{BC}$, $\bar{E}_{CA}$ il sistema sopra riportato è per le tre tensioni incognite $\bar{E}_A$, $\bar{E}_B$, $\bar{E}_C$ da considerarsi in due sole equazioni. La soluzione risulta quindi, per questa via, impossibile.

gono (triangolo nei sistemi trifasi), dall'avere la seconda tensione, la $\bar{E}_{BC}$, in ritardo sulla prima poiché il sistema delle tensioni concatenate è stato assunto volutamente normale [o come si dice con linguaggio più preciso tale da costituire una terna *diretta* (4)].

Per quanto riguarda i vettori rappresentanti la terna delle tensioni stellate si può dimostrare, poiché le impedenze di fase del generatore sono fra loro eguali e tali da dar luogo a cadute di tensione trascurabili, che essi hanno la caratteristica di costituire una *stella* di tre vettori uscenti dal baricentro del triangolo rappresentante le tensioni concatenate del sistema dato per appoggiarsi ai vertici omonimi del triangolo stesso. Le tre tensioni stellate $\bar{E}_A$, $\bar{E}_B$, $\bar{E}_C$ risultano quindi come in fig. 9.21-3 dove il punto N, cioè il centro stella, è proprio il baricentro del triangolo ABC (5). Naturalmente si può verificare subito che il diagramma vettoriale ora tracciato interpreta fedelmente le quattro equazioni sopra scritte. Infatti, ad esempio, il vettore $\bar{E}_{AB}$ (fig. 9.21-4) risulta dalla differenza del vettore $\bar{E}_A$ con quello $\bar{E}_B$, come appunto esprime l'equazione 9.21-1 ; la stessa cosa può essere ripetuta per gli altri due vettori del diagramma.

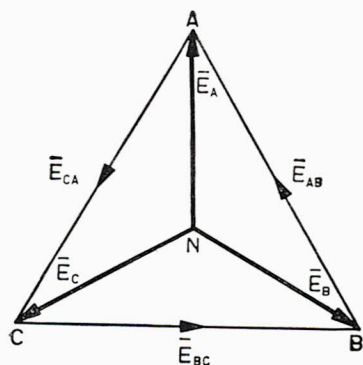
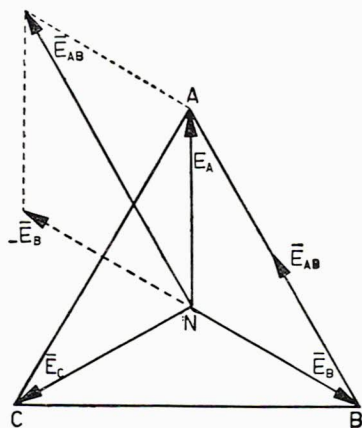



Fig. 9.21-3 *Fig. 9.21-4*

(4) Quando il secondo vettore di una qualsiasi terna è invece in anticipo sul primo vettore (vedi fig. 9.21-2′), allora si dice che la terna è *inversa*.

(5) Anche le tensioni stellate costituiscono una terna diretta. Ciò è una logica conseguenza del fatto che la relativa terna di tensioni concatenate è anch'essa diretta.

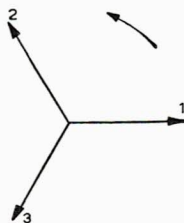



Fig. 9.21-2′

Analoghe considerazioni si possono fare a proposito delle tensioni relative al carico per il quale si possono scrivere, con riferimento alla situazione riportata in fig. 9.21-1, le seguenti equazioni:

9.21-5 $$\bar{E}_{12} = \bar{E}_{10'} + \bar{E}_{0'2} = \bar{E}_{10'} - \bar{E}_{20'} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 \quad ,$$

9.21-6 $$\bar{E}_{23} = \bar{E}_{20'} + \bar{E}_{0'3} = \bar{E}_{20'} - \bar{E}_{30'} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 \quad ,$$

9.21-7 $$\bar{E}_{31} = \bar{E}_{30'} + \bar{E}_{0'1} = \bar{E}_{30'} - \bar{E}_{10'} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 \quad ,$$

9.21-8 $$\bar{E}_{12} + \bar{E}_{23} + \bar{E}_{31} = 0 \, .$$

Ad esempio l'ultima equazione serve ad affermare che le tensioni concatenate costituiscono ancora una terna (diretta) di vettori rappresentabili con un triangolo chiuso (proprietà questa, si ripete, fondamentale per le tensioni concatenate di un sistema trifase), triangolo che di solito risulta equilatero (vedi fig. 9.21-5) poiché $E_{12} = E_{23} = E_{31}$.

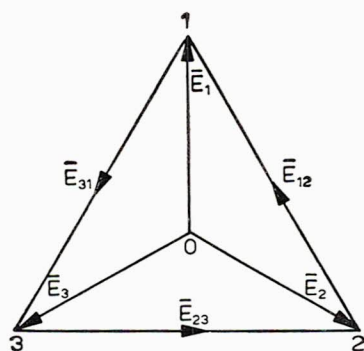



Fig. 9.21-5

Per le tensioni di fase si può dimostrare, come si è visto più sopra per il generatore, che, nel caso in cui le tre impedenze di carico siano eguali fra di loro, esse sono rappresentabili da tre vettori $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ aventi gli estremi che si appoggiano ai vertici omonimi del triangolo formato dalle tensioni concatenate ed uscenti da un punto del piano che coincide con il baricentro O [6] del triangolo stesso (fig. 9.21-5); mentre se le tre impedenze di carico sono diseguali i vettori $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ escono invece da un punto O' non coincidente col baricentro O. Per individuare il punto O' serve quanto verrà descritto nel § 9.24.

È interessante discutere qui il caso in cui il circuito trifase sia realizzato da un generatore e da un carico entrambi con collegamenti a trian-

(6) Detto anche centro *teorico* od *astratto*.

golo, come appare in fig. 9.21-6*a*, ovvero da una linea elettrica a tre fili, come si vede in fig. 9.21-7*a*. In questa evenienza risulta chiaro che le tensioni relative al circuito dato sono tutte concatenate: le tensioni ai capi degli avvolgimenti del generatore sono infatti ora tensioni concatenate (ad esempio la tensione del primo avvolgimento è la tensione concatenata $\bar{E}_{AB}$), e così dicasi per le tensioni ai capi di ciascuna impedenza di carico o fra i conduttori della linea.

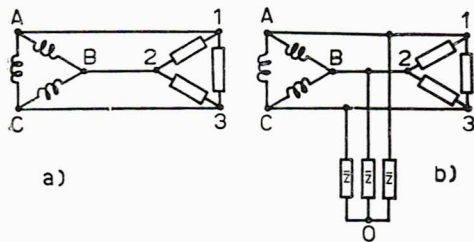



Fig. 9.21-6

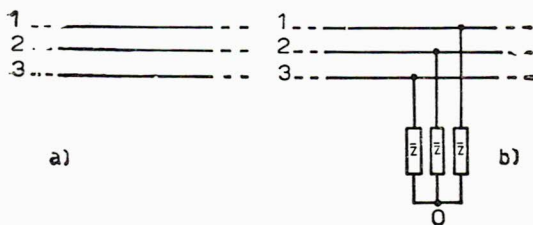



Fig. 9.21-7

Il sistema trifase dato non ha quindi tensioni di fase *concrete*, tuttavia è facile affermare che anch'esso ne è affetto poiché si può sempre immaginare di aggiungere al sistema dato una terna di impedenze collegate fra di loro a stella, come appare in fig. 9.21-6*b* e 7*b* (tali da non disturbare il sistema stesso, ma trattandosi di una questione immaginaria ciò è sempre possibile; d'altronde anche in pratica risulta sempre possibile realizzare con grande approssimazione questa condizione). Naturalmente interessante è solo il caso in cui le tre impedenze della stella aggiunta sono eguali fra di loro (in queste condizioni il centro stella si chiama *artificiale*) perché allora sappiamo che la terna delle tensioni di fase che questa stella di impedenza determina può essere rappresentata da una stella di vettori uscenti dal baricentro *O* del triangolo costituente le tensioni concatenate e appoggiantisi ai vertici omonimi del triangolo stesso (vedi fig. 9.21-5). In questo caso il baricentro *O* rappresenta propriamente il centro stella *teorico* od *astratto* del sistema.

Prima di chiudere il paragrafo si vuole ricordare che nel linguaggio dei sistemi trifasi una terna di tensioni costituita da tre vettori di eguale ampiezza (e quindi necessariamente sfasati fra loro di 120°) viene denominata *simmetrica*, per cui si dice che il sistema trifase è simmetrico nelle sue tensioni; se invece i vettori costituenti la terna sono di diversa ampiezza essa verrà detta *dissimmetrica*, per cui il sistema trifase si dirà allora *dissimmetrico* nelle sue tensioni.

9.22 Correnti di fase e correnti di linea

Si definisce corrente di fase quella corrente che percorre una fase di un circuito trifase; si definisce corrente di linea invece quella corrente che esce dai morsetti principali di un generatore o che entra nei morsetti principali di un carico o che circola su di un conduttore di una linea (onde il nome appunto della corrente in parola).

Seguono ora degli esempi che serviranno ad illustrare le proprietà fondamentali delle correnti di fase e di linea.

Si consideri dunque un generatore trifase, con avvolgimenti collegati fra di loro a stella, alimentante un carico pure esso trifase e le cui impedenze risultano collegate fra di loro a triangolo, come appare in fig. 9.22-1. Non vi è dubbio che le tre correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ che percorrono i conduttori di collegamento fra generatore e carico costituiscono delle correnti di linea [1]. D'altronde le tre correnti $\bar{I}_A$, $\bar{I}_B$, $\bar{I}_C$ che percorrono le fasi dell'alternatore sono da considerarsi invece come correnti di fase salvo il fatto che le stesse, all'esterno dell'alternatore, diventano correnti di linea. Nel collegamento a stella si ha dunque che la terna delle correnti di fase coincide con la terna delle correnti di linea e viceversa ($\bar{I}_A = \bar{I}_1$, $\bar{I}_B = \bar{I}_2$, $\bar{I}_C = \bar{I}_3$).

Si passi ora a considerare il carico le cui tre impedenze $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$ [2] sono collegate fra di loro a triangolo (fig. 9.22-1). È facile osservare che

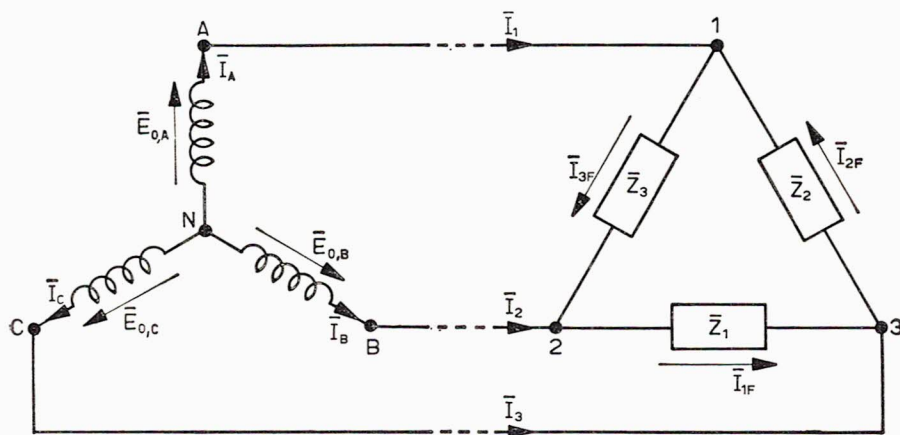



Fig. 9.22-1

---

[1] Per convenzione, le tre correnti di linea percorrono tutti i conduttori principali di linea (1, 2, 3 o A, B, C) nello stesso verso; questo coincide d'altronde con quello dato dal fluire dell'energia elettrica.

[2] Si ricordi che ciascuna impedenza di un triangolo risulta contrassegnata con la sigla che contraddistingue il vertice opposto del triangolo stesso. Così l'impedenza Z_1 è quindi l'impedenza opposta al vertice 1, l'impedenza Z_A è quella opposta al vertice A, e così via.

in ciascuna fase, cioè in ciascuna impedenza del carico, circola una corrente differente da quella di linea. Infatti, ad esempio, la corrente di fase $\bar{I}_{1F}$ [3], che interessa l'impedenza $\bar{Z}_1$ [4], non può coincidere con nessuna delle tre correnti di linea, cioè con nessuna delle correnti entranti nei morsetti principali del carico.

È importante d'altronde vedere quali sono le proprietà delle correnti di fase e di linea per un sistema trifase a tre fili [5]. A tale scopo basterà incominciare a scrivere il primo principio di Kirchhoff per ciascun nodo (vertice del triangolo). Si ha così:

9.22-1 $$\bar{I}_1 = \bar{I}_{3F} - \bar{I}_{2F} \qquad \text{nodo 1}$$

9.22-2 $$\bar{I}_2 = \bar{I}_{1F} - \bar{I}_{3F} \qquad \text{nodo 2}$$

9.22-3 $$\bar{I}_3 = \bar{I}_{2F} - \bar{I}_{1F} \qquad \text{nodo 3} .$$

Per le correnti di linea risulta quindi, conseguenza delle tre equazioni scritte sopra, che:

9.22-4 $$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0,$$

equazione che rappresenta del resto ancora il primo principio di Kirchhoff esteso alla superficie racchiudente l'intero triangolo.

La 9.22-4 impone, come già è stato accennato nel § 9.14, la condizione fondamentale per le correnti di linea quando il sistema è a *tre* fili. Poiché dunque la somma vettoriale delle tre correnti di linea ha risultante nulla queste graficamente potranno essere rappresentate con un triangolo chiuso, come è stato riportato in fig. 9.22-2.

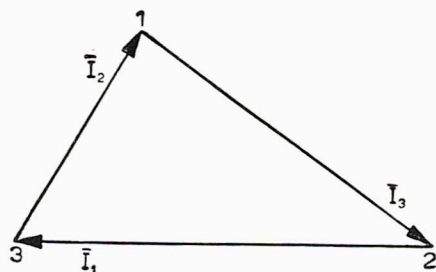



Fig. 9.22-2

(3) L'aggiunta dell'indice F serve a distinguere la corrente di fase da quella di linea.

(4) Il verso di circolazione della corrente di fase è quello determinato dalla rispettiva tensione di fase: quindi, ad esempio, nell'impedenza $\bar{Z}_1$ la corrente $\bar{I}_{1F}$ va dal morsetto 2 al morsetto 3 poiché la relativa tensione E_{23} rende, per convenzione, il morsetto 2 positivo rispetto al morsetto 3.

(5) Nel caso in cui il sistema abbia quattro fili (cioè vi sia anche il neutro) le fasi di questo non possono essere collegate a triangolo (se naturalmente il quarto filo deve servire a qualcosa): pertanto le correnti di fase coincidono con quelle di linea e viceversa.

Le prime tre equazioni servono invece a dimostrare che, note le correnti di fase di un dispositivo avente le fasi collegate a triangolo, risultano pure note le correnti di linea, ma non viceversa (la dimostrazione è analoga a quella condotta nel paragrafo precedente a proposito delle tensioni concatenate e stellate). Si può d'altronde affermare che le tre correnti di fase sono sempre individuabili con una terna di vettori (stella) uscenti da un punto comune (centro) e i cui estremi si appoggiano ai vertici omonimi del triangolo rappresentante le correnti di linea, osservando però che, se le tre impedenze di carico sono eguali fra di loro, il centro della stella coinciderà con il baricentro O del triangolo stesso (caso di fig. 9.22-3*a*), nel caso contrario il centro della stella risulterà un punto O' del piano differente dal baricentro O (caso di fig. 9.22-3*b*). La spiegazione e il calcolo verranno sviluppati nei due prossimi paragrafi. Ciò che ora si può fare è invece controllare che le due costruzioni vettoriali riportate in fig. 9.22-3 rispondono pienamente alle equazioni fondamentali sulle correnti (eqq. 9.22-1, 2, 3, 4). Si consideri, infatti ad esempio, una delle tre correnti di linea, la $\bar{I}_1$, e si verificherà immediatamente che questa, come impone la 9.22-1, risulta dalla differenza (si veda la fig. 9.22-4) fra i vettori rappresentanti rispettivamente la corrente di fase $\bar{I}_{3F}$ e $\bar{I}_{2F}$.

Prima di lasciare queste considerazioni generali sulle correnti è necessario spiegare come si debba interpretare fisicamente l'equazione data

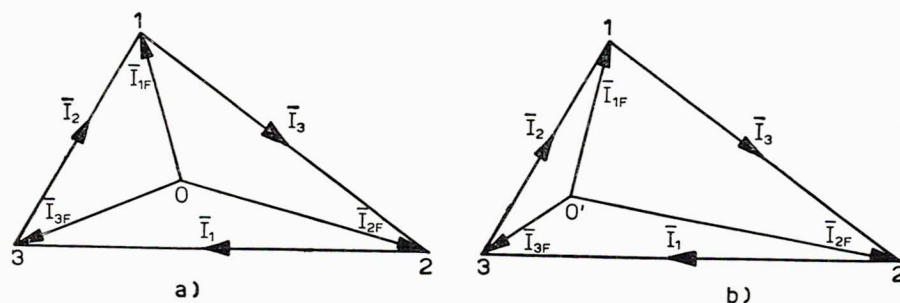



Fig. 9.22-3

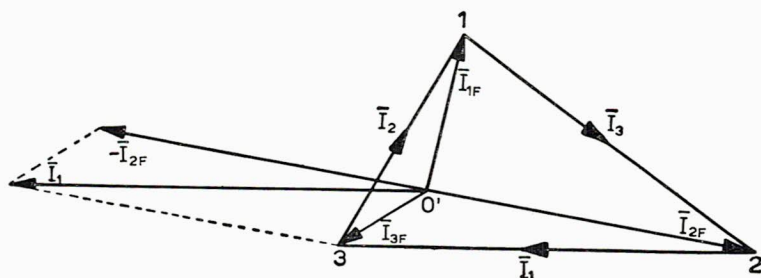



Fig. 9.22-4

in 9.22-4, che naturalmente si può anche scrivere per i valori istantanei nel seguente modo:

9.22-5 $$i_1 + i_2 + i_3 = 0\,.$$

A tale scopo sarà bene rappresentare subito in funzione del tempo le tre correnti di linea i_1, i_2, i_3, cosa che appare in fig. 9.22-5. Dal dia-

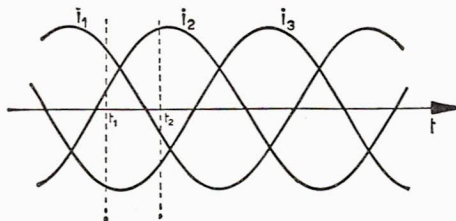



Fig. 9-22-5

gramma di questa figura si deduce allora che, preso un istante qualsiasi, ad esempio quello contrassegnato con t_1, le correnti nei primi due conduttori di linea (i_1, i_2), risultando positive, hanno realmente il verso assegnato sul circuito di fig. 9.22-1, mentre la corrente nel terzo conduttore di linea (i_3), risultando negativa, ha verso opposto a quello che appare nello stesso circuito. La corrente i_3 è quindi una corrente di ritorno, precisamente il ritorno delle correnti i_1 e i_2 ($i_1 + i_2 = - i_3$). Se l'indagine si spostasse all'istante successivo t_2 si arguirebbe, sempre dal diagramma di fig. 9.22-5, che la corrente i_2 è di andata e le correnti i_1 e i_3 (che risultano negative) di ritorno: in sostanza all'istante t_2 sono i conduttori 1 e 3 che permettono il ritorno alla corrente i_1 [$i_2 = -(i_1 + i_3)$].

Si può concludere quindi che nei sistemi trifasi senza neutro in qualsiasi istante vi è sempre per lo meno un conduttore di linea che costituisce il ritorno alle correnti di carico. Il diagramma di fig. 9.22-5 conferma infatti che *non* esiste mai un istante in cui tutte e tre le correnti di linea sono positive (di andata) o negative (di ritorno); d'altronde sempre lo stesso diagramma mostra come lo scambio delle funzioni dei tre conduttori sia ciclico, permanendo ciascun conduttore ovviamente per mezzo periodo nelle funzioni di conduttore di andata e quindi nel successivo mezzo periodo nelle funzioni di conduttore di ritorno.

Si vuole da ultimo ricordare che nel linguaggio dei sistemi trifasi una terna di correnti costituita da tre vettori di eguale ampiezza (e quindi necessariamente sfasati fra di loro di 120°) viene denominata *equilibrata*: in tal caso si dice che il sistema trifase è *equilibrato* nelle sue correnti e quindi nei carichi. Viceversa se i vettori costituenti la terna risultano di diversa ampiezza essa verrà detta *squilibrata*: in tal caso il sistema trifase si dirà *squilibrato* nelle sue correnti e quindi nei carichi.

9.23 Carichi equilibrati

Si consideri un carico costituito da tre impedenze eguali $\bar{Z}$ di note caratteristiche ($\bar{Z} = R + j\,X$) alimentato con un sistema trifase simmetrico nelle tensioni pure esso completamente noto ($E_{12} = E_{23} = E_{31} = V$). Il problema che si presenta ora è quello di indicare come procedere al calcolo delle relative correnti di fase e di linea. Si desidera però fare subito osservare che l'ipotesi fatta circa la *simmetria* delle tensioni di alimentazione, se questa può sembrare un caso particolare, tuttavia è nella pratica una condizione largamente soddisfatta, poiché appunto i generatori trifasi, e quindi le linee di alimentazione, forniscono ai carichi con buona approssimazione tensioni simmetriche. Quest'ipotesi d'altronde, come si vedrà fra breve, comporta un notevole beneficio nei calcoli delle correnti.

Si incominci dunque a considerare il caso in cui le impedenze costituenti il carico trifase siano collegate a stella, come appare in fig. 9.23-1. In tal caso le correnti di linea coincidono con quelle di fase: pertanto sarà sufficiente ad esempio il calcolo di queste ultime. A tale scopo si scrivano, facendo riferimento alle convenzioni usuali ed ai simboli di fig. 9.23-1, le seguenti espressioni delle tensioni di fase:

9.23-1 $$\bar{E}_1 = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 = \bar{Z}\,\bar{I}_1$$

9.23-2 $$\bar{E}_2 = \bar{Z}_2 \bar{I}_2 = \bar{Z}\,\bar{I}_2$$

9.23-3 $$\bar{E}_3 = \bar{Z}_3 \bar{I}_3 = \bar{Z}\,\bar{I}_3\,,$$

dalle quali, sommando, si ottiene l'equazione:

9.23-4 $$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = \bar{Z}\,(\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3)\,.$$

Ricordando però che per i sistemi trifasi senza neutro vale la seguente condizione fondamentale:

9.23-5 $$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0\,,$$

dalla 9.23-4, poiché certamente $Z \neq 0$, si ottiene immediatamente che:

9.23-6 $$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0\,.$$

Quest'equazione dimostra che, nell'ipotesi di un carico costituito da tre impedenze eguali collegate a stella, i vettori rappresentanti le tre tensioni di fase hanno risultante nulla. Per questo motivo la relativa terna di vettori uscirà dal baricentro O [1] del triangolo rappresentante le ten-

---

[1] È noto infatti che se tre vettori (ad esempio tre forze) uscenti da un punto hanno risultante nulla quel punto occupa geometricamente il baricentro del triangolo i cui vertici sono individuati dagli estremi dei vettori dati.

sioni concatenate di alimentazione del carico (fig. 9.23-2). Poiché d'altronde questa dimostrazione non ha avuto bisogno della condizione della simmetria delle tensioni concatenate di alimentazione si deve dedurre che quanto sopra trovato costituisce una proprietà generale dei sistemi trifasi, come del resto è già stato enunciato nel § 9.21, e cioè che: *le tensioni di fase relative ad un sistema costituito da tre impedenze eguali costituiscono sempre una terna di vettori uscenti dal baricentro del triangolo individuato dalle tensioni concatenate* (2).

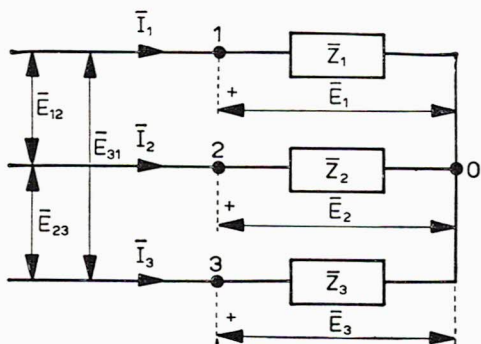



Fig. 9.23-1

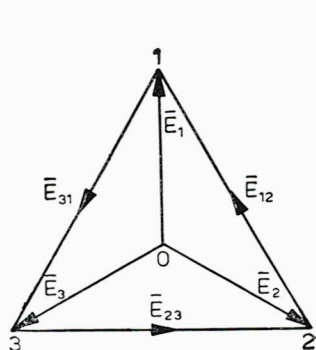



Fig. 9.23-2

Risulta facile dedurre allora nel nostro caso in cui fra i moduli delle tensioni concatenate esiste per l'ipotesi fatta di *simmetria* la seguente condizione:

9.23-7
$$E_{12} = E_{23} = E_{31} = V \text{ (3)}$$

che esiste fra le tensioni di fase quest'altra relazione:

9.23-8
$$E_1 = E_2 = E_3 = E = \frac{V}{\sqrt{3}},$$

come si deduce osservando il diagramma di fig. 9.23-3, ove il triangolo delle tensioni concatenate è equilatero, per l'ipotesi posta in 9.23-7.

Pertanto le correnti di fase, e quindi di linea, risultano espresse dalle seguenti formule:

9.23-9
$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}}$$

---

(2) Questo baricentro rappresenta, come già fu detto, il centro *teorico* del sistema, materializzato appunto dal nodo *O* di tre impedenze uguali collegate a stella.

(3) Solamente in questo capitolo dedicato ai sistemi trifasi, per comodità di simbolismo, verrà indicata con *V* la tensione concatenata anche se questa è perfettamente sinusoidale.

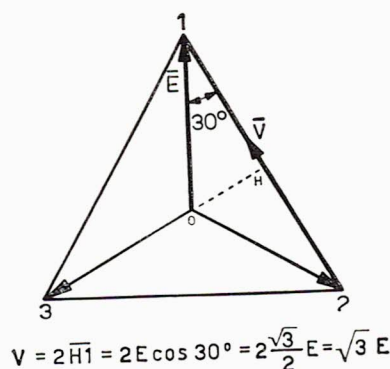



Fig. 9.23-3

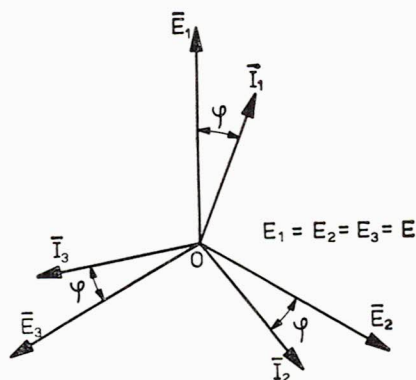



Fig. 9.23-4

9.23-10
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}}$$

9.23-11
$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}} \cdot$$

Ovviamente queste correnti sono tutte eguali in modulo ($I = E/Z = V/\sqrt{3}\,Z$), per la condizione data in 9.23-8. D'altronde esse risultano egualmente sfasate rispetto alle relative tensioni di fase, precisamente dell'angolo φ tale che:

9.23-12
$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{X}{R} \cdot$$

Le correnti di fase e quindi le correnti di linea costituiscono perciò un sistema trifase equilibrato. Esse vengono di solito rappresentate, si veda la fig. 9.23-4, con una stella di tre vettori (eguali) naturalmente sfasati fra di loro di 120° e sfasati rispetto alle relative tensioni di fase dell'angolo φ sopra definito.

Le tre impedenze eguali ($\bar{Z}$) che costituiscono il carico trifase possono presentarsi anche collegate fra di loro a triangolo, anziché a stella, dando quindi luogo al circuito riportato in fig. 9.23-5. In questo caso il calcolo delle correnti di fase, differenti ora da quelle di linea, risulta assai semplice perché le impedenze di carico sono sottoposte all' intera tensione di linea. Si hanno quindi per esse le seguenti espressioni:

9.23-13
$$\bar{I}_{1F} = \frac{\bar{E}_{23}}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{E}_{23}}{\bar{Z}}$$

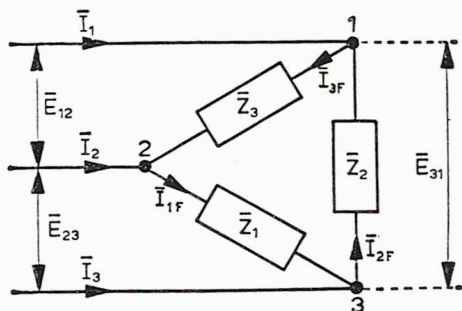



Fig. 9.23-5

9.23-14 $$\bar{I}_{2F} = \frac{\bar{E}_{31}}{\bar{Z}_2} = \frac{\bar{E}_{31}}{\bar{Z}}$$

9.23-15 $$\bar{I}_{3F} = \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}} ,$$

dalle quali, sommando, si ottiene quest'equazione:

9.23-16 $$\bar{I}_{1F} + \bar{I}_{2F} + \bar{I}_{3F} = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{E}_{12} + \bar{E}_{23} + \bar{E}_{31}) .$$

Poiché per i sistemi trifasi, qualunque essi siano, è sempre valida la seguente condizione:

9.23-17 $$\bar{E}_{12} + \bar{E}_{23} + \bar{E}_{31} = 0 ,$$

dalla 9.23-16 si deduce, essendo certamente $\frac{1}{\bar{Z}} \neq 0$, che deve essere:

9.23-18 $$\bar{I}_{1F} + \bar{I}_{2F} + \bar{I}_{3F} = 0 .$$

Ciò dimostra che, quando il carico è costituito da tre impedenze eguali, le correnti di fase hanno risultante nulla. Pertanto i vettori rappresentanti queste tre correnti debbono costituire una stella uscente da un punto (centro O) coincidente con il baricentro del triangolo che ha per vertici gli estremi dei tre vettori stessi: il triangolo d'altronde rappresenta, per quanto già è stato illustrato nel precedente paragrafo, le correnti di linea (vedi fig. 9.23-6).

È importante notare che per la dimostrazione sopra riportata *non* è stato fatto uso di alcuna limitazione circa le tensioni di alimentazione, salvo la naturale condizione 9.23-17 soddisfatta da tutti i sistemi trifasi (simmetrici e dissimmetrici). Si può perciò concludere, come già fu affermato nel § 9.22, *che nel caso di carico costituito da tre impedenze eguali*

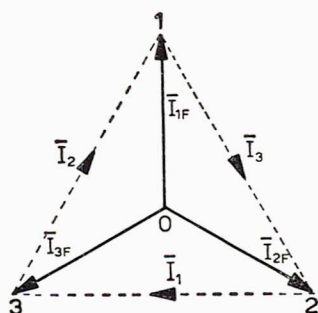



Fig. 9.23-6

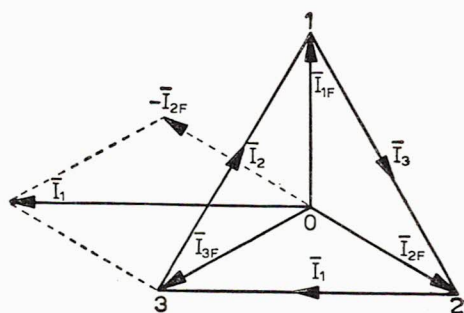



Fig. 9.23-7

i vettori rappresentanti le correnti di fase escono sempre dal baricentro del triangolo costituito dai vettori rappresentativi le correnti di linea.

Naturalmente a questo punto il calcolo delle correnti di linea risulta immediato, poiché :

a) analiticamente, essendo note le correnti di fase, ci si servirà delle tre equazioni fondamentali (1° principio di Kirchhoff applicato rispettivamente ai nodi 1, 2, 3), cioè :

9.23-19 $$\bar{I}_1 = \bar{I}_{3F} - \bar{I}_{2F} = \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}} - \frac{\bar{E}_{31}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{E}_{12} - \bar{E}_{31})$$

9.23-20 $$\bar{I}_2 = \bar{I}_{1F} - \bar{I}_{3F} = \frac{\bar{E}_{23}}{\bar{Z}} - \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{E}_{23} - \bar{E}_{12})$$

9.23-21 $$\bar{I}_3 = \bar{I}_{2F} - \bar{I}_{1F} = \frac{\bar{E}_{31}}{\bar{Z}} - \frac{\bar{E}_{23}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}} (\bar{E}_{31} - \bar{E}_{23})\,.$$

I moduli di dette correnti risultano naturalmente fra loro eguali ($I_1 = I_2 = I_3 = I$) dato che sono eguali quelli delle correnti di fase ($I_{1F} = I_{2F} = I_{3F} = I_F = V/Z$), poiché per ipotesi $E_{12} = E_{23} = E_{31} = V$;

b) graficamente le correnti di linea risultano come quei vettori che congiungono i vertici del triangolo individuato (come più sopra dimostrato) dalla stella delle correnti di fase, si veda la fig. 9.23-7, ove ad esempio la corrente di linea $\bar{I}_1$ è data dal vettore costituente il lato del triangolo opposto al vertice 1. Per fissare il suo verso si dovrà tener conto naturalmente che questa corrente risulta (nodo 1 di figura 9.23-5) differenza fra la corrente $\bar{I}_{3F}$ e $\bar{I}_{2F}$.

Siccome, come si è visto, le correnti di linea sono eguali in modulo il sistema è equilibrato nelle correnti : pertanto il relativo triangolo di vettori assume la forma equilatera. Risulta quindi che fra i moduli delle correnti di linea e di fase esiste la seguente relazione :

9.23-22 $$I = \sqrt{3}\, I_F\,,$$

come si deduce dalla fig. 9.23-8.

Per riferire ora le due terne di correnti (di fase e di linea) alla terna delle tensioni agenti sul carico (la terna delle tensioni in questo caso è unica poiché tensioni di fase e tensioni concatenate coincidono) basterà calcolare lo sfasamento φ che le *correnti di fase* hanno rispetto alle relative *tensioni di fase* (che qui coincidono con quelle di linea). Naturalmente l'angolo φ è ancora determinato dalla relazione trovata in 9.23-12. Risulta così la costruzione vettoriale di fig. 9.23-9, ove sull'asse reale è stato posto il vettore $\bar{E}_{23}$, cioè la tensione della prima fase ($\bar{Z}_1$).

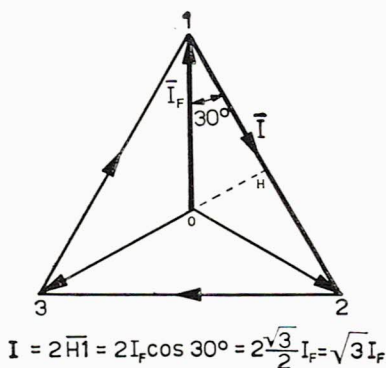
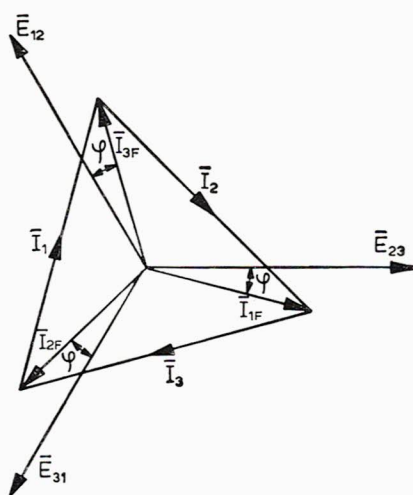



Fig. 9.23-8 *Fig. 9.23-9*

La conclusione che si può trarre da questo paragrafo è la seguente: l'uguaglianza delle tre impedenze costituenti le tre fasi del carico (trifase) determina, qualora il sistema di alimentazione sia simmetrico nelle tensioni, tre correnti di linea perfettamente eguali in modulo. In queste condizioni è quindi sufficiente in pratica calcolare la corrente di un qualsiasi conduttore di linea o anche di fase (se il collegamento è a triangolo la corrente di linea risulta allora $\sqrt{3}$ volte più grande di quella di fase). Questa situazione ha validità, si ripete, solo se il sistema trifase, oltre che simmetrico nelle tensioni, è equilibrato nelle correnti cioè, come si dice con terminologia analoga, se i carichi sono *equilibrati.*

9.24 Carichi squilibrati

Quando le tre impedenze costituenti il carico trifase non sono eguali fra di loro si dice che il carico è squilibrato. In questo caso, pur rimanendo sempre l'ipotesi della simmetria nelle tensioni di alimentazione per le ragioni già dette, il calcolo delle correnti si fa più complicato ri-

spetto al caso riportato precedentemente, come ora si avrà infatti modo di vedere.

Si incominci dunque a considerare il caso più semplice che si può presentare, quello cioè costituito da tre impedenze diseguali ($\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$, $\bar{Z}_3 = R_3 + jX_3$) collegate fra di loro a triangolo, come appare in fig. 9.24-1. Il calcolo analitico delle correnti (non

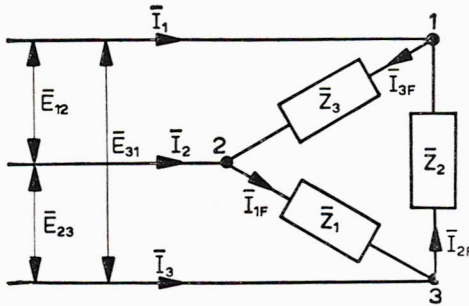



Fig. 9.24-1

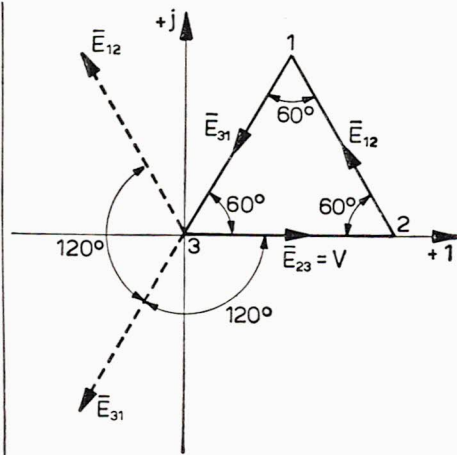



Fig. 9.24-2

quello numerico) è in questo caso ancora abbastanza semplice. Infatti, essendo per ipotesi completamente note le tensioni di linea, le quali possono essere ad esempio poste in questa forma (vedi fig. 9.24-2):

9.24-1 $$\bar{E}_{12} = V\, \varepsilon^{j\,120^\circ}$$

9.24-2 $$\bar{E}_{23} = V$$

9.24-3 $$\bar{E}_{31} = V\, \varepsilon^{-j\,120^\circ},$$

le correnti di fase risulteranno subito individuate come segue:

9.24-4 $$\bar{I}_{1F} = \frac{\bar{E}_{23}}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{\bar{Z}_1}\, V$$

9.24-5 $$\bar{I}_{2F} = \frac{\bar{E}_{31}}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{\bar{Z}_2}\, V \varepsilon^{-j\,120^\circ}$$

9.24-6 $$\bar{I}_{3F} = \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{\bar{Z}_3}\, V \varepsilon^{j\,120^\circ}.$$

Queste correnti si presenteranno d'altronde sfasate rispetto alle rela-

tive tensioni di fase (che qui coincidono con quelle di linea) dei seguenti angoli :

9.24-7 corrente $\overline{I}_{1F}$ angolo φ_1 $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\dfrac{X_1}{R_1}$

9.24-8 corrente $\overline{I}_{2F}$ angolo φ_2 $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\dfrac{X_2}{R_2}$

9.24-9 corrente $\overline{I}_{3F}$ angolo φ_3 $\operatorname{tg}\varphi_3 = -\dfrac{X_3}{R_3}$,

come è stato riportato nel diagramma vettoriale di fig. 9.24-3.

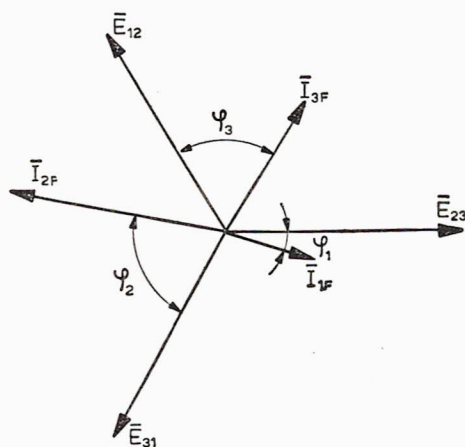



Fig. 9.24-3

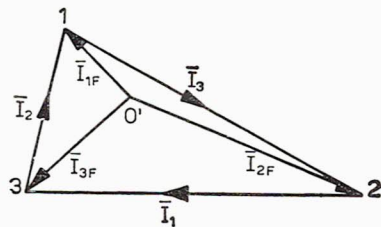



Fig. 9.24-4

Per il calcolo delle correnti di linea, note le correnti di fase, si farà ricorso alle già ben note formule .

9.24-10 $$\overline{I}_1 = \overline{I}_{3F} - \overline{I}_{2F}$$

9.24-11 $$\overline{I}_2 = \overline{I}_{1F} - \overline{I}_{3F}$$

9.24-12 $$\overline{I}_3 = \overline{I}_{2F} - \overline{I}_{1F}\,,$$

esprimenti il 1° principio di Kirchhoff applicato rispettivamente ai nodi 1, 2, 3.

Il problema è stato così analiticamente risolto e, come si vede, in maniera assai svelta. I calcoli risultano invece più laboriosi, poiché qui le tre correnti di fase e quindi le tre correnti di linea hanno intensità e sfasamenti differenti. Ovviamente non è più vero che il valore delle correnti di linea risulta ora $\sqrt{3}$ volte quello delle correnti di fase. Calco-

late dunque queste ultime correnti, quelle di linea dovranno essere trovate, una alla volta, necessariamente tramite le formule 9.24-10,11,12.

Naturalmente le tre correnti di linea saranno sempre rappresentate da tre vettori costituenti un triangolo che però non risulterà più equilatero (il sistema è infatti squilibrato nelle correnti), mentre la terna rappresentante le correnti di fase avrà il suo centro O' in un punto differente dal baricentro O del triangolo (fig. 9.24-4), essendo questa un'altra proprietà dei sistemi squilibrati, come già si disse nel § 9.22.

Maggiori complicazioni di calcolo si hanno quando le tre impedenze costituenti il carico squilibrato sono collegate a stella, come appare in fig. 9.24-5. Tutto questo perché non è nota la terna delle tensioni di fase determinate dal carico. Della terna si sa solamente che il suo centro O' non coincide con il baricentro O del triangolo rappresentante le tensioni concatenate : ma ciò è troppo poco. D'altronde la soluzione del problema, cioè il calcolo delle correnti di linea (o di fase che è lo stesso) e quello delle tensioni di fase, può essere condotto in due modi distinti, come adesso si avrà modo di vedere.

Il primo ricorre alla trasformazione stella-triangolo (sempre possibile come è stato dimostrato nel § 7.3 del capitolo 7). In tal modo il carico equivalente, si veda la fig. 9.24-6, risulta costituito da tre impe-

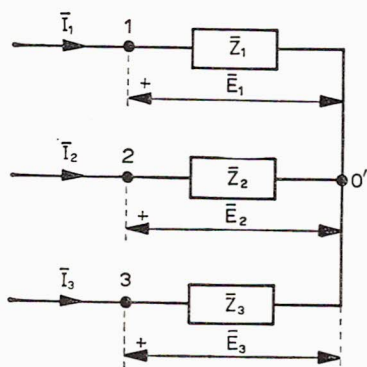
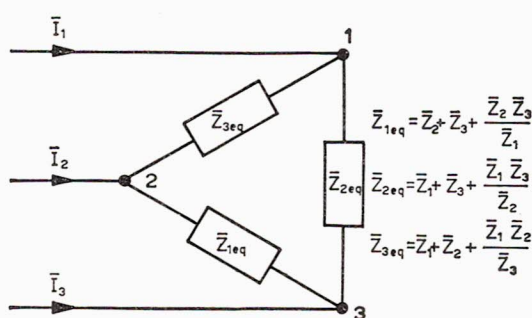



Fig. 9.24-5 *Fig. 9.24-6*

denze, ancora diseguali, però collegate a triangolo : pertanto il problema del calcolo delle tre correnti di linea $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ può essere impostato e risolto con lo stesso criterio esaminato precedentemente.

Naturalmente, una volta note le correnti di linea, risulteranno assai facilmente calcolabili le tre tensioni di fase, poiché (fig. 9.24-5) :

9.24-13 $$\bar{E}_1 = \bar{Z}_1\bar{I}_1 \quad , \quad \bar{E}_2 = \bar{Z}_2\bar{I}_2 \quad , \quad \bar{E}_3 = \bar{Z}_3\bar{I}_3 .$$

Il secondo metodo è in certo qual modo l' inverso del precedente : esso calcola prima le tensioni di fase $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$ per risalire quindi alle correnti di linea $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ tramite le formule 9.24-13. Per capire come ciò sia possibile si incominci ad osservare il diagramma vettoriale delle ten-

sioni riportato in fig. 9.24-7*a*. Ora ci si accorge che le tensioni di fase sarebbero note se fosse noto in lunghezza e direzione il segmento OO', cioè quel segmento che collega il centro stella O', il quale rappresenta il centro concreto del sistema, col punto O, centro astratto del sistema, individuato dal baricentro del triangolo rappresentante le tensioni concatenate e quindi noto.

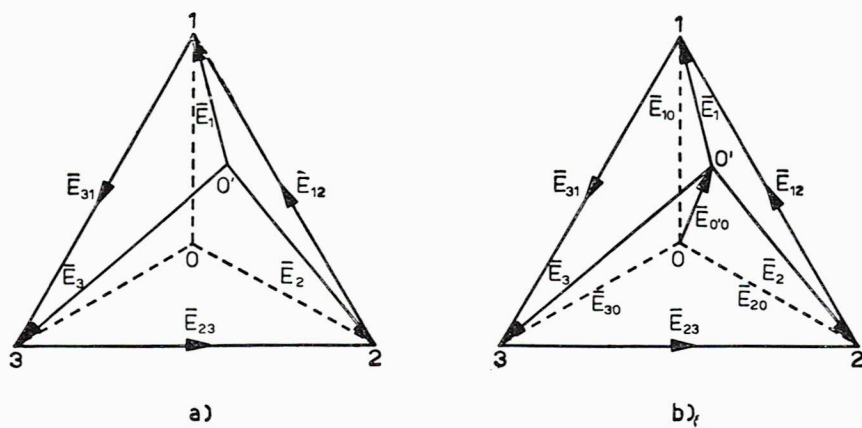



Fig. 9.24-7

È necessario a questo proposito osservare che il segmento orientato OO', o meglio il vettore OO', si veda anche il diagramma vettoriale di figura 9.24-7*b*, rappresenta una tensione, precisamente la differenza di potenziale che esiste fra il centro concreto O' e quello teorico O del sistema. Poiché quest'ultimo può essere realizzato con tre impedenze eguali ($\bar{Z}$) collegate a stella, la tensione $E_{0'0}$ è quella che praticamente si può avere fra i punti O' e O del circuito di fig. 9.24-8.

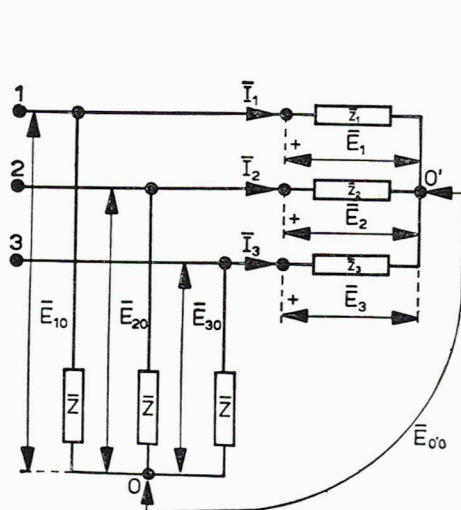



Fig. 9.24-8

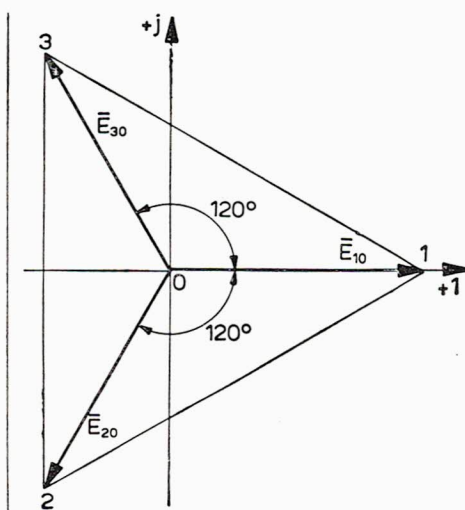



Fig. 9.24-9

Tutto allora si basa sul calcolo del vettore $\bar{E}_{0'0}$, il quale può essere condotto d'altronde abbastanza facilmente osservando, si veda la figura 9.24-7*b*, che esso è legato ai vettori tensione di fase dalle seguenti relazioni :

9.24-14 $$\bar{E}_1 = \bar{E}_{10} - \bar{E}_{0'0}$$

9.24-15 $$\bar{E}_2 = \bar{E}_{20} - \bar{E}_{0'0}$$

9.24-16 $$\bar{E}_3 = \bar{E}_{30} - \bar{E}_{0'0} .$$

D'altra parte si ha (vedi circuito di fig. 9.24-5) che:

9.24-17 $$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1}$$

9.24-18 $$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2}$$

9.24-19 $$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} ,$$

per cui, sommando le tre espressioni ora scritte, si ricava la seguente equazione :

9.24-20 $$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} .$$

Ricordando però che : $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$, poiché il circuito dato non ha neutro, e facendo ricorso alle espressioni scritte in 9.24-14, 15, 16, dalla 9.24-20 si ottiene quest'altra equazione :

9.24-21 $$\frac{\bar{E}_{10} - \bar{E}_{0'0}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_{20} - \bar{E}_{0'0}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_{30} - \bar{E}_{0'0}}{\bar{Z}_3} = 0 ,$$

che risolta rispetto all' unica incognita $\bar{E}_{0'0}$ (infatti le tensioni di fase $\bar{E}_{10}$, $\bar{E}_{20}$, $\bar{E}_{30}$ sono facilmente ricavabili da quelle concatenate, per ipotesi simmetriche) fornisce l'espressione cercata :

9.24-22
$$\bar{E}_{0'0} = \frac{\dfrac{\bar{E}_{10}}{\bar{Z}_1} + \dfrac{\bar{E}_{20}}{\bar{Z}_2} + \dfrac{\bar{E}_{30}}{\bar{Z}_3}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_1} + \dfrac{1}{\bar{Z}_2} + \dfrac{1}{\bar{Z}_3}} \quad (^1),$$

dove, si veda la fig. 9.24-9, per la condizione di *simmetria* delle tensioni concatenate, si ha appunto che:

9.24-23
$$\bar{E}_{10} = \frac{V}{\sqrt{3}}$$

9.24-24
$$\bar{E}_{20} = \frac{V}{\sqrt{3}} \varepsilon^{-j\,120°}$$

9.24-25
$$\bar{E}_{30} = \frac{V}{\sqrt{3}} \varepsilon^{j\,120°}.$$

Determinato così il vettore $\bar{E}_{0'0}$, risultano note le vere tensioni di fase tramite le espressioni 9.24-14, 15, 16 e quindi le correnti di fase $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ tramite le formule 9.24-17, 18, 19. Per gli angoli di sfasamento φ_1, φ_2, φ_3 fra le correnti di fase (qui sono anche di linea) e le relative tensioni di fase valgono ovviamente ancora le espressioni trovate in 9.24-7, 8, 9. Il problema si presenta così completamente risolto.

(1) Quest'espressione poteva essere calcolata assai più facilmente tramite il principio di Millman applicato ad esempio al circuito di fig. 9.24-8', circuito del tutto equivalente a quello di fig. 9.24-8, ma, allo scopo, più evidente.

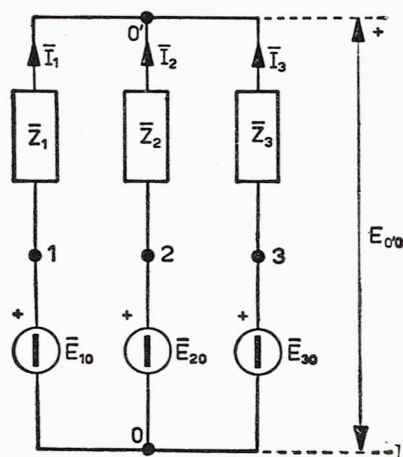



Fig. 9.24-8'

Si osservi che quanto è stato esposto sopra può essere applicato anche nel caso in cui venga a mancare l'ipotesi della simmetria nelle tensioni di alimentazione. Naturalmente ora queste non costituiranno più un triangolo equilatero. Il calcolo risulterà così ulteriormente appesantito, non essendo valide le espressioni date in 9.24-4, 5, 6 e 9.24-23, 24, 25. I sistemi trifasi dissimmetrici nelle tensioni e squilibrati nelle correnti costituiscono dunque il massimo grado di laboriosità per la risoluzione dei circuiti trifasi, non solo, ma, cosa assai più importante, costituiscono nella pratica fonti di inconvenienti tanto più gravi quanto più forte è lo squilibrio. Per questo motivo la condizione ideale di carico si ha quando esso è veramente trifase e le impedenze di carico ubbidiscono alla seguente condizione : $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3$.

Si vuol far osservare ancora che il caso costituito da un circuito trifase squilibrato con neutro (cioè con quarto filo, come è quello della fig. 9.24-10), caso molto comune in pratica perché rappresentato ad esem-

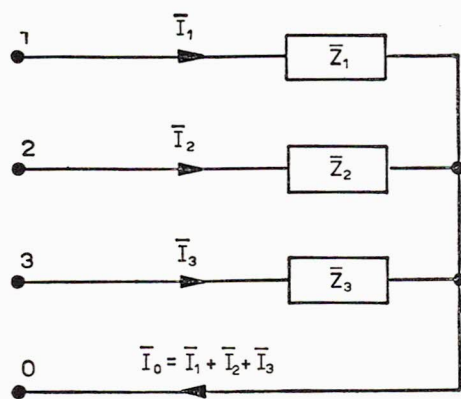



Fig. 9.24-10

pio dagli impianti di illuminazione domestica (monofase stellata), non determina alcuna difficoltà di calcolo per il fatto che, pur essendo il carico costituito da tre impedenze a stella diverse fra di loro, sono perfettamente conosciute le tensioni che agiscono su queste, poiché dette tensioni sono quelle di alimentazione del sistema trifase, per ipotesi ovviamente note [2]. Si osservi d'altra parte che qui gli effetti dello squilibrio del carico si fanno risentire sul quarto filo, ove circola la somma delle tre correnti di linea ($\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \neq 0$), così come nel caso precedente di carico squilibrato senza neutro essi si facevano risentire sul potenziale del centro stella del sistema, lato utilizzatori.

---

(2) Sono queste le tensioni $\overline{E}_{10}$, $\overline{E}_{20}$, $\overline{E}_{30}$, le quali di solito sono tutte eguali in modulo.

9.25 Considerazioni sullo studio dei circuiti trifasi

La risoluzione dei circuiti trifasi prospettata nei precedenti paragrafi ha mostrato come il problema sia stato affrontato sempre studiando in *blocco* il circuito trifase stesso, cioè prendendo in esame contemporaneamente tutte e tre le fasi. Questo modo di procedere, che risulta indubbiamente molto aderente alla realtà, il più delle volte non si presenta però né rapido né facile.

Ora è noto che per un circuito trifase, che qui si considererà ridotto ai minimi termini, cioè costituito da un solo generatore collegato ad un unico carico, sono sempre definibili a fianco delle tensioni concatenate quelle stellate, e ciò anche se il generatore e il carico hanno entrambi le fasi collegate a triangolo. D'altronde per quest' ultimo sarà sempre lecita la trasformazione triangolo-stella [1]. Pertanto, un qualsiasi circuito trifase (a tre fili) potrà essere considerato rappresentato, ad esempio ai fini delle correnti di linea, dal circuito «equivalente» riportato in fig. 9.25-1.

È importante applicare questo modo di rappresentazione ad un caso particolare fra quelli trattati nei due precedenti paragrafi, poiché esso si presta ad utilissime considerazioni circa lo studio dei sistemi trifasi in generale. Il caso particolare è precisamente quello rappresentato dal sistema trifase simmetrico nelle tensioni ed equilibrato nelle correnti, per il quale d'altronde risulta possibile passare dal circuito base di fig. 9.25-1

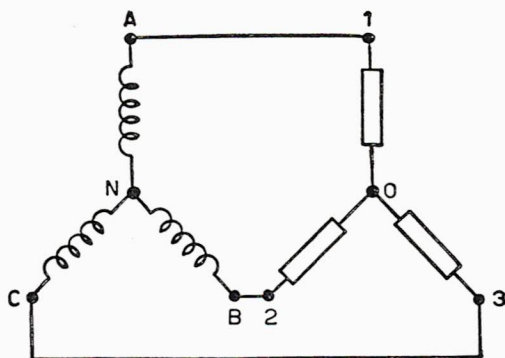



Fig. 9.25-1

a quello di fig. 9.25-2 poiché i due centri stella N e O sono allo stesso potenziale ($\overline{E}_{ON} = 0$) e quindi possono essere collegati fra di loro senza alterare il funzionamento elettrico del circuito. Nel collegamento eseguito (filo neutro) non transita dunque corrente (il sistema è infatti equilibrato nelle correnti). Tuttavia si potrà sempre pensare che vi transitino le

---

[1] Si ricordi che quando le tre impedenze di fase sono eguali, esiste la seguente semplice relazione di equivalenza: $\overline{Z}_Y = \dfrac{1}{3}\,\overline{Z}_\Delta$.

correnti di ritorno di ciascuna fase, come appare in fig. 9.25-3. Il circuito trifase è diventato perciò l' insieme di tre circuiti monofasi ([2]).

Ma si sa che, per essere il sistema simmetrico nelle tensioni, ciascun circuito monofase (fase) risulterà alimentato dalla stessa tensione, salvo gli sfasamenti dovuti all'ordine della fase, per cui, essendo le impedenze di carico tutte eguali, le correnti in ciascun circuito risulteranno pure esse eguali ed egualmente sfasate rispetto alle relative tensioni.

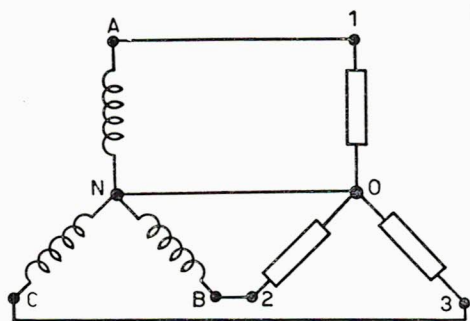
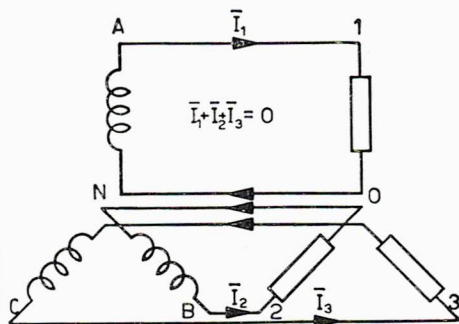



Fig. 9.25-2 *Fig. 9.25-3*

La conclusione che si può trarre è facile: in condizioni di simmetria nelle tensioni e di equilibrio nei carichi un circuito trifase (o più generalmente una rete trifase) può essere studiato in una sua sola fase ([3]) (quindi un circuito monofase o, se più in generale, una rete monofase) poiché facile sarà poi trarne le conseguenze per le altre due fasi, dato che queste si comportano identicamente rispetto alla prima salvo un ritardo noto di tempo, funzione dell'ordine delle fasi stesse.

Lo studio diventa più complicato quando il circuito trifase è squilibrato nei carichi e dissimmetrico nelle tensioni. È chiaro che in questo caso non è possibile applicare direttamente gli sviluppi visti precedentemente, poiché i tre *circuiti monofasi* perdono la loro realtà. Ecco perché, allora, come si diceva in principio di questo paragrafo, l' Elettrotecnica elementare studia in blocco il circuito trifase.

Sviluppi matematici particolari sulle terne e sui sistemi di vettori hanno permesso di superare le difficoltà presentate dallo studio in blocco dei circuiti trifasi dissimmetrici e squilibrati. Il principio di Fortescue (1918), noto come *metodo delle sequenze*, che qui non viene né enunciato né tanto meno sviluppato, consente infatti di trasferire lo studio di un qualsiasi circuito trifase a quello di una sua sola fase (ad esempio la prima). Il problema ritorna così ad avere per oggetto ancora un circuito monofase od una rete monofase: per la relativa soluzione, già agevole

---

([2]) In sostanza si è compiuto in questo paragrafo il procedimento inverso di quello descritto nel § 9.14 a proposito del collegamento delle fasi.

([3]) Si sceglierà ad esempio la 1ª fase.

perché la trattazione è monofase, si potrà perciò fare ricorso a tutti quegli accorgimenti studiati per le reti monofasi. Si potranno così applicare, oltre ai principi di Kirchhoff, il principio di Thévenin, il principio di sostituzione, ecc. .... e quanto è stato oggetto del capitolo 7.

Ciò che qui si vuole aggiungere, al fine di rendere più comprensibili certi fenomeni relativi ai sistemi trifasi, sono alcune nozioni e proprietà relative alle terne di vettori, le quali risultano fondamentali del resto anche per lo studio dei problemi dei circuiti trifasi col metodo delle sequenze.

Si ricorderà che nello studio dei sistemi trifasi si è avuto modo di incontrare diversi tipi di terne. Una classificazione porterebbe a dividerle ad esempio in due grandi gruppi: quello delle terne *simmetriche* e quello delle *dissimmetriche*, comprendendo ora, per ragioni di semplicità di trattazione, nelle terne simmetriche anche quelle cosiddette equilibrate e nelle dissimmetriche anche quelle squilibrate.

È noto d'altronde che sono da considerarsi terne simmetriche quelle che hanno i tre vettori eguali in modulo ma ciclicamente sfasati di 120° fra loro e che, a seconda del ritardo o dell'anticipo del secondo vettore sul primo, esse si distinguono più precisamente in terne simmetriche dirette (fig. 9.25-4*a*) e in terne simmetriche inverse (fig. 9.25-4*b*). È

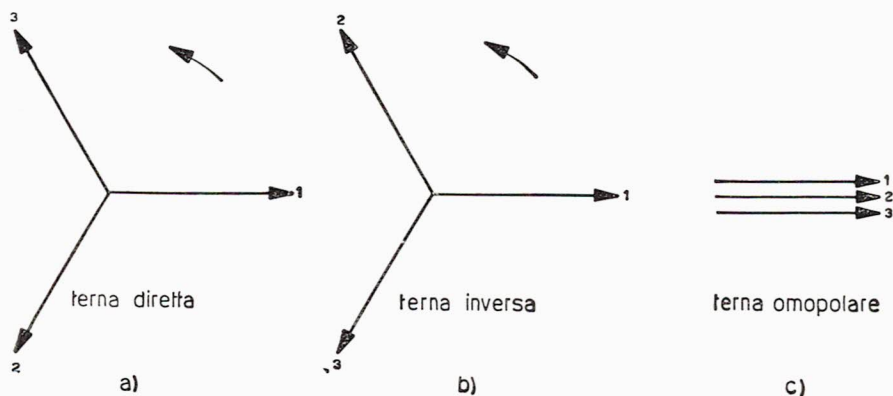



Fig. 9.25-4

necessario aggiungere subito a questo proposito che la matematica delle terne affianca ai due tipi di terne simmetriche sopra menzionate un altro tipo, precisamente la cosiddetta terna omopolare, o di sequenza zero, la quale risulta costituita da tre vettori eguali in modulo ma rigorosamente in fase fra di loro ([4]) (fig. 9.25-4*c*). Quest' ultima costituisce dunque una terna simmetrica assai particolare (degenere).

Ora si dimostra che qualsiasi terna dissimmetrica può essere considerata in generale costituita da tre terne simmetriche, precisamente da

---

([4]) A differenza delle terne diretta ed inversa, la terna omopolare è *monofase*.

una diretta, da una inversa e da una omopolare. Questa equivalenza va intesa però nel seguente modo: il primo vettore della terna data ($\bar{K}_A$ della terna asimmetrica di fig. 9.25-5*a*) deve risultare come somma vettoriale del primo vettore della terna diretta ($\bar{K}_{d1}$) col primo vettore della terna inversa ($\bar{K}_{i1}$) e col primo vettore della terna omopolare ($\bar{K}_{o1}$), così il secondo vettore ($\bar{K}_B$) dovrà risultare dalla somma vettoriale del secondo vettore della terna diretta ($\bar{K}_{d2}$) col secondo vettore della terna inversa

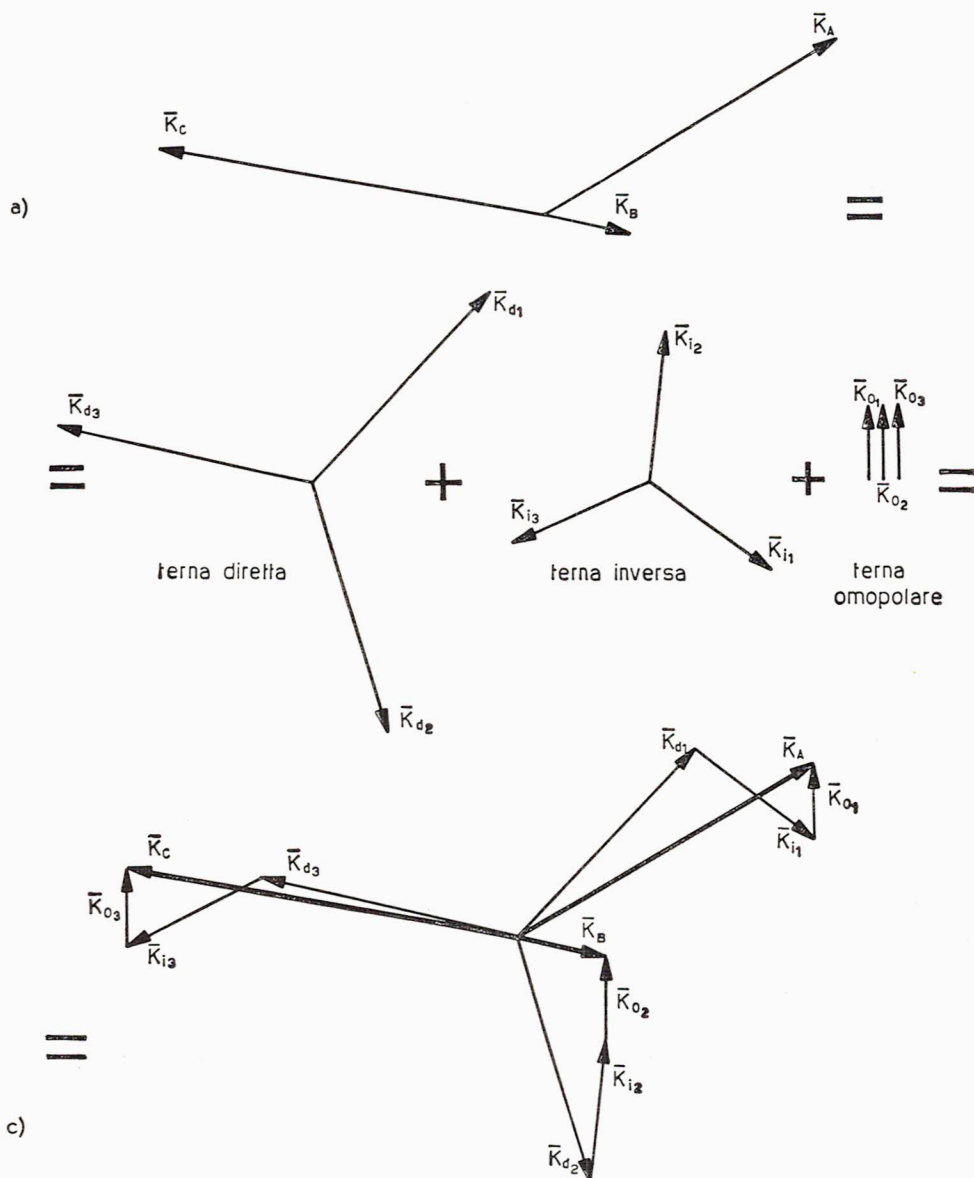



Fig. 9.25-5

($\overline{K}_{i2}$) e col secondo vettore (che coincide con il primo) della terna omopolare ($\overline{K}_{o2}$), così dicasi analogamente per il terzo vettore ($\overline{K}_c$). Si veda dunque la costruzione vettoriale di fig. 9.25-5*c*.

Viceversa si dimostra che date tre terne simmetriche di vettori, di cui una diretta, una inversa ed una omopolare unica sarà la terna dissimmetrica corrispondente : quest' ultima d'altronde si otterrà con le regole accennate poc'anzi.

Non ci si soffermerà qui su come individuare i vari vettori delle tre terne simmetriche rispettivamente diretta, inversa, omopolare noti i vettori della terna data e viceversa. Lo studio è di pertinenza del calcolo simbolico. Verrà fatto invece notare che :

a) le terne dissimmetriche aventi risultante nulla, come sono quelle baricentriche (vedi fig. 9.25-6), non danno luogo nella scomposizione a terne omopolari ; viceversa se vi è anche una terna omopolare la terna equivalente non è baricentrica ed ammette perciò un vettore risultante

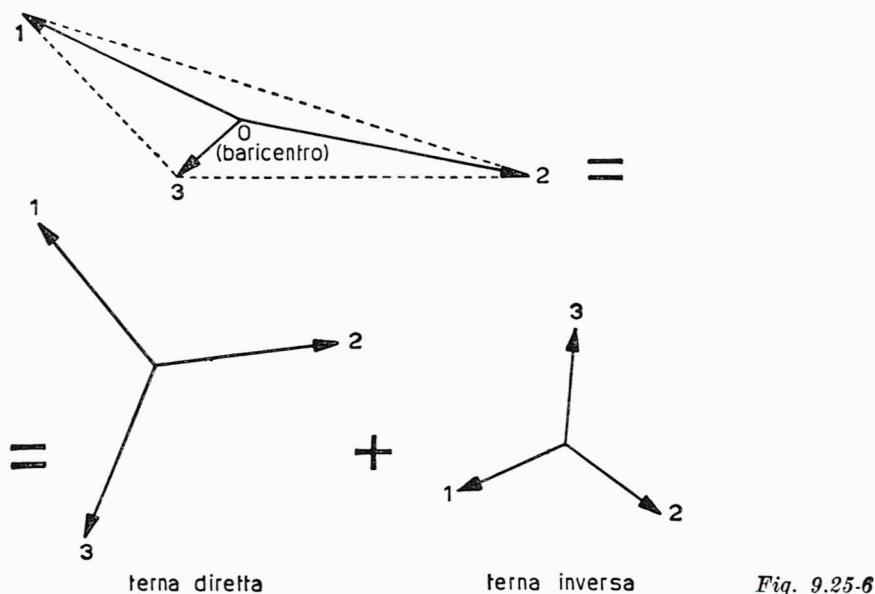



Fig. 9.25-6

la cui ampiezza vale tre volte l'ampiezza di ciascun vettore costituente la terna omopolare stessa (vedi fig. 9.25-7) ;

b) per le terne dissimmetriche dirette prive di terna omopolare, come sono le terne rappresentanti le tensioni concatenate, poiché queste risultano equivalenti ad una terna simmetrica diretta e ad una terna simmetrica inversa, si definisce grado di dissimmetria il rapporto fra l'ampiezza ad esempio del primo vettore della terna simmetrica inversa e l'ampiezza del primo vettore della terna simmetrica diretta ;

c) il termine *dissimmetrico* che qui è stato usato con significato generale deve essere sostituito più propriamente con il termine *squilibrato* quando le terne sono di corrente. Pertanto il grado di squilibrio

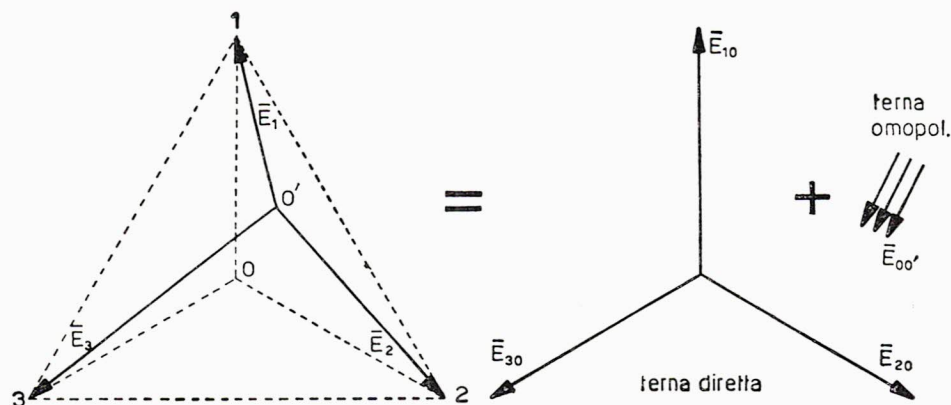



Fig. 9.25-7

nei sistemi trifasi senza neutro è dato dal rapporto fra l' intensità della corrente caratterizzante la terna simmetrica inversa e quella caratterizzante la terna simmetrica diretta;

d) si riconosce da quanto è stato sopra esposto che lo studio di un qualsiasi sistema trifase *dissimmetrico* può essere ricondotto allo studio di sistemi *simmetrici* quali sono appunto il sistema diretto, inverso, omopolare di cui si è parlato. Su ciò si basa appunto il metodo delle sequenze per la soluzione dei circuiti trifasi.

9.26 Problemi di applicazione al § 9.2

Esercizio 9.261

Tre impedenze induttive eguali ($R = 3$ ohm, $X = 4$ ohm) sono collegate a stella; la tensione di alimentazione (concatenata) (1) è $V = 380$ volt. Si tracci il relativo diagramma vettoriale di tensione e di corrente, dopodiché si dica quale provvedimento occorrerebbe prendere affinché la terna delle correnti, ferma restando l' intensità di queste, ruoti di 10° in ritardo.

Soluzione

Trattandosi di un carico equilibrato alimentato con tensioni simmetriche è facile trovare che:

---

(1) Nei sistemi trifasi le tensioni di alimentazione si intendono sempre quelle concatenate. Per questo motivo non è in pratica necessario aggiungere tale specifica.

a) l' intensità di ciascuna corrente di fase e quindi di linea, indicando con $\bar{Z}$ l'impedenza di ciascuna fase, ammonta a:

$$I = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{Z} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{220}{5} = 44 \text{ ampere};$$

b) ciascuna corrente ritarda, poiché l'impedenza Z è induttiva, sulla propria tensione di fase del seguente angolo φ, a parte il segno meno, poiché si è detto già che la corrente ritarda, :

$$\text{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{4}{3} = 1{,}333 \;, \; \varphi = 53^o\, 7' .$$

Il diagramma vettoriale risulta pertanto come in fig. 9.261-1;

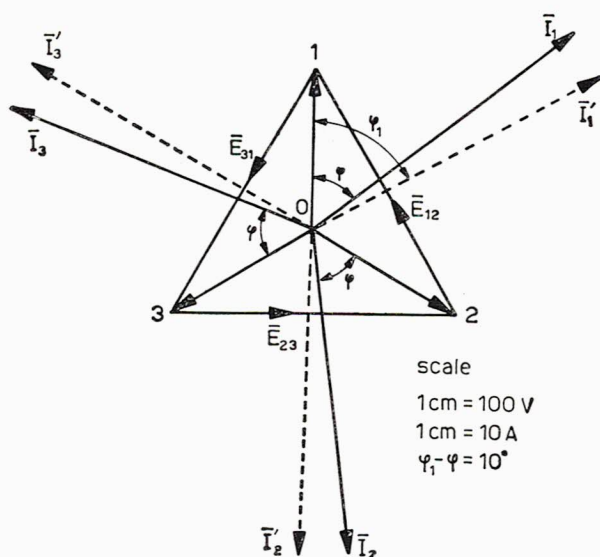



Fig. 9.261-1

c) per fare ruotare di 10° la terna dei vettori rappresentanti le correnti di linea, fermo restando il modulo di queste, occorrerà che il modulo dell'impedenza Z di ciascuna fase rimanga costante (esso vale d'altronde $Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ohm) ma che la tangente del nuovo angolo di sfasamento φ_1 assuma il valore corrispondente a $\varphi_1 = 53^o\, 7' + 10^o =$ $= 63^o\, 7'$. Dalle tavole trigonometriche si desume che $\text{tg}\varphi_1 = 1{,}972$.

Basterà allora risolvere le due seguenti equazioni:

$$\sqrt{R_2 + X_1^2} = 5$$

$$\frac{X_1}{R_1} = 1{,}972\,,$$

dalle quali è facile ottenere:

$$R_1 = 2{,}26 \text{ ohm} \quad , \quad X_1 = 4{,}50 \text{ ohm}\,.$$

Il provvedimento da adottare è quindi quello di ridurre convenientemente la resistenza di ciascuna fase e contemporaneamente di aumentarne la reattanza.

Esercizio 9.262

Tre impedenze diseguali ($\bar{Z}_1 = 4 + j\,3$, $\bar{Z}_2 = 5 + j\,0$, $\bar{Z}_3 = 0 + j\,10$) costituiscono il carico di un circuito trifase con neutro (fig. 9.262-1) alimentato con tensioni di fase simmetriche ($E = 220$ volt). Si trovi l'intensità della corrente che percorre il conduttore costituente il neutro.

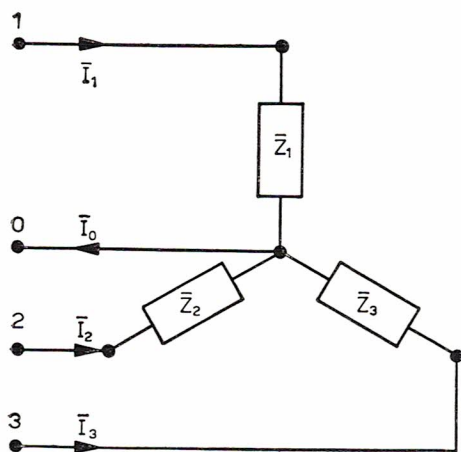
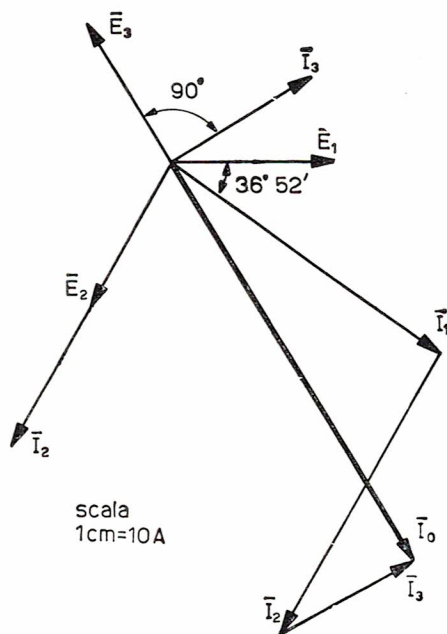



Fig. 9.262-1 *Fig. 9.262-2*

Soluzione

Le correnti di fase presentano le seguenti intensità e i seguenti sfasamenti rispetto alla propria tensione di fase:

$$1^a \text{ fase} \begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1}{Z_1} = \dfrac{220}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{220}{5} = 44 \text{ A} \\ \text{tg}\,\varphi_1 = -\dfrac{X_1}{R_1} = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75 \; , \; \varphi_1 = -36^\circ 52' \text{ (ritardo)} \end{cases}$$

$$2^a \text{ fase} \begin{cases} I_2 = \dfrac{E_2}{Z_2} = \dfrac{220}{5} = 44 \text{ A} \\ \text{tg}\,\varphi_2 = -\dfrac{X_2}{R_2} = -\dfrac{0}{5} = 0 \; , \; \varphi_2 = 0^\circ \end{cases}$$

$$3^a \text{ fase} \begin{cases} I_3 = \dfrac{E_3}{Z_3} = \dfrac{220}{10} = 22 \text{ A} \\ \text{tg}\,\varphi_3 = -\dfrac{X_3}{R_3} = -\dfrac{10}{0} = -\infty \; , \; \varphi_3 = -90^\circ \text{ (ritardo).} \end{cases}$$

D'altronde la corrente $\overline{I}_0$ nel filo neutro è la somma vettoriale delle tre correnti di linea trovate sopra. Per eseguire tale somma occorre esprimere però simbolicamente le tre correnti di linea. Posta perciò la prima tensione di fase sull'asse reale (vedi diagramma vettoriale di fig. 9.262-2) risulta facilmente allora che:

$$\overline{I}_1 = I_1 \varepsilon^{-j\,36^\circ 52'} = 44 \,(\cos 36^\circ 52' - j \,\text{sen}\, 36^\circ 52') =$$

$$= 44\,(0{,}8 - j\,0{,}6) = 35{,}2 - j\,26{,}4$$

$$\overline{I}_2 = I_2 \;\varepsilon^{-j\,120^\circ} = 44\,(\cos 120^\circ - j\,\text{sen}\,120^\circ) =$$

$$= 44\,(-0{,}5 - j\,0{,}866) = -22 - j\,38{,}1$$

$$\overline{I}_3 = I_3 \;\varepsilon^{j\,30^\circ} = 22\,(\cos 30^\circ + j\,\text{sen}\,30^\circ) = 22\,(0{,}866 + j\,0{,}5) =$$

$$= 19{,}05 + j\,11.$$

Pertanto il vettore corrente $\overline{I}_0$ viene definito come segue:

$$\overline{I}_0 = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 32{,}25 - j\,53{,}5\,.$$

L' intensità della corrente che percorre il filo neutro ammonta perciò a:

$$I_0 = \sqrt{32{,}25^2 + 53{,}5^2} = 62{,}3 \text{ A}\,.$$

Si noti che la costruzione vettoriale di fig. 9.262-2 serve assai bene come controllo per queste ultime operazioni.

Esercizio 9.263

Si trovi l' intensità delle tre correnti di linea del circuito trifase riportato in fig. 9.263-1 sapendo che le tensioni concatenate sono fra loro eguali in modulo ($V = 380$ volt).

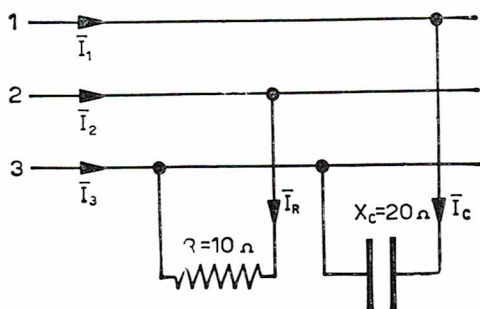



Fig. 9.263-1

Soluzione

Si ponga la tensione $\bar{E}_{23} = V$ sull'asse reale (diagramma vettoriale di fig. 9.263-2). D'altronde, come si deduce dal circuito di fig. 9.263-1,

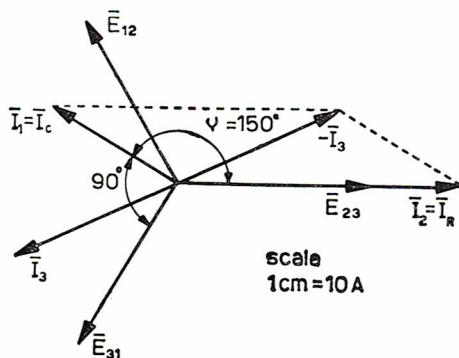



Fig. 9.263-2

le correnti di carico sono costituite dalla corrente $\bar{I}_R$, la quale è in fase con la stessa tensione $\bar{E}_{23}$ ed ha la seguente intensità:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{380}{10} = 38 \text{ ampere},$$

e dalla corrente $\bar{I}_C$, che risulta invece in quadratura anticipo sulla tensione $\bar{E}_{13}$ (cioè in quadratura ritardo sulla tensione $\bar{E}_{31}$) e che presenta la seguente intensità.

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{380}{20} = 19 \text{ ampere}.$$

Sempre dal circuito di fig. 9.263-1 si deduce immediatamente che:

$$I_1 = I_c = 19 \text{ ampere}$$

$$I_2 = I_R = 39 \text{ ampere};$$

mentre dal diagramma vettoriale di fig. 9.263-2, ove sono stati riportati i vettori rappresentanti le correnti $\overline{I}_R$ e $\overline{I}_c$, si ricaverà, applicando il teorema di Carnot (l'angolo ν fra i vettori $\overline{I}_R$ e $\overline{I}_c$ è noto, esso vale infatti 150°), l'intensità della corrente $\overline{I}_3$:

$$I_3 = \sqrt{I_R^2 + I_c^2 + 2\, I_R I_c \cos\nu} =$$

$$= \sqrt{38^2 + 19^2 - 2 \cdot 38 \cdot 19 \cdot 0{,}866} = \sqrt{555} = 23{,}56 \text{ ampere}.$$

Esercizio 9.264

Un carico trifase, alimentato con tensione di 380 volt, è costituito da una stella di impedenze diseguali (fig. 9.264-1). Calcolare le correnti di linea e il potenziale del centro stella.

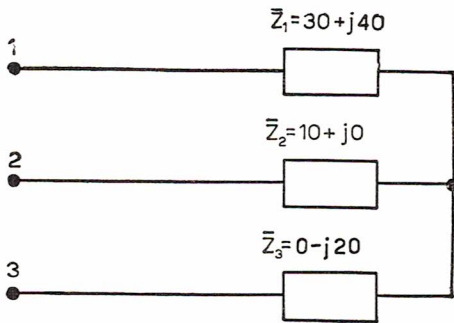



Fig. 9.264-1

Soluzione

Poiché il problema richiede anche il valore della *d.d.p.* $E_{0'0}$ converrà incominciare a calcolare subito questa. A tale scopo basterà applicare la formula 9.24-22 dove, nel nostro caso, si ha che:

$$\frac{1}{\overline{Z}_1} = \frac{1}{30 + j\,40} = \frac{30 - j\,40}{30^2 + 40^2} = 0{,}012 - j\,0{,}016$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_3} = \frac{1}{-j\,20} = j\,0{,}05$$

ed inoltre:

$$\bar{E}_{10} = \frac{V}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220$$

$$\bar{E}_{20} = \frac{V}{\sqrt{3}}\,\varepsilon^{-j\,120^0} = 220\,(-0{,}5 - j\,0{,}866) = -110 - j\,190{,}5$$

$$\bar{E}_{30} = \frac{V}{\sqrt{3}}\,\varepsilon^{j\,120^0} = 220\,(-0{,}5 + j\,0{,}866) = -110 + j\,190{,}5\,.$$

Pertanto risulta:

$$\bar{E}_{0'0} = \frac{\frac{1}{\bar{Z}_1}\bar{E}_{10} + \frac{1}{\bar{Z}_2}\bar{E}_{20} + \frac{1}{\bar{Z}_3}\bar{E}_{30}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} =$$

$$= \frac{(0{,}012 - j\,0{,}016)\,220 + 0{,}1\,(-110 - j\,190{,}5) + j\,0{,}05\,(-110 + j\,190{,}5)}{0{,}012 - j\,0{,}016 + 0{,}1 + j\,0{,}05} =$$

$$= -(216{,}5 + j\,185)\,.$$

È necessario calcolare ora le tensioni di fase del carico. Applicando perciò le formule 9.24-14,15,16 si ottiene:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{10} - \bar{E}_{0'0} = 220 + 216{,}5 + j\,185 = 436{,}5 + j\,185$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_{20} - \bar{E}_{0'0} = -110 - j\,190{,}5 + 216{,}5 + j\,185 = 106{,}5 - j\,5{,}5$$

$$\bar{E}_3 = \bar{E}_{30} - \bar{E}_{0'0} = -110 + j\,190{,}5 + 216{,}5 + j\,185 = 106{,}5 + j\,375{,}5\,,$$

dopodiché facile risulterà il calcolo delle tre correnti di linea, poiché:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1}\bar{E}_1 = (0{,}012 - j\,0{,}016)\,(436{,}5 + j\,185) = 8{,}19 - j\,4{,}76 =$$

$$= 9{,}45\,\underline{|-30^o\,9'}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_2}\bar{E}_2 = 0{,}1\,(106{,}5 - j\,5{,}5) = 10{,}65 - j\,0{,}55 = 10{,}65\,\underline{|-2^o\,57'}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{1}{\bar{Z}_3} \bar{E}_3 = j\,0{,}05\,(106{,}5 + j\,375{,}5) = -18{,}76 + j\,5{,}33 =$$
$$= 19{,}45 \,\underline{|+164^\circ\,9'}\,.$$

Giunti a questo punto converrà verificare se $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$ (infatti i dati trovati soddisfano molto bene a questa condizione) e tracciare il relativo diagramma vettoriale, come appare in fig. 9.264-2. Si

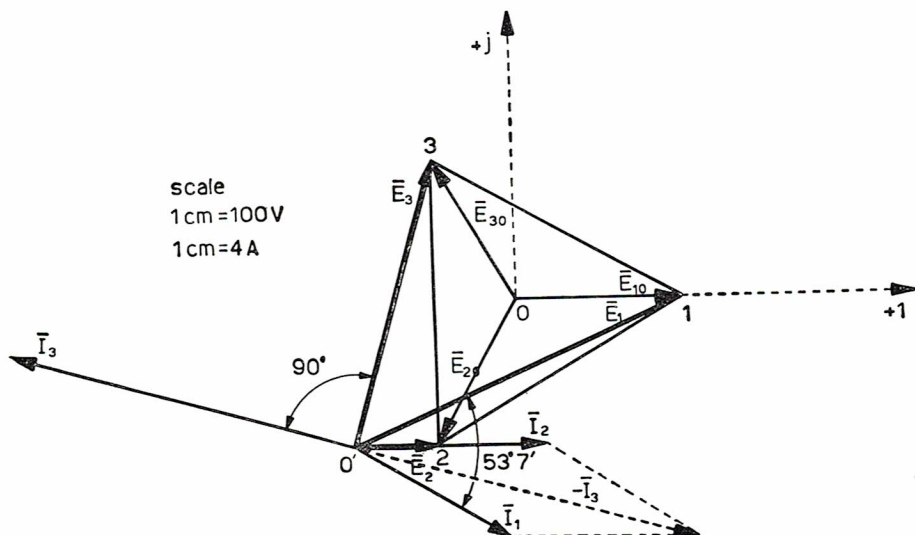



Fig. 9.264-2

osservi d'altronde che la corrente $\bar{I}_1$ risulta in ritardo sulla tensione di fase $\bar{E}_1$ di 53° 7' (infatti $\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{X_1}{R_1} = -\frac{40}{30} = -1{,}333$ da cui $\varphi_1 = -53^\circ\,7'$), che la corrente $\bar{I}_2$ risulta in fase con la $\bar{E}_2$ e che la corrente $\bar{I}_3$ è invece in quadratura anticipo sulla $\bar{E}_3$.

Esercizio 9.265

Un carico trifase, costituito da tre impedenze eguali ($\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = 10 + j\,5$) collegate a stella, è alimentato con una tensione $V = 220$ volt. Ad un certo istante l'impedenza $\bar{Z}_2$ va in cortocircuito. Che cosa succede? Quali sono i nuovi valori delle correnti di linea?

Soluzione

A causa dell'andata in cortocircuito dell'impedenza $\bar{Z}_2$, il circuito diventa come quello riportato in fig. 9.265-1 e il centro stella O' va a

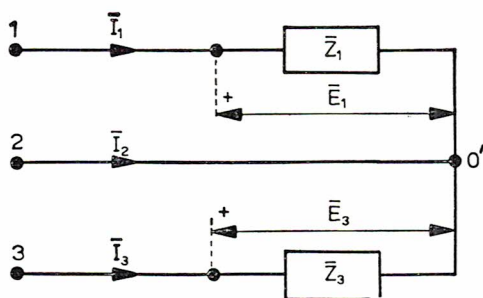



Fig. 9.265-1

cadere nel vertice 2 del triangolo delle tensioni concatenate (fig. 9.265-2), dovendosi annullare la tensione della seconda fase ($E_2 = 0$). Pertanto si ha che:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_{12} \qquad \bar{E}_3 = -\bar{E}_{23} .$$

Posto allora il vettore $\bar{E}_{23}$ sull'asse reale, le nuove correnti di linea diventano:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} = \frac{\bar{E}_{12}}{\bar{Z}_1} = \frac{220\,(-0{,}5 + j\,0{,}866)}{10 + j\,5} = -1{,}18 + j\,19{,}65 =$$
$$= 19{,}7 \,\underline{|\,93^\circ\,26'}$$

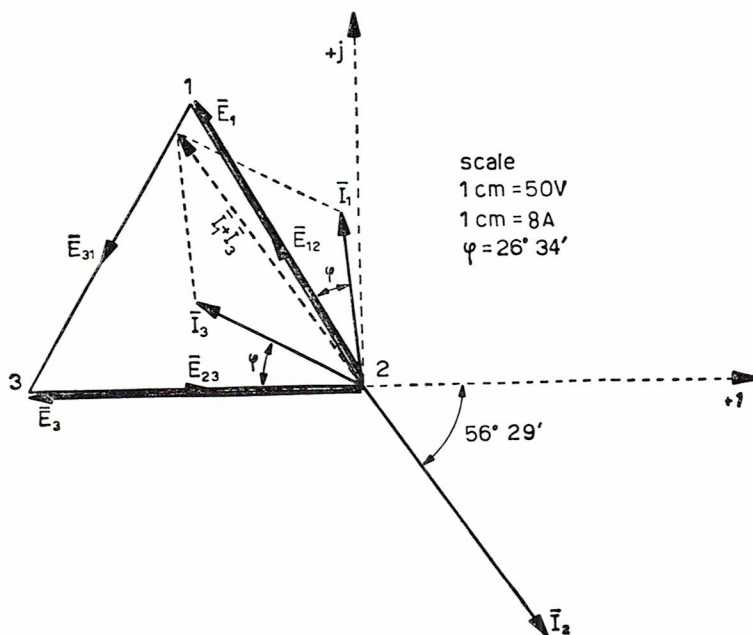



Fig. 9.265-2

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3} = \frac{-\bar{E}_{23}}{\bar{Z}_3} = \frac{-220}{10 + j\,5} = -17{,}6 + j\,8{,}8 = 19{,}7 \,\underline{|\,153^\circ 26'}$$

$$\bar{I}_2 = -(\bar{I}_1 + \bar{I}_3) = 1{,}18 - j\,19{,}65 + 17{,}6 - j\,8{,}8 = 18{,}8 - j\,28{,}4 =$$

$$= 34 \,\underline{|\,-56^\circ 29'}\ .$$

Naturalmente sia la corrente $\bar{I}_1$ che la corrente $\bar{I}_3$ dovranno risultare della stessa intensità ed ancora in ritardo rispettivamente sulla tensione $\bar{E}_1$ e sulla tensione $\bar{E}_3$ dell'angolo φ che si aveva precedentemente all'andata in cortocircuito di Z_2. Detto angolo vale $26^0\,34'$ poiché (a parte il segno) :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{5}{10} = 0{,}5\ .$$

9.3 Potenza elettrica nei sistemi trifasi

9.31 Considerazioni generali

La potenza elettrica istantanea di un sistema trifase può essere sempre espressa dalla somma dei prodotti dei valori istantanei della tensione e della corrente di ciascuna fase. La giustificazione di quest'asserzione è ovvia quando il circuito trifase è provvisto di neutro, ma risulta altrettanto semplice anche quando il circuito trifase ha tre fili, poiché si è capito che esso è pur sempre equivalente, per quanto esposto nel § 9.25, ad un circuito come quello riportato in fig. 9.31-1*a*.

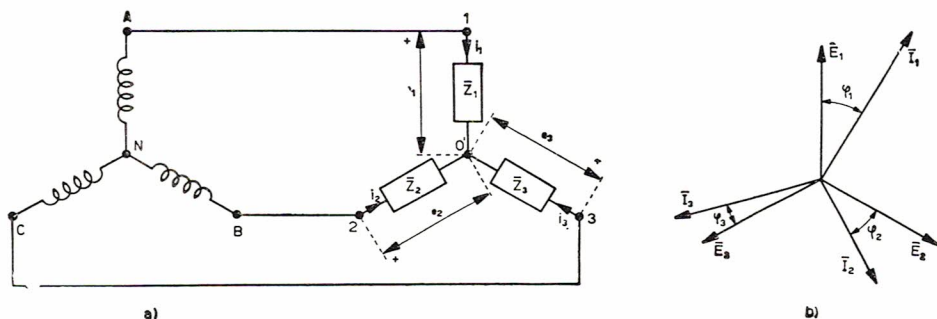



Fig. 9.31-1

Con riferimento a questa figura, si potrà pertanto scrivere, ad esempio per l'utilizzatore, che:

9.31-1 $$p = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 ,$$

formula che può essere estesa a qualsiasi caso di qualunque sistema trifase, purché con e_1, i_1, con e_2, i_2, con e_3, i_3 si intenda indicare precisamente la tensione e la corrente rispettivamente della prima, della seconda, della terza fase che caratterizzano il circuito trifase in quella sezione dove è necessario calcolare la potenza istantanea.

Di maggiore impiego in pratica, naturalmente, è la potenza reale che, anche in questo caso, risulta definita come valore medio della potenza istantanea; perciò:

9.31-2 $$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt .$$

La potenza reale rappresenta quindi la potenza media. Essa può essere espressa d'altronde come somma delle potenze reali delle singole fasi, per cui si può scrivere che:

9.31-3 $$P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 ,$$

dove φ_1 è l'angolo di sfasamento fra E_1 ed I_1 (questi sono i valori efficaci rispettivamente della tensione e della corrente della prima fase) e così analogamente per φ_2 e φ_3 (vedi diagramma vettoriale di fig. 9.31-1*b*).

A proposito delle tensioni di fase E_1, E_2, E_3 che compaiono nella formula 9.31-3 è necessario prendere atto di una dimostrazione che stabilisce come in realtà infinite siano le stelle di impedenze che possono realizzare le suddette tensioni di fase alle quali però andrà riferita sempre la stessa terna delle correnti $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$ [1]. Questa proprietà trova giustificazione nel fatto che, al variare della terna delle tensioni di fase, i tre vettori $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$ si appoggiano sempre ai vertici omonimi dello *stesso* triangolo delle tensioni concatenate: varieranno perciò i tre angoli di fase φ_1, φ_2, φ_3 che le tre correnti $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$, vi formano, ma non gli angoli γ_1, γ_2, γ_3 che dette correnti determinano con le tensioni concatenate (vedi fig. 9.31-2*b*).

Si deduce da questo importante enunciato che quando il sistema trifase non ha neutro, ferma restando la terna delle correnti $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$, per le tensioni di fase si possono assumere quelle relative al centro teorico del sistema (baricentro del triangolo delle tensioni concatenate di figu-

---

[1] Queste sono in realtà correnti di linea, come si vede dal circuito di fig. 9.31-1*a*; esse si possono sempre considerare d'altronde entranti nelle impedenze di fase della stella equivalente del carico (fig. 9.31-2*a*).

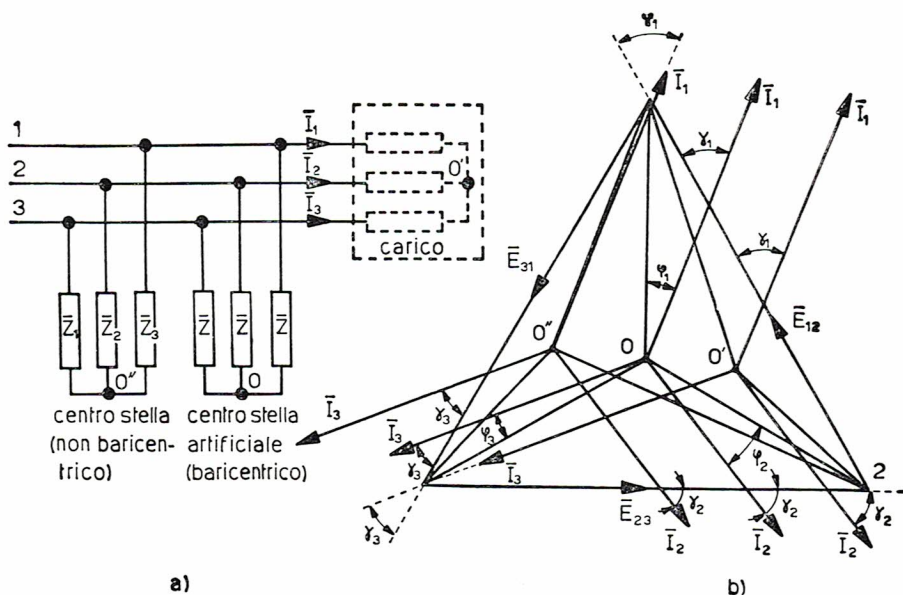



Fig. 9.31-2

ra 9.31-2*b*), centro teorico che si può realizzare con un centro stella artificiale come è stato riportato in fig. 9.31-2*a*.

In sostanza quanto sopra esposto ci autorizza ad affermare che, quando il sistema trifase non ha neutro, infiniti sono i modi di scomporre la potenza reale P in tre parti (poiché tre sono le sue fasi), come mostra infatti l'espressione analitica data in 9.31-3, ma che è possibile evitare questa indeterminatezza scegliendo fra gli infiniti sistemi possibili di tensioni di fase (e quindi di angoli di fase) quello che risulta individuato dal centro teorico del sistema.

Per quanto riguarda la potenza reattiva Q del sistema questa viene definita come somma algebrica delle potenze reattive delle singole fasi, quindi :

9.31-4 $$Q = E_1 I_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + E_2 I_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + E_3 I_3 \operatorname{sen} \varphi_3 \, ,$$

osservando che anche qui il centro stella che determina le tensioni stellate E_1, E_2, E_3 può essere qualsiasi e quindi ancora quello baricentrico (centro teorico del sistema).

La potenza apparente viene definita invece dalla formula (generale) ([2]) :

([2]) L'espressione $A = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3$ non è infatti di validità generale. Essa può servire solo per i sistemi simmetrici ed equilibrati.

9.31-5 $$A = \sqrt{P^2 + Q^2} \, ,$$

analoga a quella vista per i circuiti monofasi, dimostrando quindi che la costruzione del triangolo delle potenze, si veda la fig. 9.31-3, ha validità generale. Risulta così ad esempio la possibilità di esprimere il fattore di potenza di un circuito trifase mediante la seguente semplice formula:

9.31-6 $$\cos \Phi = \frac{P}{A} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \, .$$

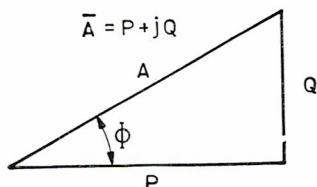



Fig. 9.31-3

9.32 Potenza nei sistemi trifasi simmetrici ed equilibrati

Quando il sistema trifase risulta simmetrico nelle tensioni, il che avviene se esse soddisfano ad esempio alle seguenti condizioni:

9.32-1 $$e_1 = E_M \operatorname{sen} \omega t$$

9.32-2 $$e_2 = E_M \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right)$$

9.32-3 $$e_3 = E_M \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right),$$

ed è equilibrato nelle correnti, cioè quando [1]:

9.32-4 $$i_1 = I_M \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)$$

9.32-5 $$i_2 = I_M \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi - \varphi \right)$$

9.32-6 $$i_3 = I_M \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi - \varphi \right),$$

allora l'espressione della potenza istantanea data in 9.31-1, dopo avervi sostituito ai valori istantanei delle tensioni e delle correnti di fase le espres-

---

[1] Si è assunto un sistema di correnti in ritardo rispetto alle relative tensioni di fase poiché questo è il caso più generale dal punto di vista industriale, cioè pratico.

sioni sopra scritte e dopo aver sviluppato e semplificato, assume la seguente semplice forma:

9.32-7 $$p = 3\,\frac{E_M I_M}{2}\cos\varphi = 3\,EI\cos\varphi \text{ (2)},$$

che dimostra come la potenza elettrica istantanea in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato sia costante, cioè indipendente dal tempo. Pertanto la potenza reale P coincide in questo caso particolare con la potenza istantanea: le potenze fluttuanti delle tre fasi si compensano appunto in ogni istante.

Risulta dunque che:

9.32-8 $$P = 3\,EI\cos\varphi = \sqrt{3}\;VI\cos\varphi \qquad (\mathrm{W}).$$

Si userà naturalmente la seconda formula quando si conoscerà la tensione concatenata anziché quella di fase. Si noti che il termine $\cos\varphi$ rappresenta ancora il fattore di potenza del sistema.

Come per i circuiti monofasi, anche per quelli trifasi si può definire la potenza reattiva nel seguente modo:

9.32-9 $$Q = 3\,EI\,\mathrm{sen}\,\varphi = \sqrt{3}\;VI\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad (\mathrm{VAR}).$$

Così l'espressione della potenza apparente risulta data dalla seguente formula:

9.32-10 $$A = 3\,EI = \sqrt{3}\;VI \qquad (\mathrm{VA}).$$

La potenza apparente è legata d'altronde alle due altre potenze dalla ben nota formula:

9.32-11 $$A = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

e quindi dalla costruzione geometrica di fig. 9.31-3 (ove però $\Phi = \varphi$). Per il fattore di potenza vale quindi la formula data in 9.31-6 che si può dedurre direttamente dalla 9.32-8.

Interessante è vedere ora come si possa procedere in pratica alla misura della potenza attiva e del fattore di potenza per un circuito tri-

---

(2) Infatti gli sviluppi trigonometrici, in analogia con la formula 5.59-5, portano a quest'espressione intermedia:

$$p = \frac{E_M I_M}{2}\left[3\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi) - \cos(2\omega t - 120^\circ - \varphi) - \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi)\right],$$

dove d'altronde la somma delle tre funzioni cosinusoidali, che sono isofrequenziali fra loro, è nulla in quanto gli argomenti differiscono ciclicamente di 120°.

fase senza neutro. L' inserzione degli strumenti come appare in fig. 9.32-1 è semplice e logica : infatti con i dati desunti dal wattmetro, inserito con la bobina voltmetrica fra un filo di linea qualsiasi ed un centro stella artificiale, si ha la potenza attiva P_1 di una fase, per cui la potenza attiva P del circuito trifase varrà $P = 3P_1$; mentre il valore V desunto dal voltmetro e quello I desunto dall'ampermetro serviranno per il calcolo della potenza apparente ($A = \sqrt{3}\ VI$), cosicché il fattore di potenza risulterà noto impiegando la seguente formula : $\cos\varphi = \dfrac{P}{A} = \dfrac{3\,P_1}{\sqrt{3}\ VI}$.

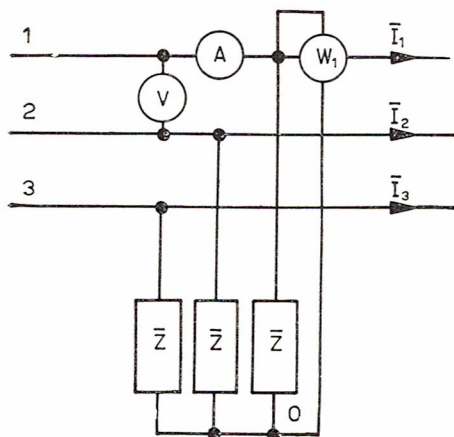



Fig. 9.32-1

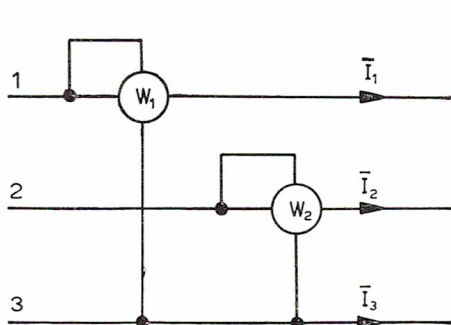



Fig. 9.32-2

Si può però procedere anche in altro modo, precisamente inserendo due soli wattmetri come risulta dalla fig. 9.32-2. È questa la cosiddetta *inserzione Aron* tipica per le misure di potenza sui circuiti trifasi senza neutro. Ciò avviene mediante due wattmetri le cui bobine ampermetriche vengono inserite su due qualsiasi dei tre conduttori di linea (la fig. 9.32-2 mostra quindi una delle tre possibili inserzioni) e le cui bobine voltmetriche fanno capo al conduttore che contiene la corrispondente bobina ampermetrica e il terzo conduttore rimasto libero.

Caratteristica principale dell' inserzione Aron è che la somma (algebrica) delle letture dei due wattmetri fornisce la potenza reale impegnata a valle degli strumenti stessi [3]. Per dimostrare quanto ora è stato asserito si incominci coll'osservare che i due wattmetri in Aron realizzano il caso particolarissimo in cui la potenza attiva risulta espressa da due soli termini anziché da tre. Ciò è possibile, poiché l'espressione della potenza riportata in 9.31-3 dimostra che quando ad esempio $E_3 = 0$, che corrisponde proprio al caso dell' inserzione Aron riportata in fig. 9.32-2, la potenza attiva risulta effettivamente espressa da due soli

---

[3] A parte gli errori sistematici tipici dovuti ai wattmetri.

termini. Per realizzare tale condizione il centro stella che determina le tensioni stellate E_1, E_2, E_3 viene a cadere nel vertice 3 del triangolo delle tensioni concatenate (vedi fig. 9.32-3*b*) : ciò del resto è lecito per quanto è stato riferito nel precedente paragrafo.

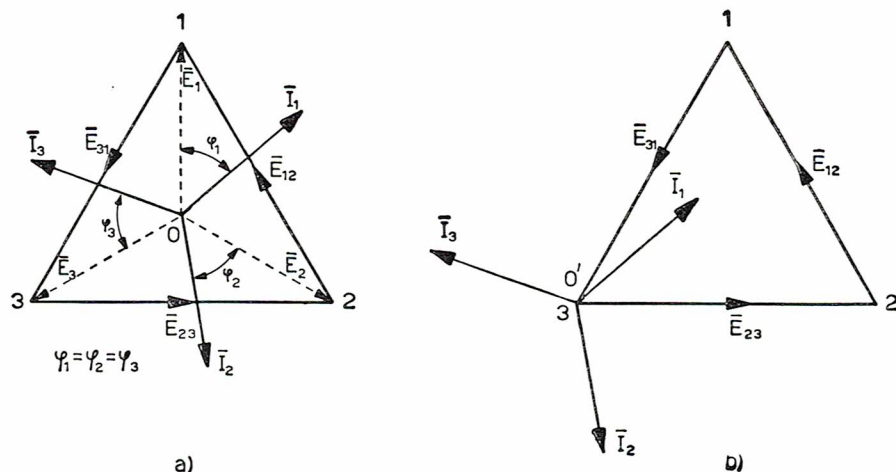



Fig. 9.32-3

Pertanto i due wattmetri W_1 e W_2 segnano le seguenti potenze:

9.32-12 $$P_1 = E_{13} I_1 \cos \gamma_1 \qquad P_2 = E_{23} I_2 \cos \gamma_2 \, ,$$

dove γ_1 e γ_2 sono gli angoli formati rispettivamente dalle correnti $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ con i vettori $\bar{E}_{13}$ e $\bar{E}_{23}$. Questi angoli, si veda la costruzione vettoriale di fig. 9.32-4, valgono:

9.32-13 $$\gamma_1 = \varphi - 30^0 \qquad \gamma_2 = \varphi + 30^0 \, .$$

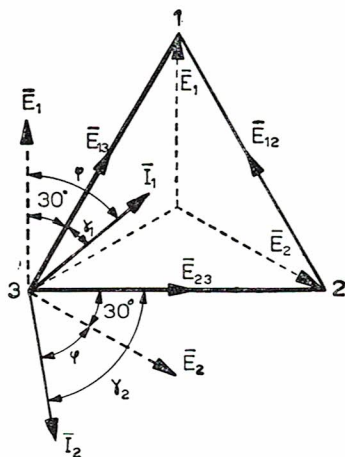



Fig. 9.32-4

In definitiva dunque risulta per la potenza attiva misurata:

9.32-14 $$P = P_1 + P_2 = VI \cos(\varphi - 30^0) + VI \cos(\varphi + 30^0) .$$

Lo sviluppo trigonometrico dell'espressione qui scritta conferma che questa, poiché $\cos(\varphi - 30^0) + \cos(\varphi + 30^0) = \sqrt{3}\cos\varphi$, vale $\sqrt{3}\, VI \cos\varphi = P$. Non vi era dubbio che fosse così!

Per trovare ora il fattore di potenza senza fare ricorso ad altri strumenti, all' infuori dei due wattmetri inseriti in Aron, è necessario poter calcolare la potenza reattiva Q ancora tramite le letture P_1 e P_2 dei wattmetri stessi. Ciò è possibile poiché la differenza fra le due letture, $P_1 - P_2$, risulta funzione diretta della potenza reattiva cercata, come i seguenti passaggi dimostrano facilmente:

9.32-15 $$P_1 - P_2 = VI \cos(\varphi - 30^0) - VI \cos(\varphi + 30^0) =$$

$$= VI\ (\cos\varphi \cos 30^0 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 30^0 - \cos\varphi \cos 30^0 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 30^0) =$$

$$= VI \operatorname{sen}\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} .$$

Perciò la potenza reattiva impegnata diventa calcolabile tramite la seguente semplice formula:

9.32-16 $$Q = \sqrt{3}\,(P_1 - P_2) .$$

Di conseguenza risulta che la tangente dell'angolo φ di sfasamento (in questo caso di sistema simmetrico ed equilibrato esso è di valore unico) può essere calcolata tramite la formula:

9.32-17 $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P} = \sqrt{3}\,\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} .$$

Ma, ponendo il rapporto $\frac{P_2}{P_1}$ eguale ad a, si può avere direttamente il fattore di potenza in funzione delle letture eseguite, poiché:

9.32-18 $$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\,\frac{1 - a}{1 + a}$$

e quindi, ricordando che $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$,:

9.32-19 $$\cos\varphi = \frac{1 + a}{2\sqrt{1 - a + a^2}} .$$

TABELLA 9.3

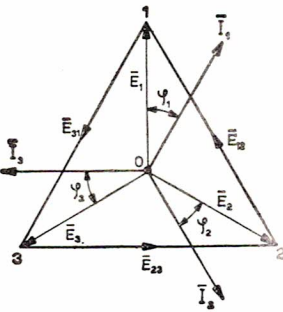
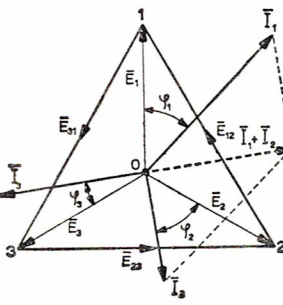
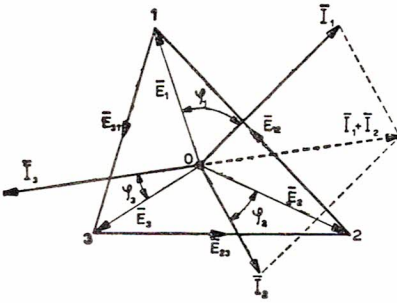
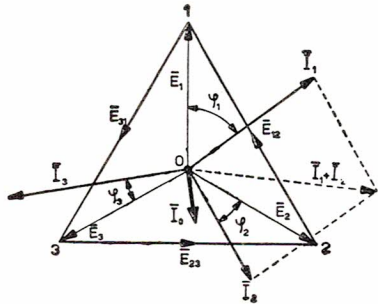
QUADRO RIASSUNTIVO SISTEMI TRIFASI

Tipo	Relazioni fondamentali		
	valori istantanei	vettoriali	valori numerici
simmetrico equilibrato	$e_{12}+e_{23}+e_{31}=0$ $e_1+e_2+e_3=0$ $i_1+i_2+i_3=0$ $p=e_1 i_1+e_2 i_2+$ $+e_3 i_3=$ $=\sqrt{3}\,V\,I\cos\varphi$	$\overline{E}_{12}+\overline{E}_{23}+\overline{E}_{31}=0$ $\overline{E}_1+\overline{E}_2+\overline{E}_3=0$ $\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=0$ $\overline{A}=P+jQ$	$E_{12}=E_{23}=E_{31}=V=\sqrt{3}\,E$ $E_1=E_2=E_3=E=V/\sqrt{3}$ $I_1=I_2=I_3=I$ $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi$ $P=3\,E\,I\cos\varphi=\sqrt{3}\,V\,I\cos\varphi$ $Q=3\,E\,I\,sen\,\varphi=\sqrt{3}\,V\,I\,sen\,\varphi$ $A=\sqrt{P^2+Q^2}$ $\cos\varphi=\frac{P}{A}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$
simmetrico squilibrato (rif. centro teorico)	$e_{12}+e_{23}+e_{31}=0$ $e_1+e_2+e_3=0$ $i_1+i_2+i_3=0$ $p=e_1 i_1+e_2 i_2+$ $+e_3 i_3$	$\overline{E}_{12}+\overline{E}_{23}+\overline{E}_{31}=0$ $\overline{E}_1+\overline{E}_2+\overline{E}_3=0$ $\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=0$ $\overline{A}=P+jQ$	$E_{12}=E_{23}=E_{31}=V=\sqrt{3}\,E$ $E_1=E_2=E_3=E=V/\sqrt{3}$ $I_1\neq I_2\neq I_3$ $\varphi_1\neq\varphi_2\neq\varphi_3$ $P=E\,(I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2+I_3\cos\varphi_3)$ $Q=E(I_1\,sen\,\varphi_1+I_2\,sen\,\varphi_2+I_3\,sen\,\varphi_3)$ $A=\sqrt{P^2+Q^2}$ $\cos\Phi=\frac{P}{A}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

TABELLA 9.3
QUADRO RIASSUNTIVO SISTEMI TRIFASI

Tipo	Relazioni fondamentali		
	valori istantanei	vettoriali	valori numerici
dissimmetrico squilibrato (rif. centro teorico)	$e_{12}+e_{22}+e_{31}=0$ $e_1+e_2+e_3=0$ $i_1+i_2+i_3=0$ $p=e_1 i_1+e_2 i_2+$ $+e_3 i_3$	$\overline{E}_{12}+\overline{E}_{23}+\overline{E}_{31}=0$ $\overline{E}_1+\overline{E}_2+\overline{E}_3=0$ $\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3=0$ $\overline{A}=P+jQ$	$E_{12}\neq E_{23}\neq E_{31}$ $E_1\neq E_2\neq E_3$ $I_1\neq I_2\neq I_3$ $\varphi_1\neq\varphi_2\neq\varphi_3$ $P=\Sigma\, E\, I\cos\varphi$ $Q=\Sigma\, E\, I\, sen\,\varphi$ $A=\sqrt{P^2+Q^2}$ $\cos\Phi=\frac{P}{A}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$
simmetrico squilibrato con neutro	$e_{12}+e_{23}+e_{31}=0$ $e_1+e_2+e_3=0$ $i_1+i_2+i_3\neq 0$ $p=e_1 i_1+e_2 i_2+$ $+e_3 i_3$	$\overline{E}_{12}+\overline{E}_{23}+\overline{E}_{31}=0$ $\overline{E}_1+\overline{E}_2+\overline{E}_3=0$ $\overline{I}_1+\overline{I}_2+\overline{I}_3\neq 0$ $\overline{A}=P+jQ$	$E_{12}=E_{23}=E_{31}=V=\sqrt{3}\,E$ $E_1=E_2=E_3=E=V/\sqrt{3}$ $I_1\neq I_2\neq I_3$ $\varphi_1\neq\varphi_2\neq\varphi_3$ $P=E\,(I_1\cos\varphi_1+I_2\cos\varphi_2+I_3\cos\varphi_3)$ $Q=E(I_1 sen\varphi_1+I_2 sen\varphi_2+I_3 sen\varphi_3)$ $A=\sqrt{P^2+Q^2}$ $\cos\Phi=\frac{P}{A}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

9.33 Potenza nei sistemi trifasi dissimmetrici e squilibrati

I sistemi trifasi squilibrati e dissimmetrici mostrano rispetto a quelli equilibrati e simmetrici un comportamento assai diverso anche nel campo delle potenze elettriche per cui è necessario mantenere la più opportuna distinzione.

Caratteristica principale di questi sistemi è che la potenza istantanea (complessiva delle fasi) non si presenta più costante nel tempo ma risulta pulsante fra un minimo ed un massimo, con frequenza doppia rispetto a quella del sistema.

Per l'espressione della potenza reale, il cui significato rimane sempre quello di valor medio della potenza istantanea, si potrà fare ricorso alla formula generale data in 9.31-3. A questo proposito si precisa ancora che hanno validità quelle considerazioni fatte sulla possibilità di scelta delle tensioni stellate $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$, purché queste costituiscano una stella di vettori i cui estremi si appoggino ai vertici omonimi del triangolo delle tensioni concatenate del sistema. Ciò consente di affermare subito che l' inserzione Aron di due wattmetri per la misura della potenza attiva resta tuttora perfettamente valida ($P = P_1 + P_2$) così come rimangono valide quindi le espressioni di P_1 e P_2 riportate in 9.32-12. Naturalmente invece non valgono le formule 9.32-13 e 14.

L'espressione della potenza reattiva complessiva nei sistemi trifasi dissimmetrici e squilibrati rimane quella generale riportata in 9.31-4. Essa, come si è detto, non rappresenta una realtà fisica ma semplicemente una comodità di calcolo. Si osservi d'altronde che per la misura della potenza reattiva *non* è più possibile fare ricorso all' inserzione di due wattmetri in Aron, che, si ripete, ne permette il calcolo solamente quando il circuito risulta caratterizzato da simmetria nelle tensioni ed equilibrio nei carichi. È quindi necessario ricorrere ad altre inserzioni per le quali si rimanda ai testi specializzati in Misure Elettriche.

La potenza attiva P e quella reattiva Q servono a definire (convenzionalmente) la potenza apparente A secondo la formula 9.31-5, la quale conferma così come sia possibile estendere anche ai sistemi trifasi dissimmetrici e squilibrati tutte quelle proprietà che discendono dal triangolo delle potenze. In particolare questo può servire per determinare convenzionalmente il fattore di potenza (indicato ora con $\cos \Phi$ allo scopo di mostrare chiaramente che in questi casi non si può considerare minimamente un angolo φ relativo all' intero circuito trifase) definito appunto come coseno dell'angolo Φ che appare nel diagramma di fig. 9.31-3 e dal quale si può dedurre, come è stato già riportato in 9.31-6, che:

9.33-1
$$\cos \Phi = \frac{P}{A} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \cdot$$

9.34 Scelta del collegamento delle fasi (stella o triangolo?)

Le nozioni sui sistemi trifasi esposte nei precedenti paragrafi hanno mostrato per i circuiti trifasi senza neutro (e questi costituiscono la grande maggioranza dei circuiti trifasi industriali) come i due collegamenti stella e triangolo siano del tutto equivalenti.

Dato quindi che i due tipi di collegamento sono entrambi perfettamente possibili, è necessario precisare ora quando vi sia la convenienza di effettuare l' uno e quando l'altro. La risposta al quesito posto può essere data assai facilmente per i sistemi simmetrici ed equilibrati osservando anzitutto che il dispositivo trifase in esame, dovendo impegnare, comunque sia il collegamento delle sue fasi, la stessa potenza attiva e reattiva [1], dovrà presentare sempre la stessa corrente di linea (I) poiché la tensione di linea (V) rimane anch'essa una costante del problema.

Pertanto, se il collegamento delle fasi è a stella, occorrerà che ciascun ramo della stella sopporti tutta la corrente di linea, ma per contro sia adatto per una tensione $\sqrt{3}$ volte minore; se il collegamento delle fasi è invece a triangolo, ciascun ramo del triangolo dovrà sopportare una corrente la cui intensità è $\sqrt{3}$ volte minore di quella di linea, ma per contro sarà sottoposto a tutta la tensione di linea. Perciò in pratica si userà il collegamento a stella quando le tensioni di linea sono relativamente elevate, si userà viceversa il collegamento a triangolo quando le tensioni di linea sono relativamente più basse. La ragione è strettamente tecnologica poiché, soprattutto per le macchine elettriche ove si hanno degli avvolgimenti, si deve osservare che all'aumentare della tensione applicata all'avvolgimento (fase) aumenta il numero delle spire e la difficoltà di isolamento dei conduttori, viceversa all'aumentare della corrente nell'avvolgimento (fase) aumenta la sezione del conduttore e la difficoltà di smaltimento del calore da parte del conduttore stesso.

Ci si può chiedere ancora: un dispositivo trifase qualsiasi (stufa, forno, alternatore, motore, ecc. ....) progettato per funzionare ad una certa tensione può correttamente funzionare anche ad un'altra tensione? La risposta è parzialmente affermativa, poiché lo stesso dispositivo avente le fasi collegate a triangolo e funzionante alla tensione V potrà funzionare alla tensione $\sqrt{3}\ V$ se le sue fasi verranno collegate a stella; viceversa, se il dispositivo funzionante alla tensione V ha le fasi collegate a stella, esso sarà adatto a funzionare alla tensione $V/\sqrt{3}$ in collegamento a triangolo. Concludendo, uno stesso dispositivo trifase può funzionare in maniera del tutto identica con due tensioni diverse purché queste stiano nel rapporto di $\sqrt{3}$ e il collegamento sia quello adatto. Ad esempio, un motore trifase con le fasi collegate a triangolo funzionante a 220 volt dà le stesse prestazioni (potenza attiva, rendimento, fattore di potenza) a 380 volt ($380 = \sqrt{3} \cdot 220$) se le fasi sono state collegate a stella e viceversa. Si

---

(1) Il fattore di potenza rimane perciò costante.

osservi a questo proposito che molti dispositivi industriali possiedono una morsettiera ai cui morsetti fanno capo le entrate e le uscite di ciascun avvolgimento di fase, cosicché si ha la possibilità di passare dal collegamento triangolo a quello stella, e viceversa, con relativa facilità (vedi ad esempio fig. 9.34-1).

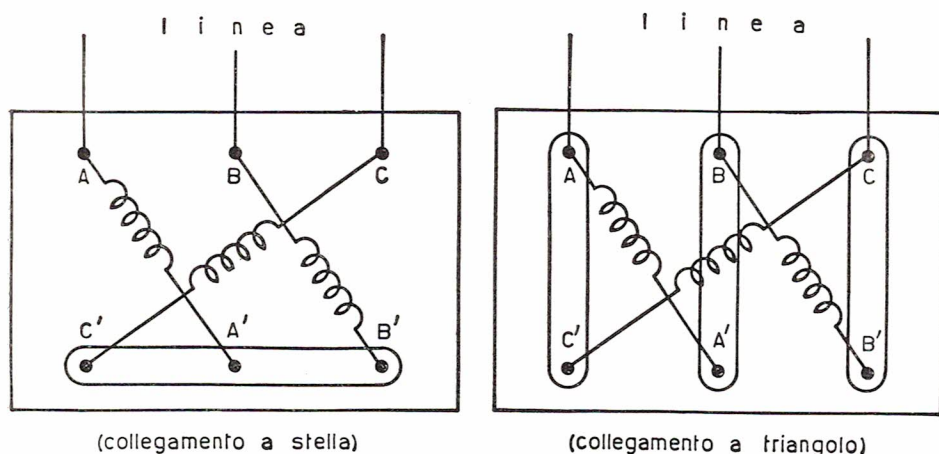



Fig. 9.34-1

9.35 Problemi di applicazione al § 9.3

Esercizio 9.351

Calcolare la potenza attiva, la potenza reattiva e la potenza apparente di un carico trifase costituito da tre impedenze eguali ($Z = 18 + j\,10$) collegate a stella. La tensione di alimentazione è $V = 380$ volt.

Soluzione

Il calcolo può essere eseguito in diversi modi. Fondamentale però è la conoscenza della corrente I di fase (1) che qui, essendo il carico equilibrato, vale:

$$I = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{Z} = \frac{\frac{380}{1,73}}{\sqrt{18^2 + 10^2}} = \frac{220}{20,6} = 10,68 \text{ ampere}$$

e che risulta sfasata rispetto alla tensione di fase di un angolo φ tale che:

(1) Questa è anche la corrente di linea.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{10}{18} = -0{,}555_5 \ ,$$

per cui:

$$\varphi = -29^0\ 3' \ .$$

Calcolata subito la potenza apparente:

$$A = \sqrt{3}\ VI = 1{,}73 \cdot 380 \cdot 10{,}68 = 7030 \ \text{VA} \ ,$$

la potenza attiva e reattiva potranno essere trovate perciò tramite le seguenti semplici espressioni:

$$P = A \cos\varphi = 7030 \cdot 0{,}874 = 6150 \ \text{W}$$

$$Q = A \operatorname{sen}\varphi = -7030 \cdot 0{,}485 = -3420 \ \text{VAR} \ .$$

Naturalmente le potenze richieste potevano essere calcolate anche in altro modo, precisamente come il triplo della potenza (del tipo richiesto) impegnata da una singola impedenza di fase ($\overline{Z} = R + jX = 18 + j10$). Per questa via risulta così che:

$$P = 3\ RI^2 = 3 \cdot 18 \cdot 10{,}68^2 = 6150 \ \text{W}$$

$$Q = 3\ XI^2 = 3 \cdot 10 \cdot 10{,}68^2 = 3420 \ \text{VAR (induttivi)}$$

$$A = 3\ ZI^2 = 3 \cdot 20{,}6 \cdot 10{,}68^2 = 7040 \ \text{VA} \ .$$

I risultati ora trovati devono coincidere ovviamente con quelli precedenti, salvo quelle piccole differenze dovute alle imprecisioni dei calcoli.

Esercizio 9.352

Una linea trifase (le caratteristiche di ciascun conduttore sono $R_l = 0{,}2$ ohm e $X_l = 0{,}3$ ohm), si veda la fig. 9.352-1, alimenta al suo arrivo un carico equilibrato. Trovare la potenza attiva e il fattore di potenza alla partenza della linea.

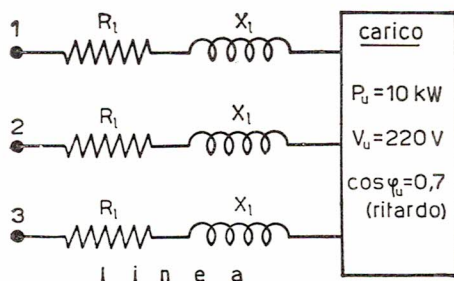



Fig. 9.352-1

Soluzione

La potenza attiva alla partenza della linea è data dalla potenza alla sua uscita, cioè la potenza $P_u = 10$ kW, più la potenza perduta nelle tre resistenze R_l della linea stessa. Quest'ultima potenza ammonta a:

$$P_l = 3\,R_l I^2 = 3\,R_l \left(\frac{P_u}{\sqrt{3}\,V_u \cos\varphi_u}\right)^2 = 3\cdot 0{,}2\cdot 37{,}6^2 \cong 0{,}85 \text{ kW}.$$

Perciò risulta che:

$$P_e = P_u + P_l = 10 + 0{,}85 = 10{,}85 \text{ kW}.$$

D'altronde la potenza reattiva (induttiva) impegnata dalla linea vale:

$$Q_l = 3\,X_l I^2 = 3\,X_l \left(\frac{P_u}{\sqrt{3}\,V_u \cos\varphi_u}\right)^2 = 3\cdot 0{,}3\cdot 37{,}6^2 = 1{,}27 \text{ kVAR}$$

che aggiunta a quella pure induttiva del carico:

$$Q_u = P_u \operatorname{tg}\varphi_u = 10\cdot 1{,}02 = 10{,}2 \quad \text{kVAR},$$

fornisce l'ammontare Q_e della potenza reattiva (induttiva) all'entrata della linea:

$$Q_e = Q_u + Q_l = 10{,}2 + 1{,}27 = 11{,}47 \text{ kVAR}.$$

Il fattore di potenza all'entrata della linea vale quindi:

$$\cos\varphi_e = \frac{P_e}{A_e} = \frac{P_e}{\sqrt{P_e^2 + Q_e^2}} = \frac{10{,}85}{\sqrt{10{,}85^2 + 11{,}47^2}} = \frac{10{,}85}{15{,}8} = 0{,}688.$$

Si noti che per risolvere il problema si è fatto uso del teorema di Boucherot sulle potenze: le potenze attive e reattive di un qualsiasi circuito trifase si sommano algebricamente, quelle apparenti si sommano invece geometricamente. L'estensione del teorema di Boucherot alle potenze dei sistemi polifasi è ovvia se si pensa che per essi risulta valida sempre la relazione $\bar{A} = P + j\,Q$, fondamento del triangolo delle potenze.

Esercizio 9.353

Tre carichi squilibrati, le cui caratteristiche appaiono nella fig. 9.353-1, sono inseriti in parallelo su di una linea trifase. Si trovi il fattore di potenza complessivo.

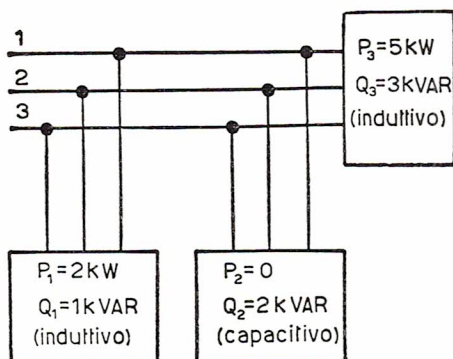



Fig. 9.353-1

Soluzione

Per risolvere il problema è sufficiente conoscere la potenza attiva e reattiva complessiva assorbita dall' insieme dei tre carichi.

Ora, in base al teorema di Boucherot, per la potenza attiva risulta che:

$$P_t = P_1 + P_3 = 2 + 5 = 7 \text{ kW},$$

mentre per la potenza reattiva (assegnando il segno positivo alle potenze capacit·ve, come è convenzione di questo testo) si ha:

$$Q_t = -Q_1 + Q_2 - Q_3 = -1 + 2 - 3 = -2 \text{ kVAR}.$$

Il fattore di potenza assume perciò il seguente valore:

$$\cos \Phi = \frac{P_t}{\sqrt{P_t^2 + Q_t^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 2^2}} = \frac{7}{7,28} = 0,962$$

e risulta in ritardo poiché la potenza reattiva Q_t è induttiva.

Esercizio 9.354

Si calcoli la potenza attiva dissipata dal carico squilibrato studiato nell'esercizio 9.264.

Soluzione

In questo caso il metodo più semplice è quello che calcola la potenza attiva come potenza dissipata dalla parte resistiva delle impedenze di carico. Quindi:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 30 \cdot 9,45^2 + 10 \cdot 10,65^2 = 3810 \text{ watt}.$$

Volendo invece applicare la formula 9.31-3, cioè:

$$P = E_1 I_1 \cos \varphi_1 + E_2 I_2 \cos \varphi_2 + E_3 I_3 \cos \varphi_3 ,$$

può convenire assumere per tensioni di fase le tensioni E_{10}, E_{20}, E_{30} (il cui modulo vale 220 volt). Si deduce allora, osservando il diagramma vettoriale di fig. 9.264-2 e in base ai risultati trovati nell'esercizio stesso, che:

$$\varphi_1 = -30^0\ 9'$$

$$\varphi_2 = 120^0 - 2^0\ 57' = 117^0\ 3'$$

$$\varphi_3 = 164^0\ 9' - 120^0 = 44^0\ 9' .$$

Pertanto risulta:

$$P = 220\ [9{,}45 \cos (-30^0\ 9') + 10{,}65\ \cos\ 117^0\ 3' + 19{,}45\ \cos\ 44^0\ 9'] =$$

$$= 220\ (9{,}45 \cdot 0{,}865 - 10{,}65 \cdot 0{,}455 + 19{,}45 \cdot 0{,}717) =$$

$$= 220 \cdot 17{,}2 = 3780 \text{ watt} .$$

Si osservi che la piccola differenza ($< 1\ \%$) dei risultati trovati con i due metodi è dovuta all'approssimazione dei dati forniti dall'esercizio 9.264.

9.4 Campi magnetici rotanti

9.41 Generalità

Le correnti polifasi, e in particolare quindi quelle trifasi, possono dar luogo a campi magnetici rotanti in determinate condizioni, abbastanza facili da realizzare in pratica come fu dimostrato da Galileo Ferraris nel 1885. Per campo magnetico rotante si deve intendere un campo magnetico il cui vettore rappresentativo $\bar{H}$ ruota nello spazio con una certa velocità (uniforme) attorno ad un punto ben determinato.

Prima però di esaminare le caratteristiche e le proprietà dei campi magnetici rotanti, si vuole premettere alcune utili osservazioni sui campi magnetici dovuti a correnti monofasi.

Si consideri dunque un campo magnetico generato, ad esempio, da una bobina ad asse rettilineo, come appare in fig. 9.41-1. Questa è alimentata, per ipotesi, con corrente sinusoidale, quale naturalmente potrebbe essere la corrente di una fase di un circuito trifase.

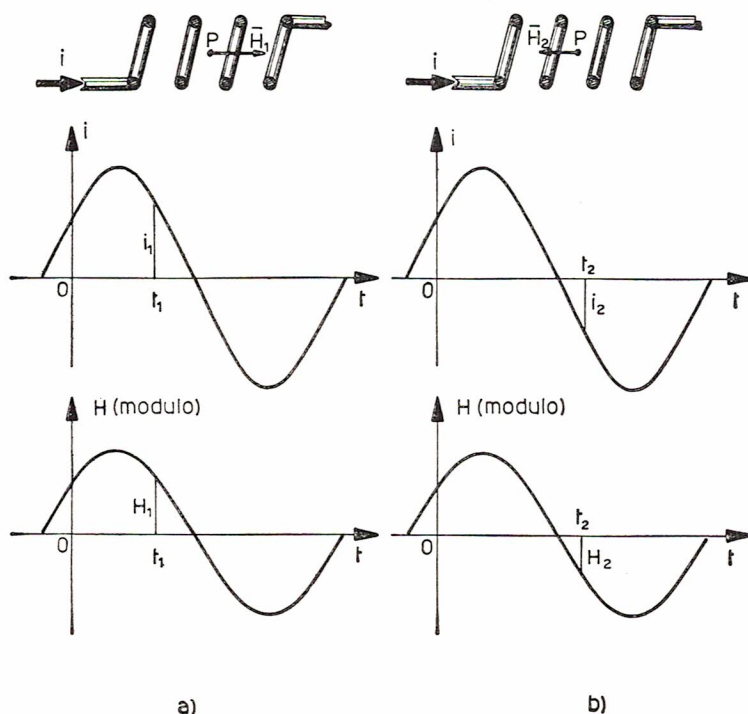



Fig. 9.41-1

Se ora si prende un punto all' interno della bobina, ad esempio il punto P posto sul suo asse, il vettore campo magnetico presenterà in tale punto sempre la stessa direzione, coincidente come si sa con l'asse della bobina, ma naturalmente la sua ampiezza seguirà quella della corrente. Pertanto quando quest' ultima inverte il senso di circolazione nella bobina (semiperiodo negativo) anche il vettore campo magnetico invertirà il suo verso (fig. 9.41-1*b*). In sostanza, dunque, il vettore campo magnetico in questione *non ruota* ma semplicemente è alternativo [infatti $H = H_M$ sen $(\omega t + \psi)$] come alternativa è la corrente $i = I_M$ sen $(\omega t + \psi)$ che alimenta la bobina.

Tuttavia si dimostra che questo vettore *alternativo*, la cui direzione nello spazio risulta immutabile (essa è infatti tangente alla linea di forza nel punto considerato), può essere considerato costituito in ogni istante da due vettori (campi magnetici) rotanti aventi ampiezza costante eguale alla metà del valore massimo raggiunto dal vettore *alternativo* e caratterizzati da velocità di rotazione pure costante, tale da far compiere loro un giro nel tempo corrispondente ad un periodo della

corrente alternata di alimentazione. I versi di rotazione di questi due vettori sono invece fra loro contrari, per cui se uno è destrogiro l'altro risulterà sinistrogiro.

Nella fig. 9.41-2 è stata riportata la costruzione vettoriale che mostra abbastanza chiaramente come un vettore di ampiezza costante ($\bar{H}_d$) rotante nel verso destrogiro (velocità angolare $+\ \omega$) ed un vettore di ampiezza pure costante ($\bar{H}_s$) ma rotante nel verso sinistrogiro (velocità angolare $-\ \omega$) siano le componenti di un vettore fisso nello spazio però di ampiezza variabile nel tempo secondo la legge sinusoidale. Sempre dalla fig. 9.41-2 si può verificare come sia necessaria la condizione $H_d = H_s = = \frac{H_M}{2}$ e come nell' istante in cui il campo raggiunge il massimo valore i due vettori componenti debbano avere la stessa direzione e lo stesso verso del vettore dato (fig. 9.41-2c).

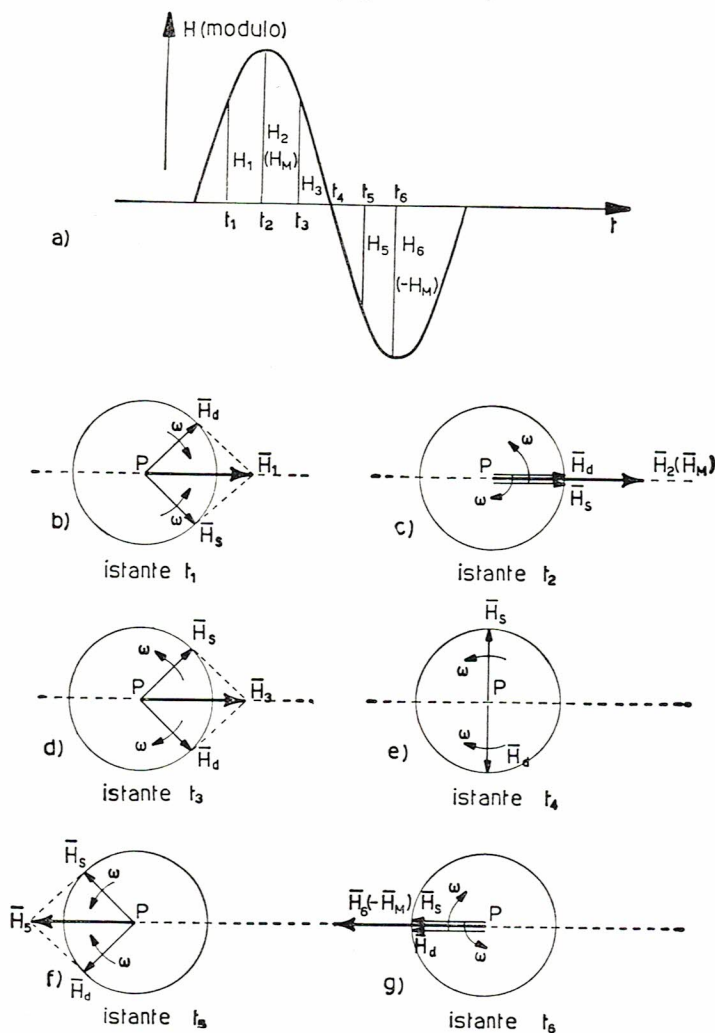



Fig. 9.41-2

Concludendo, si può ora affermare che un qualsiasi circuito percorso da corrente alternata crea attorno a sé un campo magnetico alternato il quale, in ogni punto, può essere considerato *equivalente* a due campi magnetici di intensità costante e ruotanti in versi opposti. Come si può intuire questa proprietà è della massima importanza.

9.42 Campi rotanti trifasi

Per ottenere un solo campo magnetico rotante occorre disporre di tre bobine eguali, aventi posizioni simmetriche, i cui assi siano disposti fra di loro in un piano a 120° l'uno dall'altro e i cui avvolgimenti siano percorsi da un sistema trifase simmetrico di correnti. Si veda la fig. 9.42-1 per maggiore comprensione.

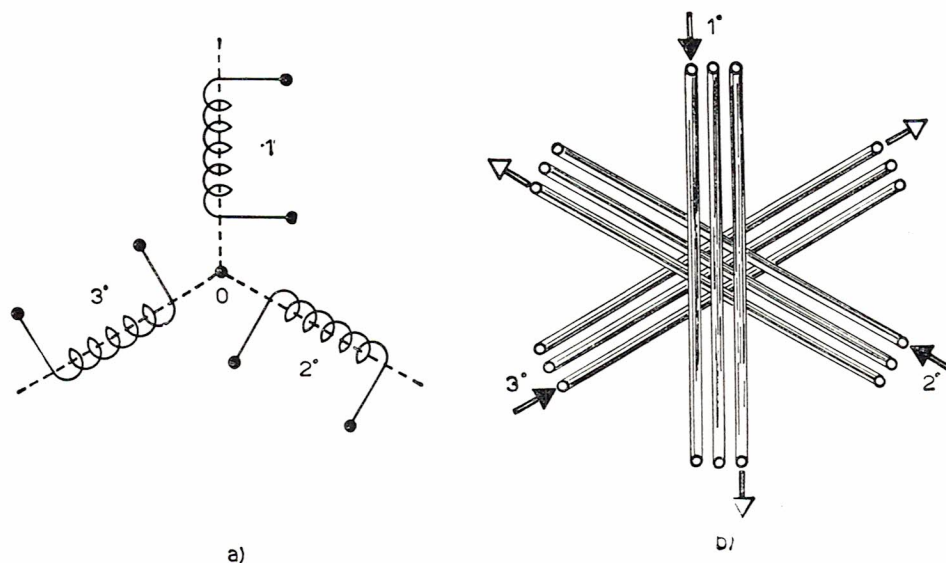



Fig. 9.42-1

Come questo dispositivo possa dar luogo ad un campo magnetico rotante è facilmente dimostrabile qualora si considerino prima le componenti vettoriali $\overline{H}_d$ e $\overline{H}_s$ del campo magnetico generato da ciascuna bobina e quindi si proceda alla determinazione della risultante complessiva.

Si incominci coll'osservare anzitutto che le tre bobine generano nella zona centrale *O* dei campi magnetici che raggiungono la stessa intensità H_M, a causa dell'eguaglianza ed equidistanza delle tre bobine e dell'alimentazione trifase, ma che proprio per quest'ultimo fatto essi sono ciclicamente in ritardo nel tempo di un terzo di periodo (diagramma di fig. 9.42-2*a*). Così, se la prima bobina genera lungo il suo asse nel punto

centrale O (fig. 9.42-2b), ad un certo istante t (fig. 9.42-2a), ad esempio il vettore $\overline{H}_1$ della seguente intensità:

$$H_1 = H_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi) , \tag{9.42-1}$$

allora la seconda bobina, nello stesso punto e nello stesso istante, genererà un campo magnetico rappresentabile lungo l'asse di questa bobina con il vettore $\overline{H}_2$ e la cui intensità risulta data da:

$$H_2 = H_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi - 120^0) , \tag{9.42-2}$$

poiché è dovuta ad una corrente che ritarda sulla prima di un terzo di periodo; d'altra parte la terza bobina genererà nello stesso punto e nello stesso istante un campo magnetico il cui vettore $\overline{H}_3$ presenta la seguente ampiezza:

$$H_3 = H_M \operatorname{sen}(\omega t + \psi - 240^0) \tag{9.42-3}$$

ed ha per direzione l'asse di quest'ultima bobina.

Si deve quindi osservare che ciascuno dei tre vettori $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3$ può

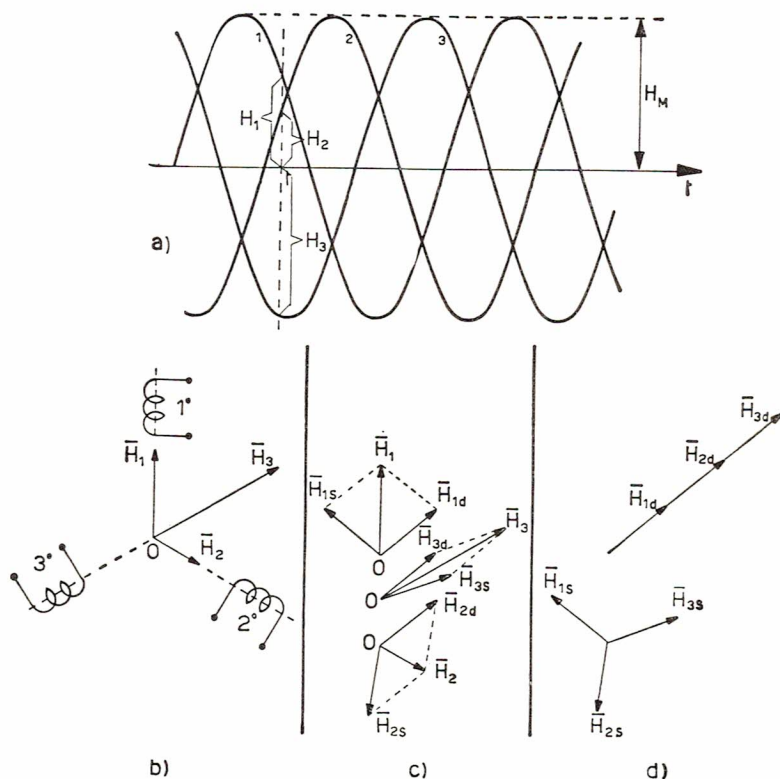



Fig. 9.42-2

essere scomposto, in base ai risultati del paragrafo precedente, in un vettore destrogiro ed uno sinistrogiro. Ciò appare in fig. 9.42-2*c*. Poiché d'altronde il campo magnetico $\overline{H}$ nel punto centrale O è determinato dall'azione simultanea dei tre avvolgimenti in quel punto basterà procedere per la sua determinazione alla composizione vettoriale di tutte le componenti destrogire e sinistrogire dovute ai tre vettori. Ora, poiché i tre vettori $\overline{H}_{1s}$, $\overline{H}_{2s}$, $\overline{H}_{3s}$ hanno risultante nulla in quanto essi costituiscono, si veda la fig. 9.42-2*d*, una terna di vettori di eguale intensità ma sfasati fra di loro di 120^0, e poiché i tre vettori $\overline{H}_{1d}$, $\overline{H}_{2d}$, $\overline{H}_{3d}$ risultano fra loro paralleli, questa composizione porta ad un unico vettore la cui ampiezza è tre volte quella della componente destrogira.

Poiché quanto sopra esposto è stato dedotto per un istante generico t si può affermare che in un altro qualsiasi istante la risultante dei tre vettori $\overline{H}_{1s}$, $\overline{H}_{2s}$, $\overline{H}_{3s}$, componenti sinistrogire dei campi magnetici generati dalle tre bobine, risulterà nulla per cui nello stesso istante il vettore $\overline{H}$ sarà dato dalla somma (vettoriale) dei tre vettori $\overline{H}_{1d}$, $\overline{H}_{2d}$, $\overline{H}_{3d}$, componenti destrogire. Queste però risultano sempre fra loro parallele per cui si ha in definitiva che:

9.42-4
$$H = 3\,H_d = \frac{3}{2}\,H_M .$$

D'altronde la direzione del vettore $\overline{H}$ si sposta nel piano nel verso positivo di ω, quindi nel verso destrogiro (antiorario), perché questo è il verso con cui ruotano i vettori $\overline{H}_d$ e perché la direzione e il verso di $\overline{H}$ coincidono con la direzione e il verso di $\overline{H}_d$.

I tre avvolgimenti generano dunque, se percorsi da correnti di eguale ampiezza e di eguale frequenza ma sfasate fra di loro ciclicamente di 1/3 di periodo, un campo magnetico rotante d'intensità costante che vale 3/2 dell'intensità massima (H_M) raggiunta dal campo magnetico prodotto da un singolo avvolgimento; il campo ruota d'altra parte con velocità angolare uniforme $\omega = 2\pi f$ (poiché costante è per ipotesi la frequenza delle correnti di alimentazione) cosicché esso compie un giro completo in un periodo $\left(T = \frac{1}{f}\right)$. D'altronde la direzione del vettore campo magnetico rotante si troverà a passare per l'asse di quella bobina nello istante in cui la corrente ivi circolante raggiunge il massimo valore poiché in quest'istante particolare la direzione della componente destrogira del campo da essa prodotto coincide con l'asse della bobina (fig. 9.41-2*c*).

Si osservi ancora che il verso di rotazione del campo magnetico coincide con quello della successione dei ritardi di fase. Per invertirne il senso di rotazione è quindi sufficiente invertire il senso ciclico delle fasi.

9.43 Applicazioni pratiche

I campi magnetici rotanti trovano un' importante applicazione in certi tipi di motori elettrici. Fra questi il più diffuso è quello cosiddetto *ad induzione* o anche *asincrono*. La sua relativa semplicità di costruzione, la sua robustezza e sicurezza nell'esercizio hanno fatto sì che esso si sia imposto nel campo industriale.

Questo motore è costituito sostanzialmente (fig. 9.43-1) da una parte rotante e da una parte fissa (statore). Quest'ultima risulta identica allo statore di un alternatore trifase. Essa quindi porta, nel tipo bipolare, un insieme

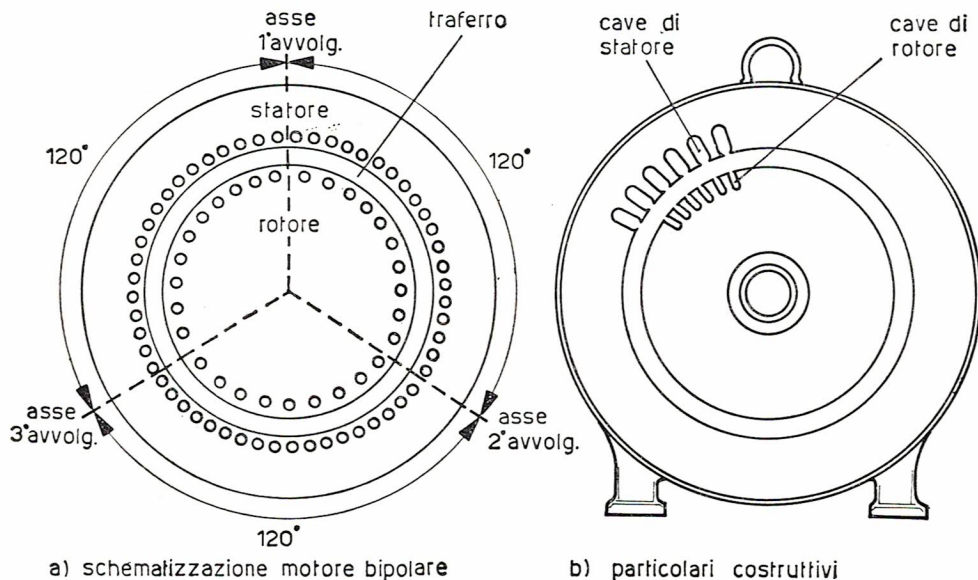



Fig. 9.43-1

di conduttori tali da costituire tre avvolgimenti sfasati ciclicamente di 120 gradi. La parte rotante (rotore) è costituita da un pacco cilindrico di lamierini di ferro-silicio ed è munita in superficie di scanalature (cave): in queste vengono collocati dei conduttori tali da costituire pure essi degli avvolgimenti trifasi, i quali risultano però chiusi in cortocircuito. Molte volte per semplicità in ogni cava si trova un solo conduttore: in questo caso l' insieme di tutti i conduttori, uniti lateralmente da due anelli pure conduttori, costituisce un rudimentale quanto semplice avvolgimento polifase (la cosiddetta *gabbia di scoiattolo*, vedi la fig. 9.43-2).

Ora il rotore del motore è soggetto all'azione di una coppia motrice quando gli avvolgimenti di statore sono alimentati con corrente trifase. In tal caso infatti queste generano all' interno della macchina (traferro) un campo magnetico rotante il quale investirà tutte le parti (attive) del rotore: in particolare gli avvolgimenti rotorici saranno tagliati dalle linee di flusso di questo campo magnetico rotante. Si verranno perciò

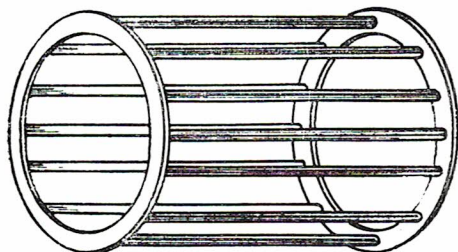



Fig. 9.43-2

a creare nei conduttori delle notevoli correnti indotte che, per la legge di Lenz, tenderanno ad opporsi al movimento dovuto al campo rotante stesso. Per questo motivo sul rotore si svilupperà una coppia motrice risultante che porterà in rotazione il rotore (se la coppia resistente non supera un certo valore) a quella velocità alla quale l'intensità delle correnti indotte [1] (che, come le *f.e.m.*, dipendono dalla velocità con la quale il flusso taglia i conduttori) saranno tali da sviluppare la coppia meccanica richiesta dal carico.

Caratteristica fondamentale del motore ad induzione è che il rotore presenta una velocità sempre inferiore a quella del campo magnetico rotante, che viene detta *velocità di sincronismo*: infatti il rotore non può mai raggiungerla [2] a causa delle coppie resistenti dovute agli attriti e alla ventilazione che agiscono sulla parte rotante anche quando il motore è scarico, esigendo perciò un minimo di coppia motrice e quindi di correnti indotte. Risulta chiaro infatti che, se il rotore ruotasse alla stessa velocità di sincronismo, nulle sarebbero le correnti indotte poiché il flusso rotante dovuto allo statore non taglierebbe più nessun conduttore di rotore. Ciò che conta infatti per la generazione delle correnti indotte negli avvolgimenti di rotore è il moto relativo del campo rotante rispetto al rotore.

---

(1) Questo tipo di motore è stato denominato appunto *ad induzione* perché la coppia motrice viene sviluppata dalla corrente indotta di rotore.

(2) La velocità del rotore del motore ad induzione non risulta dunque mai legata rigidamente alla velocità di sincronismo, ma ne differisce per una certa quantità (in pratica assai piccola): per questo motivo il motore è stato denominato anche col nome di *asincrono*, cioè non sincrono.

9.5 11 esercizi completamente svolti sui sistemi trifasi

Esercizio 9.51

Tre impedenze eguali ($\overline{Z} = 7 + j\,4$) sono collegate a stella ed alimentate con tensioni di linea che costituiscono una terna simmetrica diretta ($V = 380$ volt). Si trovi il valore delle correnti di linea sapendo che ciascuna impedenza è sede anche di una *f.c.e.m.* il cui valore efficace vale 180 volt e tale da formare con le altre *f.c.e.m.* una terna simmetrica diretta, il cui primo vettore coincide con il primo vettore delle tensioni di fase di alimentazione.

Soluzione

Le tensioni di fase di alimentazione costituiscono anch'esse una terna simmetrica diretta. Il valore di queste tensioni ammonta d'altronde a $E = \dfrac{V}{\sqrt{3}}$, cioè a $\dfrac{380}{1{,}73} = 220$ volt. Poiché le impedenze sono sede di *f.e.m.* del valore $E_i = 180$ volt, ma in opposizione di fase con quelle di alimentazione, su ciascuna fase agirà allora una tensione (E_z) che ne è la differenza, vale a dire $E_z = E - E_i = 220 - 180 = 40$ volt. Queste tensioni costituiranno anch'esse una terna simmetrica diretta.

Pertanto le tre correnti di linea costituiscono un sistema equilibrato. Ciascuna corrente presenta un' intensità del valore:

$$I = \frac{E_z}{Z} = \frac{E - E_i}{Z} = \frac{40}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{40}{8{,}06} = 4{,}96 \text{ ampere}$$

ed è sfasata sulla propria tensione di fase dell'angolo φ determinato dalla seguente relazione:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{4}{7} = -0{,}571_5 \,.$$

Dalle tavole trigonometriche si ricava allora che:

$$\varphi = -29^0\ 45'.$$

La corrente è dunque in ritardo sulla tensione. Le impedenze di carico assegnate sono infatti induttive.

Il diagramma vettoriale appare in fig. 9.51-1.

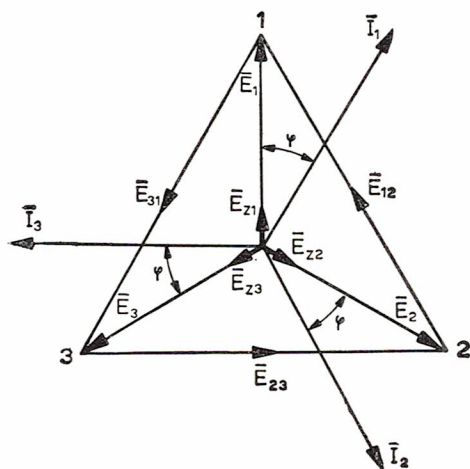



Fig. 9.51-1

Esercizio 9.52

Un alternatore trifase, le cui fasi sono collegate a stella (impedenza degli avvolgimenti di fase $\overline{Z}_A = \overline{Z}_B = \overline{Z}_C = \overline{Z}_0 = 1 + j\,4$), alimenta, tramite una linea trifase (impedenza di ciascun conduttore $\overline{Z}_l = 6 + j\,5)$], un carico costituito da tre impedenze uguali ($\overline{Z} = 63 + j\,18$) collegate a stella. Si trovi l' intensità della corrente di linea sapendo che la tensione a vuoto dell'alternatore è di 3000 volt.

Soluzione

Del circuito trifase è possibile studiare una sola fase dato che alternatore, linea e carico costituiscono un sistema simmetrico ed equilibrato. Ogni fase può essere allora schematizzata con un circuito monofase come appare in fig. 9.52-1, dove E_0 vale naturalmente $3000/\sqrt{3} = 1732$ volt.

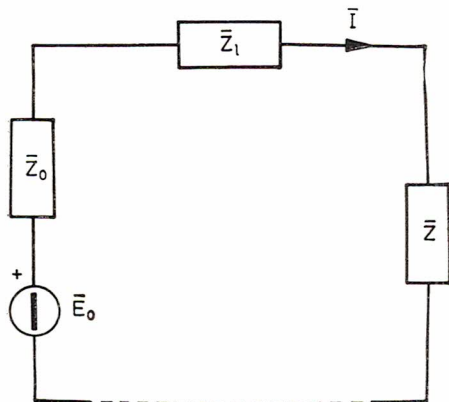



Fig. 9.52-1

La corrente di linea I risulta espressa pertanto, applicando la legge di Ohm al circuito di fig. 9.52-1, dalla seguente formula:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_0}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_l + \bar{Z}} .$$

La sua intensità, poiché $\bar{Z}_0 + \bar{Z}_l + \bar{Z} = 70 + j\,27$, vale dunque:

$$I = \frac{1732}{\sqrt{70^2 + 27^2}} = \frac{1732}{75} \cong 23 \text{ ampere} .$$

Esercizio 9.53

Si risolva l'esercizio precedente nel caso in cui le impedenze di carico siano collegate a triangolo.

Soluzione

Questo caso viene ricondotto ancora al precedente trasformando il triangolo dell'impedenza di carico nella stella equivalente. La cosa è assai facile poiché, trattandosi di carico equilibrato, si ha che:

$$\bar{Z}_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{3}\,\bar{Z}_{\triangle} ,$$

per cui le impedenze di carico risultano tuttora eguali fra di loro e del seguente valore:

$$\bar{Z}' = \frac{1}{3}\,\bar{Z} = \frac{1}{3}\,(63 + j\,18) = 21 + j\,6 .$$

Pertanto l'intensità della corrente di linea, poiché: $\bar{Z}_0 + \bar{Z}_l + \bar{Z}' = 28 + j\,15$, ammonta a:

$$I = \frac{1732}{\sqrt{28^2 + 15^2}} = \frac{1732}{31{,}8} = 54{,}5 \text{ ampere} .$$

Esercizio 9.54

Un carico trifase equilibrato induttivo ($R = 15$ ohm, $X = 18$ ohm), alimentato alla tensione $V = 380$ volt, viene rifasato parzialmente con una stella di tre condensatori eguali ($X_c = 15{,}7$ ohm) come appare in

fig. 9.54-1. Si trovi la variazione che ha subìto la corrente di linea in seguito all' inserzione dei condensatori.

Soluzione

Dato che i carichi risultano sempre equilibrati è possibile risolvere il problema prendendo in esame una sola fase del circuito trifase.

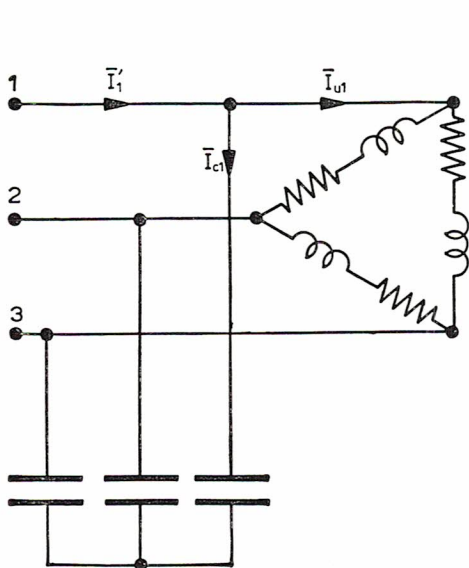



Fig. 9.54-1

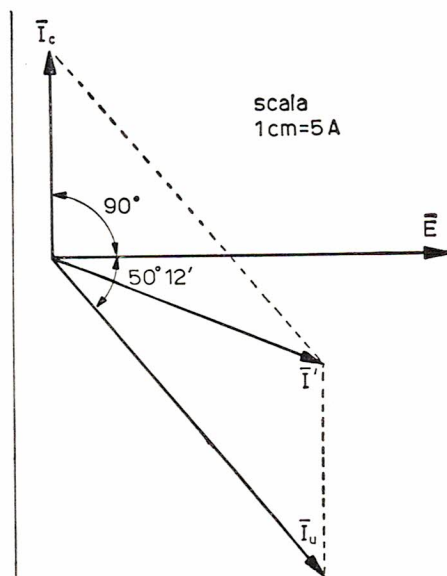



Fig. 9.54-2

Si incominci quindi ad osservare che la corrente di linea $\bar{I}$, prima dell' inserzione dei condensatori, coincide ovviamente con la corrente $\bar{I}_u$ dovuta al carico induttivo. Il modulo di questa vale d'altronde:

$$I = I_u = \sqrt{3}\,\frac{V}{Z} = \frac{1{,}73 \cdot 380}{\sqrt{15^2 + 18^2}} = \frac{657}{23{,}43} = 28 \text{ ampere}$$

e lo sfasamento φ (in ritardo sulla tensione di fase) è tale che:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{X}{R} = -\frac{18}{15} = -1{,}20\,,$$

per cui:

$$\varphi = -50^0\,12'\,.$$

D'altra parte assai facile è il calcolo della corrente I_c assorbita

dai condensatori poiché essa risulta in anticipo di 90° sulla tensione di fase e la sua intensità vale:

$$I_c = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{X_c} = \frac{220}{15{,}7} = 14 \text{ ampere}.$$

Si è ora in possesso di tutti i dati necessari per procedere al calcolo della nuova corrente di linea $\overline{I}'$ poiché questa, risultando come somma vettoriale di $\overline{I}_u$ con $\overline{I}_c$, può essere calcolata nel suo modulo, si veda il diagramma vettoriale di fig. 9.54-2, tramite il teorema di Carnot. Infatti si ha subito che:

$$I' = \sqrt{I_u^2 + I_c^2 + 2\, I_u I_c \cos 140^0\, 12'} =$$

$$= \sqrt{28^2 + 14^2 - 2 \cdot 28 \cdot 14 \cdot 0{,}768} = 19{,}46 \text{ ampere}.$$

Il rifasamento ha portato dunque la seguente diminuzione nell' intensità della corrente di linea:

$$\Delta I = \frac{I' - I}{I} = \frac{19{,}46 - 28}{28} = -30{,}5\ \%;$$

Il segno meno sta ad indicare che la variazione è stata negativa, cioè che si tratta appunto di una diminuzione.

Esercizio 9.55

Si tracci il diagramma vettoriale delle correnti di linea per il circuito rappresentato in fig. 9.55-1 il quale è alimentato alla tensione $V = 380$ volt.

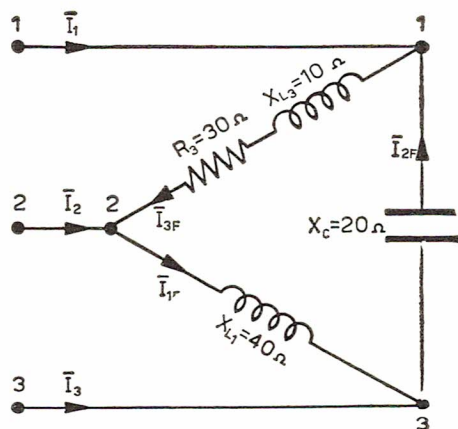



Fig. 9.55-1

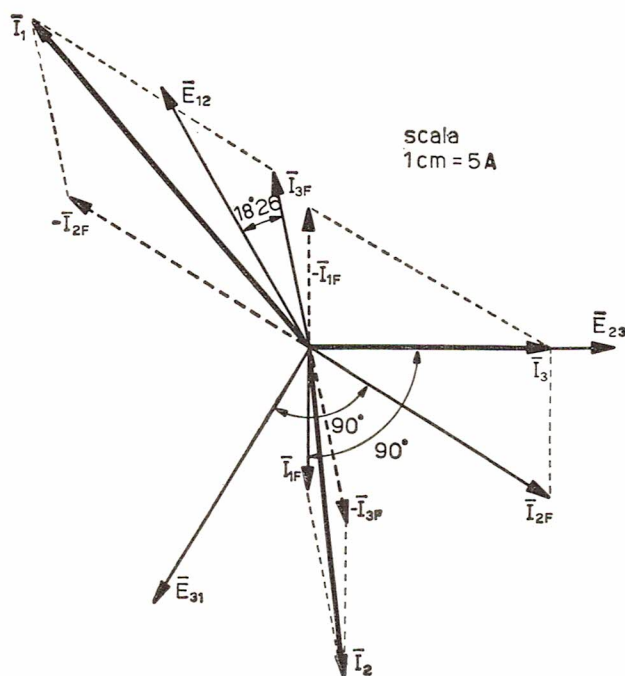



Fig. 9.55-2

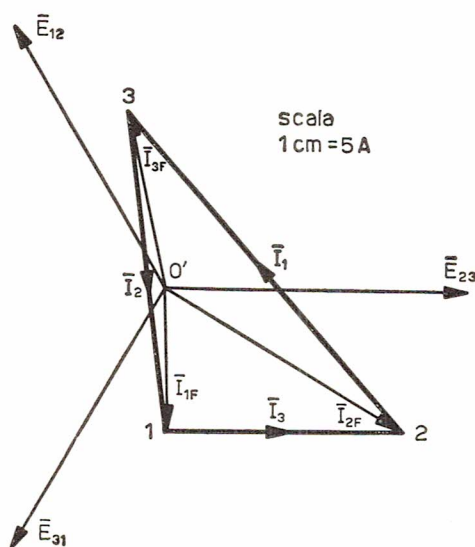



Fig. 9.55-3

Soluzione

Per tracciare il diagramma vettoriale delle correnti di linea occorre conoscere il diagramma vettoriale delle correnti di fase. Questo diagramma è facilmente tracciabile poiché :

— la corrente $\bar{I}_{1F}$ ha la seguente intensità:

$$I_{1F} = \frac{V}{X_{L1}} = \frac{380}{40} = 9{,}5 \text{ ampere}$$

ed è in ritardo sulla tensione $\bar{E}_{23}$ di 90^0;

— la corrente $\bar{I}_{2F}$ presenta la seguente intensità:

$$I_{2F} = \frac{V}{X_C} = \frac{380}{20} = 19 \text{ ampere}$$

ed è in anticipo di 90^0 sulla tensione $\bar{E}_{31}$;

— la corrente $\bar{I}_{3F}$ ha la seguente intensità:

$$I_{3F} = \frac{V}{Z_3} = \frac{380}{\sqrt{30^2 + 10^2}} = \frac{380}{31{,}62} = 12 \text{ ampere}$$

ed è in ritardo di $18^0\ 26'$ sulla tensione $\bar{E}_{12}$ $\left(\text{infatti } \operatorname{tg}\varphi_3 = -\frac{X_{L3}}{R_3} = -\frac{10}{30} = -0{,}333\right)$.

Disegnata allora la terna delle tensioni concatenate, ponendo per semplicità il vettore $\bar{E}_{23}$ sull'asse reale, si veda la fig. 9.55-2, sarà facile tracciare sullo stesso diagramma la terna delle correnti di fase in base ai risultati trovati sopra. Le correnti di linea risulteranno di conseguenza come differenze vettoriali, poiché, per ciascun nodo del circuito (fig. 9.55-1), vale il 1^0 principio di Kirchhoff, oppure anche, più semplicemente, tracciando direttamente il relativo triangolo, sempre dopo aver disegnato la stella delle correnti di fase, come appare in fig. 9.55-3.

Esercizio 9.56

Tre resistenze eguali ($R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ ohm) collegate a triangolo realizzano un carico trifase alimentato alla tensione $V = 220$ volt. Si determini la variazione percentuale subìta dalle tre correnti di linea nel caso in cui si interrompa la resistenza R_2.

Soluzione

Con tutte e tre le resistenze intatte (fig. 9.56-1a) il carico è equilibrato, per cui l' intensità di ciascuna corrente di linea vale:

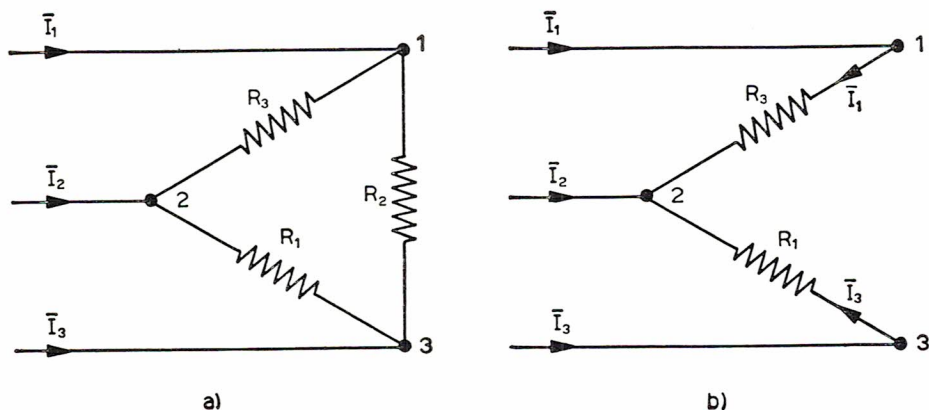



Fig. 9.56-1

$$I = \sqrt{3}\, I_F = \sqrt{3}\, \frac{V}{R} = 1{,}732\, \frac{220}{10} = 38{,}1 \text{ ampere}\,.$$

Con la resistenza R_2 interrotta il carico diventa squilibrato. Data però la particolare configurazione che viene ad assumere il circuito (fig. 9.56-1*b*), si deduce immediatamente che le correnti nel primo e nel terzo conduttore di linea hanno la stessa intensità:

$$I_1 = I_3 = \frac{V}{R} = \frac{220}{10} = 22 \text{ ampere}\,,$$

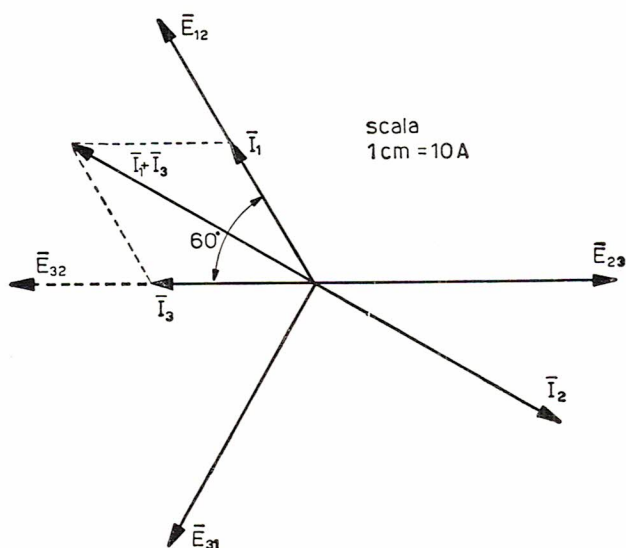



Fig. 9.56-2

la variazione è pertanto del 42,2 %; mentre la corrente nel secondo conduttore vale (a parte il segno) la somma di $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_3$, quindi:

$$I_2 = |\bar{I}_1 + \bar{I}_3| = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + 2\, I_1^2 I_3^2 \cos 60^0} =$$

$$= \sqrt{22^2 + 22^2 + 2 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 0{,}5} = 38{,}1 \text{ ampere},$$

e la variazione risulta nulla, come si poteva prevedere.

Per le relazioni vettoriali che intercorrono fra le tre correnti di linea nella nuova situazione di carico ($R_2 = \infty$) si veda il diagramma riportato in fig. 9.56-2.

Esercizio 9.57

Tre resistenze eguali ($R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ ohm) collegate a stella realizzano un carico trifase alimentato alla tensione $V = 220$ volt. Si determini la variazione percentuale subìta dalle correnti di linea e dalle tensioni di fase del carico nel caso in cui si interrompa la resistenza R_2.

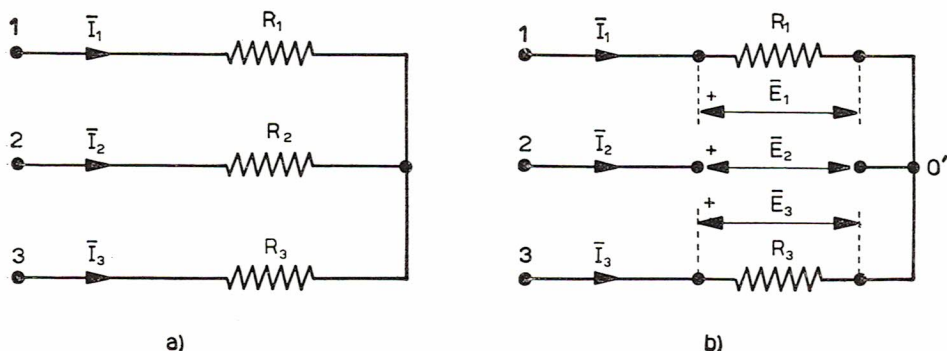



Fig. 9.57-1

Soluzione

Con tutte tre le resistenze intatte (fig. 9.57-1*a*) ciascuna corrente di linea vale:

$$I = \frac{\frac{V}{\sqrt{3}}}{R} = \frac{127}{10} = 12{,}7 \text{ ampere}$$

e la tensione di fase ammonta a:

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}} = \frac{220}{1{,}73} = 127 \text{ volt}.$$

Con la resistenza della seconda fase interrotta (vedi circuito di fig. 9.57-1*b*) si ha invece:

$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_{13}}{2\,R}$$

$$\bar{I}_2 = 0 .$$

Pertanto risulta che le correnti nei conduttori di linea 1 e 3 hanno ora la seguente intensità:

$$\frac{E_{13}}{2\,R} = \frac{220}{2 \cdot 10} = 11 \text{ ampere},$$

cui corrisponde una variazione in meno del 13,4 %, e che la corrente nel secondo conduttore di linea è nulla determinando così una variazione in meno del 100 %.

Le nuove tensioni di fase del carico E_1 ed E_3 sono d'altronde eguali in valore assoluto e risultano la metà della tensione concatenata di alimentazione poiché il centro stella O' cade nel punto di mezzo del vettore rappresentante la tensione di linea $\bar{E}_{31}$ (vedi diagramma di fig. 9.57-2). Si ha così:

$$E_1 = E_3 = \frac{V}{2} = \frac{220}{2} = 110 \text{ volt},$$

cui corrisponde una variazione del 13,4 % in meno; mentre la tensione della seconda fase del carico vale (fig. 9.57-2):

$$E_2 = V \text{ sen } 60^0 = 220 \cdot 0{,}866 = 190{,}5 \text{ volt},$$

cui corrisponde una variazione in più del 50 %.

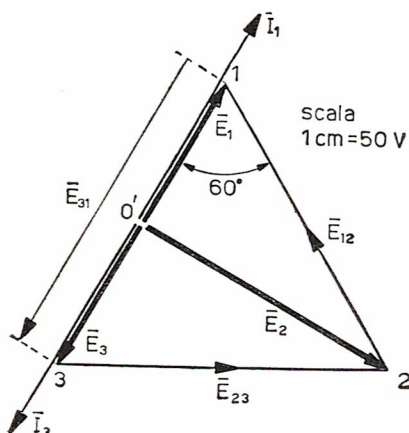



Fig. 9.57-2

Esercizio 9.58

Un circuito L-C trifase è costituito come in fig. 9.58-1. Si trovi il valore della tensione ai capi della capacità in funzione della tensione V di linea.

Soluzione

Trattandosi di carico squilibrato la tensione ai capi della capacità può essere espressa dalla seguente formula:

$$\bar{E}_c = \bar{E}_2 = \bar{E}_{20} - \bar{E}_{0'0},$$

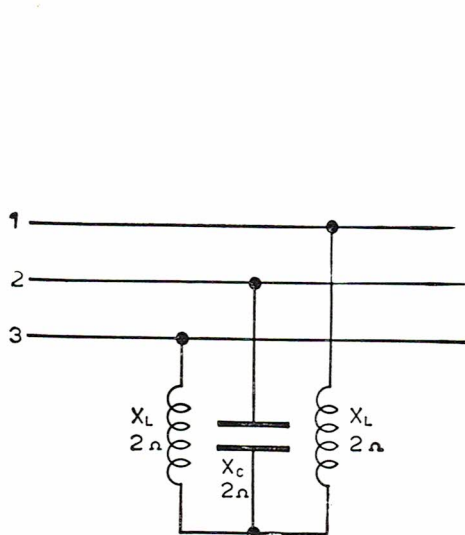



Fig. 9.58-1

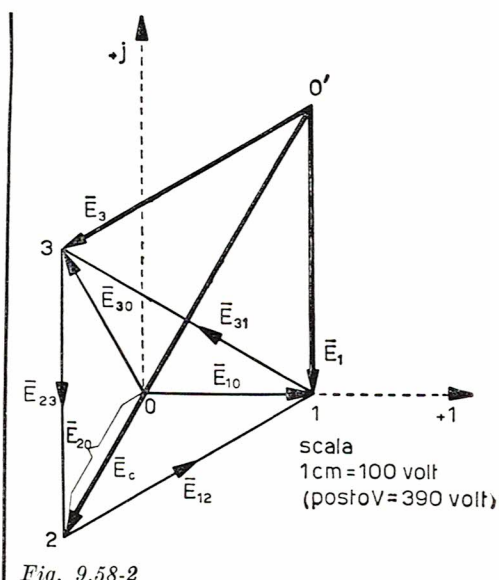



Fig. 9.58-2

dove $\bar{E}_{0'0}$ rappresenta la *d.d.p* del centro reale *O'* rispetto al centro teorico del sistema.

Posto come al solito il primo vettore ($\bar{E}_{10}$) della terna delle tensioni stellate (simmetriche) sull'asse reale, il termine $\bar{E}_{0'0}$ risulta allora così definito:

$$\bar{E}_{0'0} = \frac{V}{\sqrt{3}} \frac{\dfrac{1}{jX_L} + \dfrac{\varepsilon^{-j\,120^0}}{-jX_c} + \dfrac{\varepsilon^{j\,120^0}}{jX_L}}{\dfrac{1}{jX_L} + \dfrac{1}{-jX_c} + \dfrac{1}{jX_L}},$$

che, con i dati del problema, diventa:

$$\bar{E}_{0'0} = \frac{V}{\sqrt{3}} \frac{-j\,0{,}5 + 0{,}5\ \varepsilon^{-j\,30^0} + 0{,}5\ \varepsilon^{j\,30^0}}{-j\,0{,}5} = \frac{V}{\sqrt{3}} \frac{0{,}866 - j\,0{,}5}{-j\,0{,}5} =$$

$$= V\,(0{,}578 + j\,1)\ .$$

Pertanto si ottiene:

$$\bar{E}_c = \bar{E}_{20} - \bar{E}_{0'0} = V\left(\frac{\cos 120^0 - j \operatorname{sen} 120^0}{1{,}73} - 0{,}578 - j\,1\right) =$$

$$= V\,(-\,0{,}867 - j\,1{,}50)\ .$$

Il modulo di questa tensione vale dunque:

$$E_c = V\sqrt{0{,}867^2 + 1{,}50^2} = V\sqrt{3}\ .$$

Concludendo, la tensione ai capi della capacità assume $\sqrt{3}$ volte il valore della tensione concatenata e quindi 3 volte il valore della tensione di fase del sistema. Questo infatti è un caso particolare di carico che dà al circuito la caratteristica della risonanza serie (con i dati del problema il circuito non è però in perfetta risonanza, poiché questa si ha quando $X_L = X_c/2$).

Per il diagramma vettoriale delle tensioni in gioco nel circuito si veda la fig. 9.58-2.

Esercizio 9.59

Un motore elettrico trifase della potenza meccanica di 4 kW (rendimento $\eta = 0{,}82$ e fattore di potenza $\cos\varphi = 0{,}80$) è alimentato alla tensione $V = 220$ volt. Calcolare il valore dell' intensità della corrente assorbita e della potenza apparente.

Soluzione

Il motore assorbe dalla linea che lo alimenta una potenza elettrica che risulta essere quella fornita al suo asse (potenza meccanica) divisa per il rendimento. Quindi:

$$P = \frac{P_{mecc}}{\eta} = \frac{4}{0{,}82} = 4{,}88\ \text{kW}\ .$$

D'altrondo questa potenza elettrica può essere espressa con la seguente formula:

$$P = \sqrt{3}\ VI\cos\varphi\ ,$$

dalla quale si ricaverà appunto l' unica incognita che è la corrente di linea I. Si ha così:

$$I = \frac{P}{3\,V\cos\varphi} = \frac{4880}{1{,}73\cdot 220\cdot 0{,}80} \cong 16 \text{ ampere}\,.$$

In queste condizioni il motore è caratterizzato perciò dalla seguente potenza apparente:

$$A = \sqrt{3}\,V\,I = 1{,}73\cdot 220\cdot 16 = 6{,}1\ \text{kVA}\,.$$

Esercizio 9.510

Un carico trifase equilibrato induttivo, alla tensione di 220 volt e alla frequenza di 50 per/sec, assorbe una potenza attiva $P = 2$ kW con un fattore di potenza $\cos\varphi = 0{,}60$.

Calcolare la potenza reattiva della batteria trifase di condensatori necessari per portare il fattore di potenza a 0,80 e il valore della capacità dei condensatori impiegati supponendo il loro collegamento a triangolo (fig. 9.510-1).

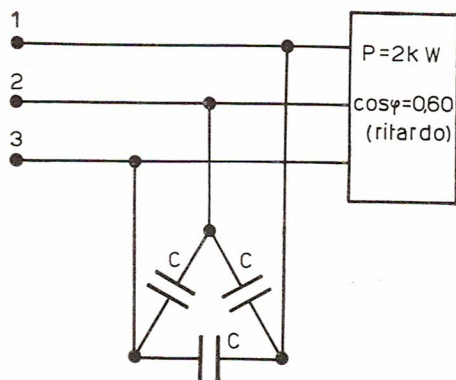



Fig. 9.510-1

Soluzione

Il calcolo della potenza reattiva Q_c della batteria di condensatori che deve portare il circuito da $\cos\varphi = 0{,}60$ a $\cos\varphi' = 0{,}80$, può essere impostato nello stesso modo visto per i circuiti monofasi. In particolare vale la costruzione del triangolo delle potenze riportate in figura 5.512-2, da cui si deduce che:

$$Q_c = P(\text{tg}\varphi - \text{tg}\varphi')\,.$$

Basterà quindi ricavare dalle tavole trigonometriche quale valore abbia

la tangente dell'angolo φ che ha per coseno 0,60 ($\text{tg}\,\varphi = 1{,}334$) e quale valore abbia la tangente dell'angolo φ' che ha per coseno 0,80 ($\text{tg}\,\varphi' = 0{,}750$).

Con i dati così trovati si ottiene perciò:

$$Q_c = 2\,(1{,}334 - 0{,}750) = 2 \cdot 0{,}584 = 1{,}17 \text{ kVAR}.$$

Per il calcolo del valore da assegnare alla capacità C si osservi (fig. 9.510-1) che la potenza reattiva sviluppata da questa (cioè da una fase della batteria) è espressa dalla formula:

$$2\pi f \cdot C V^2,$$

poiché nel collegamento a triangolo ogni capacità C è sottoposta a tutta la tensione di linea V. L'intera batteria, costituita dalle tre fasi, impegnerà quindi una potenza tre volte quella sopra espressa per una fase. Risulta così:

$$Q_c = 3 \cdot 2\pi f \cdot C V^2,$$

da cui si ricava:

$$C = \frac{Q_c}{6\,\pi\, f V^2} = \frac{1170}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 220^2} = \frac{1170}{45{,}6 \cdot 10^6} = 25{,}7\ \mu\text{F}.$$

Esercizio 9.511

Calcolare corrente di linea, potenza attiva, potenza reattiva e fattore di potenza del circuito riportato in fig. 9.511-1, ove $R_1 = R_2 = R_3 = R = 20$ ohm e $X_{c1} = X_{c2} = X_{c3} = X_c = 40$ ohm.

Tensione di alimentazione del circuito $V = 380$ volt.

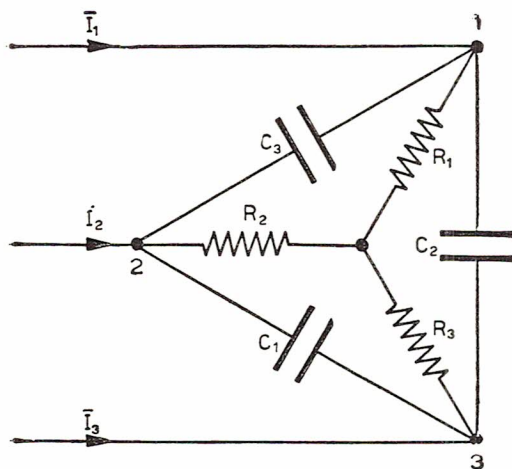



Fig. 9.511-1

Soluzione

Conviene incominciare a calcolare subito la potenza attiva P e reattiva Q del circuito trifase assegnato.

Ora la potenza attiva P del circuito, poiché questa è dovuta alle sole resistenze, vale, essendo il carico equilibrato, tre volte la potenza attiva di fase:

$$P = 3\frac{E^2}{R} = \frac{V^2}{R} = \frac{380^2}{20} = \frac{144{,}4 \cdot 10^3}{20} = 7{,}22 \text{ kW};$$

così pure per la potenza reattiva Q del circuito, poiché questa è dovuta alle sole tre capacità, essendo eguali e sottoposte alla stessa tensione V di linea, si ottiene:

$$Q = 3\frac{V^2}{X_c} = \frac{3 \cdot 380^2}{40} = \frac{433{,}2 \cdot 10^3}{40} = 10{,}8 \text{ kVAR}.$$

Il fattore di potenza (che risulta in anticipo) ammonta perciò a:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{7{,}22}{\sqrt{7{,}22^2 + 10{,}8^2}} = \frac{7{,}22}{13} = 0{,}556.$$

Facile è calcolare a questo punto l'intensità della corrente di linea del circuito poiché:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}\, V\cos\varphi} = \frac{7{,}22 \cdot 10^3}{1{,}73 \cdot 380 \cdot 0{,}556} = \frac{7220}{366} = 19{,}7 \text{ ampere}.$$

APPENDICE

82 esercizi da svolgere, con soluzione

A.1 Corrente continua

Esercizio A.11

Un ampermetro (caduta 100 mV f.s.) deve essere tramutato in voltmetro per 2 volt fondo scala. In tali condizioni il voltmetro dovrà dissipare 0,5 watt. Trovare : 1) la portata dell'ampermetro ; 2) il valore del resistore addizionale.

Soluzione

1) Portata 0,25 ampere ; 2) resistenza del resistore addizionale 7,6 ohm.

Esercizio A.12

Un milliampermetro (portata 1 mA f.s.), avente in serie una resistenza stabilizzatrice, deve essere trasformato in un ampermetro per 10 ampere di fondo scala. Sapendo che in questa ultima condizione l'ampermetro deve presentare una caduta di tensione di 100 mV, mentre il milliampermetro da solo ha 20 mV di caduta, si trovi il valore da assegnare alla resistenza stabilizzatrice e a quella necessaria per realizzare lo shunt.

Soluzione

1) Resistenza stabilizzatrice 80 ohm ; 2) resistenza dello shunt 0,01 ohm.

Esercizio A.13

Enumerare i possibili provvedimenti *circuitali* necessari per annullare la corrente nella resistenza R_u del circuito riportato in fig. A 13-1a.

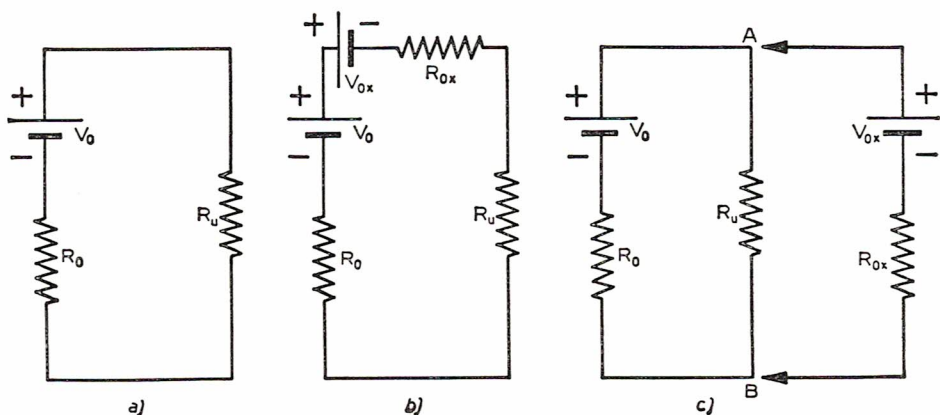



Fig. A.13-1

Soluzione

È sufficiente uno dei seguenti accorgimenti:

1) aprire il circuito; 2) mettere un collegamento di cortocircuito in parallelo ad R_u; 3) inserire in serie ad R_u un generatore di tensione avente una *f.e.m.* $V_{0x} = V_0$ (e resistenza interna R_{0x} di valore qualsiasi) come appare in fig. A. 13-1b; 4) inserire in parallelo ad R_u un generatore di tensione con polarità discorde, come appare in fig. A. 13-1c. I valori di V_{0x} e di R_{0x} dovranno soddisfare la seguente condizione $V_{0x}/R_{0x} = V_0/R_0$ (tale condizione può essere ricavata molto facilmente applicando il principio di Millman alla rete di fig. A. 13-1c); 5) inserire la resistenza R_u nella diagonale di un ponte di Wheatstone in equilibrio, ponte alimentato dal generatore di *f.e.m.* V_0.

Esercizio A.14

Una linea elettrica a 2000 volt, lunga 1 km, trasporta la potenza di 100 kW. Calcolare la resistenza della linea e la sezione del conduttore di rame ($\rho = 0{,}017\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$) sapendo che la caduta di tensione in linea è del 4 %.

Soluzione

1) Resistenza della linea 1,6 ohm; 2) sezione del conduttore $\cong$ 21,3 mm^2.

Esercizio A.15

Quanti nodi e quante maglie indipendenti verrà a possedere la rete riportata in fig. A. 15-1 quando l'interruttore risulterà chiuso?

Soluzione

Un solo nodo indipendente (poiché i punti *A* e *B* coincidono rispettivamente con i punti *B* e *D*) e due maglie indipendenti.

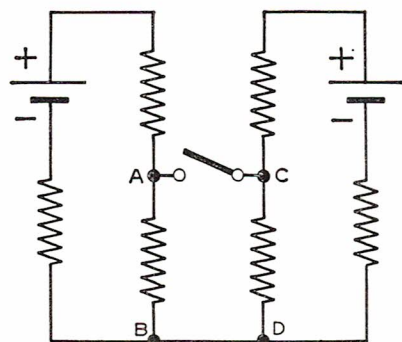
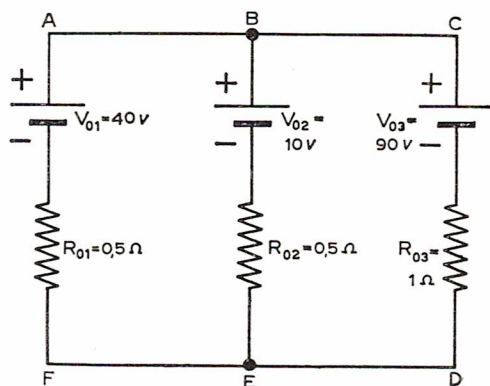



Fig. A.15-1 *Fig. A.16-1*

Esercizio A.16

Trovare i valori e i versi assunti dalle correnti nei rami costituenti la rete riportata in fig. A 16-1.

Soluzione

1) Corrente $I_1 = 4$ ampere col verso da *F* ad *A*; 2) corrente $I_2 = 56$ ampere col verso da *B* ad *E*; 3) corrente $I_3 = 52$ ampere col verso da *D* a C.

Esercizio A.17

Trovare il valore e il verso della corrente che percorre il tronco di circuito riportato in fig. A. 17-1 sapendo che $V_{AB} = -20$ volt.

Soluzione

La corrente ammonta a 1,29 ampere e ha il verso da B ad A.

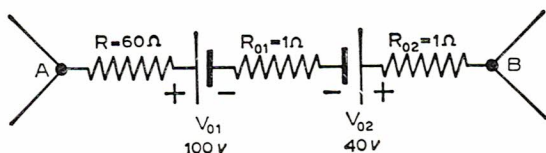



Fig. A.17-1

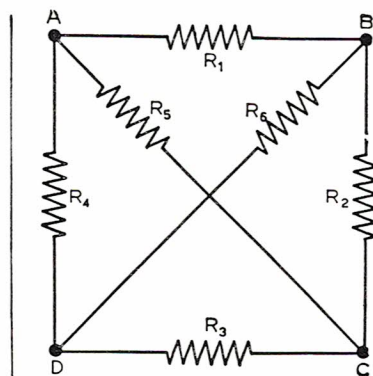



Fig. A.18-1

Esercizio A.18

Si calcoli il valore della resistenza equivalente che la rete di fig. A. 18-1 costituita da sei resistenze tutte eguali fra di loro (10 ohm), offre fra i punti A e C.

Soluzione

$R_{AC} = 5$ ohm.

Esercizio A.19

Si calcoli il valore della resistenza equivalente che la rete riportata in fig. A. 19-1, costituita da otto resistenze tutte eguali fra di loro (12 ohm), offre fra i punti A e C.

Soluzione

$R_{AC} = 8$ ohm.

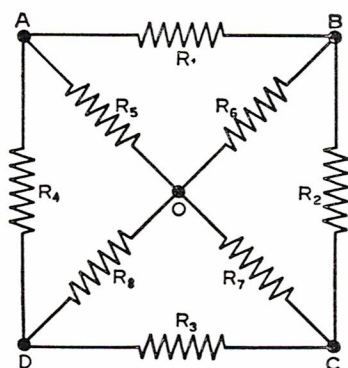



Fig. A.19-1

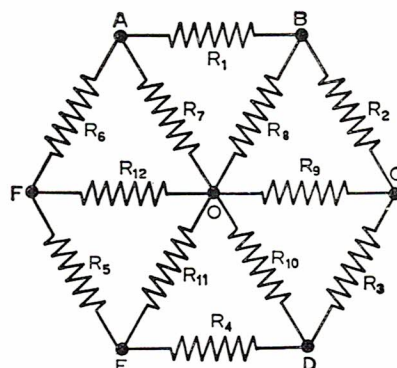



Fig. A.110-1

Esercizio A.110

Si calcoli la resistenza equivalente fra i punti C e F della rete riportata in fig. A. 110-1, rete costituita da dodici resistenze eguali (8 ohm).

Soluzione

$R_{CF} = 6{,}4$ ohm.

Esercizio A.111

Trovare intensità e verso della corrente che attraversa il generatore di *f.e.m.* V_{02} facente parte della rete elettrica riportata in fig. A. 111-1.

Soluzione

La corrente I_2 vale 1 ampere ed ha il verso da M a N.

Esercizio A.112

Due generatori di eguale tensione a vuoto ($V_{01} = V_{02} = 100$ volt) ma di differente corrente di cortocircuito ($I_{1cc} = 5\,I_{2cc} = 10$ ampere) vengono messi in serie allo scopo di aumentare la tensione ai capi di un carico resistivo il quale deve assorbire una corrente $I = 0{,}1\,I_{2cc}$.

Poiché i due generatori devono funzionare entrambi con una corrente eguale a 1/10 di quella rispettiva di cortocircuito, dire quali provvedimenti circuitali occorre prendere e con quale rendimento elettrico viene alimentato il carico. Trovare inoltre il valore R_u della resistenza di carico.

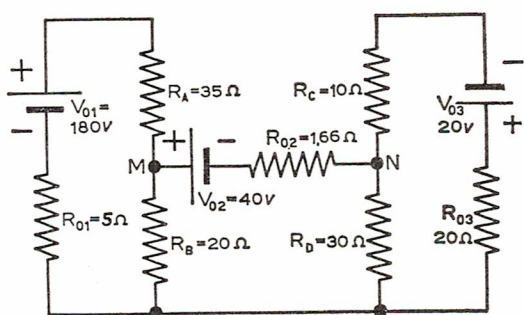



Fig. A.111-1

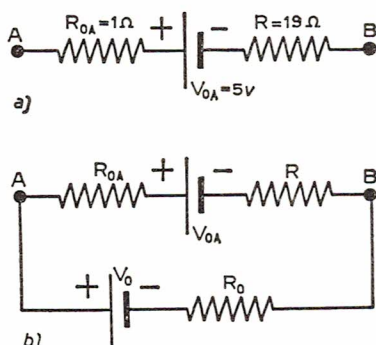



Fig. A.113-1

Soluzione

1) Occorre porre in parallelo al generatore di *f.e.m.* V_{01} una resistenza del valore di 112,5 ohm ; 2) il rendimento elettrico vale 0,30 ; 3) la resistenza di carico ammonta a 900 ohm.

Esercizio A.113

Il bipolo AB riportato in fig. A. 113-1*a* deve essere alimentato con un generatore reale di tensione in modo tale che la corrente nel bipolo assegnato scorra da A verso B e assuma l' intensità di 2 ampere e per il generatore che lo alimenta il rendimento elettrico sia di 0,90.

Disegnare il circuito e trovare i valori di V_0 e di R_0.

Soluzione

1) $V_0 = 50$ volt ; 2) $R_0 = 2,5$ ohm ; 3) per il disegno si veda la fig. A. 113-1*b*.

Esercizio A.114

Quale valore si deve assegnare alla *f.e.m.* V_{01} e alla resistenza R_{02} affinché, chiuso l' interruttore della rete riportata in fig. A. 114-1, non passi corrente attraverso l' interruttore stesso ?

Soluzione

1) $V_{01} = 0$; 2) R_{02} può assumere qualsiasi valore, poiché questa resistenza non è attraversata da corrente.

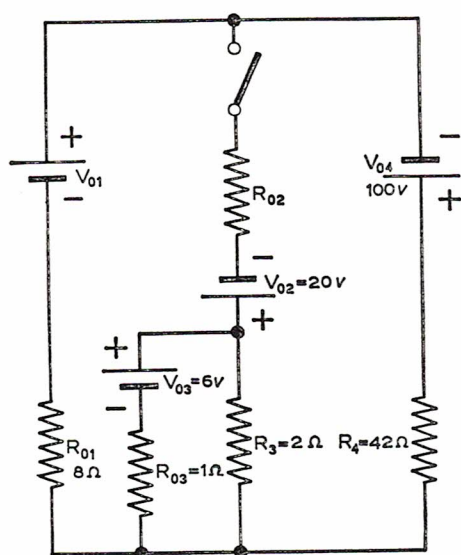



Fig. A.114-1

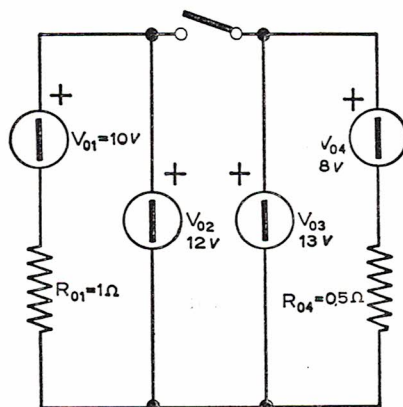



Fig. A.116-1

Esercizio A.115

Trovare i parametri caratteristici del generatore reale di corrente affinché il carico $R_u = 10$ ohm da esso alimentato dissipi una potenza $P_u = 10$ watt con un rendimeto elettrico di 0,6.

Soluzione

1) $I_0 = 1,666$ ampere ; 2) $R_0 = 15$ ohm.

Esercizio A.116

Che cosa succede chiudendo l' interruttore della rete riportata in fig. A. 116-1 ?

Soluzione

Con l' interruttore chiuso la rete diventa impossibile, poiché vengono ad essere in parallelo due generatori ideali di tensione (V_{02} e V_{03}) aventi differente *f.e.m.*

Esercizio A.117

Un generatore ideale di corrente si trova in parallelo ad un generatore ideale di tensione. È possibile ?

Soluzione

Si, è possibile

Esercizio A.118

A due generatori reali di corrente, fra di loro in serie, viene posto in parallelo, si veda la fig. A. 118-1, un generatore ideale di corrente. È possibile ? Quali le caratteristiche dell'eventuale generatore equivalente ?

Soluzione

1) È possibile ; 2) la corrente di cortocircuito del generatore equivalente vale $I_{01} + (I_{02}R_{02} + I_{03}R_{03})/(R_{02} + R_{03})$; mentre la resistenza interna equivalente ammonta a $R_{02} + R_{03}$.

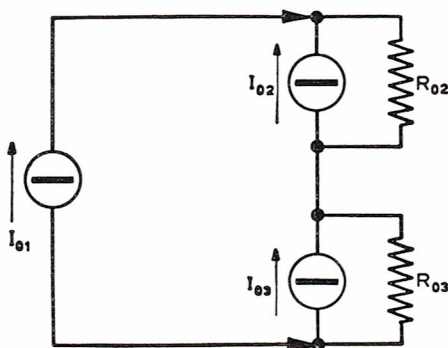
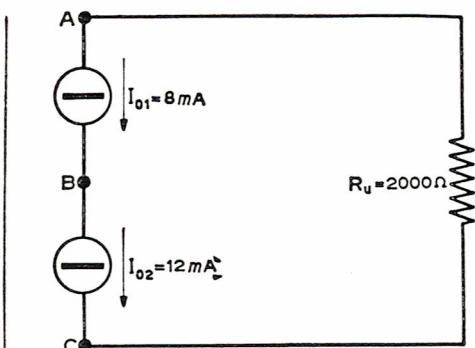



Fig. A.118-1 *Fig. A.119-1*

Esercizio A.119

Il circuito riportato in fig. A. 119-1 è impossibile. Per togliere l'assurdità ivi esistente è sufficiente porre una resistenza R ai capi di uno dei due generatori. Quale valore deve avere questa resistenza se $V_{AB} = -10$ volt ?

Soluzione

1) La resistenza R deve essere posta in parallelo al generatore di corrente I_{02} ; 2) $R = 1500$ ohm.

Esercizio A.120

Si trovi l'espressione analitica e quindi il valore della corrente che fluisce nel cortocircuito AB della rete riportata in fig. A. 120-1.

Soluzione

$I_{cc} = V_0/R_1 = 2$ ampere.

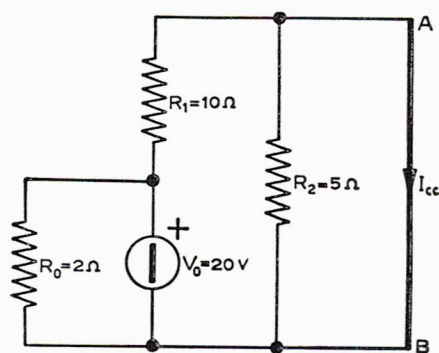



Fig. A.120-1

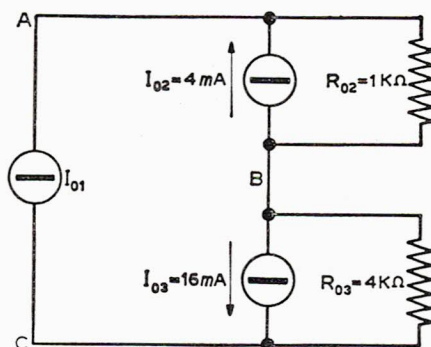



Fig. A.121-1

Esercizio A.121

Assegnare intensità e verso alla corrente I_{01} del generatore ideale di corrente affinchè fra i punti A e C del circuito riportato in fig. A. 121-1 si abbia una *d.d.p.* del valore di 10 volt.

Soluzione

La corrente I_{01} ammonta a 14 mA e va da C verso A.

Esercizio A.122

Si trovi il valore della corrente circolante nella resistenza R_1 facente parte della rete riportata in fig. A. 122-1.

Soluzione

$I_1 = 1{,}33$ ampere.

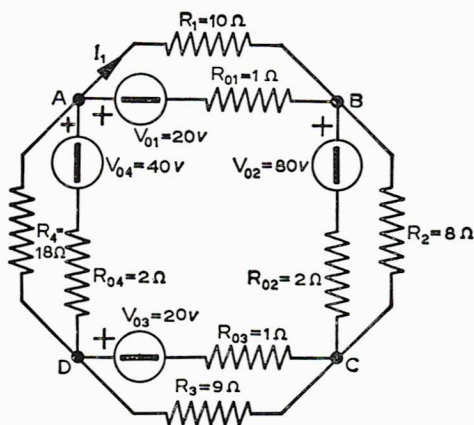



Fig. A.122-1

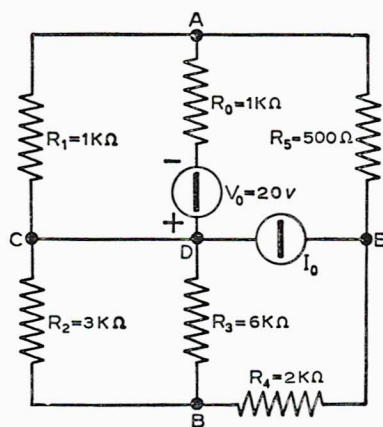



Fig. A.123-1

Esercizio A.123

Determinare valore e verso della corrente I_0 del generatore di corrente facente parte della rete elettrica riportata in fig. A. 123-1 affinché la tensione ai suoi capi sia nulla. Calcolare inoltre in queste condizioni la *d.d.p.* V_{AB}.

Soluzione

1) La corrente I_0 vale 10 mA, col verso da D a E; 2) la tensione fra i punti A e B ammonta a — 5 volt.

Esercizio A.124

Calcolare il valore della resistenza R_1 affinché la corrente I_1 assuma, nella rete riportata in fig. A. 124-1, l'intensità di 0,5 ampere.

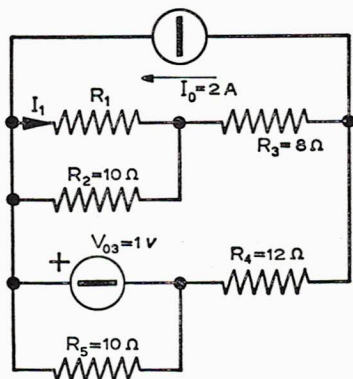



Fig. A.124-1

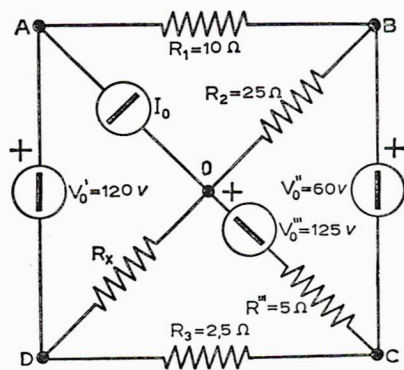



Fig. A.125-1

Soluzione

La resistenza R_1 vale 10 ohm.

Esercizio A.125

Quale valore deve avere la resistenza R_x, facente parte della rete riportata in fig. A. 125-1, affinché la tensione fra i punti A e O sia nulla. Si noti che in queste condizioni il generatore di *f.e.m.* V'_0 eroga 6 ampere e $V_{AB} = 50$ volt. Calcolare inoltre il valore di I_0.

Soluzione

1) $R_x = 60$ ohm ; 2) $I_0 = 1$ ampere (verso da A a O).

A.2 Elettrostatica

Esercizio A.21

Due piccole sfere di rame uguali, isolate, si attirano con una forza $F_1 = 10{,}8 \cdot 10^{-6}$ newton quando si trovano alla distanza di un metro nell'aria; viceversa, dopo essere state poste a contatto fra di loro, esse si respingono con una forza $F_2 = 3{,}6 \cdot 10^{-6}$ newton, sempre alla distanza di un metro nell'aria.

Soluzione

Una sferetta possiede la quantità di elettricità di 20 nanocoulomb, l'altra possiede la quantità di elettricità di 60 nanocoulomb, di segno opposto.

Esercizio A.22

Un cerchio è realizzato mediante un filo conduttore (raggio del filo 1 mm, diametro del cerchio 1 m) carico positivamente ($Q = 0{,}7$ μC). Si trovi il valore che assume il campo elettrico nel centro del cerchio.

Soluzione

Nel centro il campo elettrico è nullo.

Esercizio A.23

Sapendo che la forza coulombiana di attrazione che si manifesta fra l'elettrone e il nucleo di un atomo di idrogeno è di circa 80 nanonewton, si trovi il valore assunto dal raggio dell'orbita circolare descritta dall'elettrone.

Soluzione

Il raggio vale circa $0{,}53 \cdot 10^{-10}$ metri.

Esercizio A.24

Fra due superfici metalliche A e B piane di dimensioni molto più grandi della loro distanza ($d = 4$ mm), affacciate parallelamente e collegate a un generatore avente i morsetti isolati da massa e fra i quali esistono 4000 volt, viene introdotta una lastra metallica C di grandi dimensioni e di spessore trascurabile. Questa lastra viene successivamente collegata a massa. Trovare: 1) il potenziale dell'armatura A sapendo che essa dista 1 mm dalla lastra C; 2) la variazione dell'energia elettrostatica in seguito all'avvenuto collegamento della lastra a massa.

Soluzione

1) La *d.d.p.* richiesta vale 1000 volt; 2) non vi è variazione di energia elettrostatica.

Esercizio A.25

Un condensatore in aria è costituito da due armature piane e parallele ($S = 200$ cm², $d = 2$ mm). Fra le armature viene posta parallelamente a queste, si veda la fig. A. 25-1, una lastra metallica dello spessore $\delta = 0{,}4$ mm. Calcolare la variazione di capacità subìta dal condensatore.

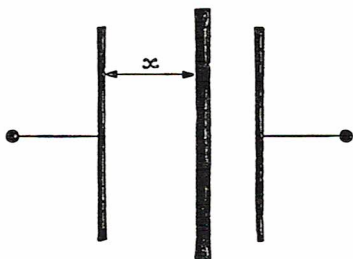



Fig. A.25-1

Soluzione

La formula della variazione di capacità risulta essere la seguente: $\Delta C/C = \delta/(d - \delta)$, non dipende cioè dalla distanza x che la lastra ha da un'armatura. Nel nostro caso $\Delta C/C = 0{,}25$, cioè la variazione è stata del 25 % in più.

Esercizio A.26

Un condensatore piano multiplo è stato realizzato con 7 armature rettangolari di superficie utile 5×4 cm. Sapendo che il dielettrico è costituito da un foglio di mica ($d = 0{,}1$ mm, $\varepsilon_r = 7$), calcolare: 1) il valore della capacità del condensatore; 2) la tensione esistente fra due armature contigue quando il condensatore, per caricarsi, ha assorbito 4,1 microcoulomb.

Soluzione

1) La capacità ammonta a 7,44 nanofarad; 2) la *d.d.p.* fra due armature contigue vale 550 volt.

Esercizio A.27

Determinare la capacità chilometrica di un cavo costituito da un unico conduttore cilindrico di rame avente raggio (esterno) $r_1 = 1$ mm e da una guaina di piombo di raggio (interno) $r_2 = 4$ mm. L' isolante è polietilene ($\varepsilon_r = 2{,}2$).

Soluzione

La capacità per ogni chilometro è di $88{,}5 \cdot 10^{-9}$ farad, cioè di 88,5 picofarad per metro.

Esercizio A.28

Un cavo unipolare con guaina in piombo (raggio interno 8 mm) è costituito da un conduttore cilindrico di raggio 2 mm ed è fasciato con due strati di materiale isolante differente (un primo strato di carta, $\varepsilon_r = 2$, spessore 2 mm; un secondo strato di gomma, $\varepsilon_r = 2, 5$, spessore 4 mm). Trovare la capacità per ogni metro di lunghezza.

Soluzione

La capacità per ogni metro lineare vale 89 pF.

Esercizio A.29

Due capacità in aria, di cui una fissa (200 pF) e l'altra variabile, perché costituita da due armature piane parallele a distanza variabile, sono collegate in serie e sottoposte alla *d.d.p.* del valore di 50 kV. Trovare quale deve essere la distanza delle armature affinché il campo elettrico all'interno di esse valga 0,5 kV/mm, sapendo che in tali condizioni la quantità di elettricità su ciascuna armatura è di $8 \cdot 10^{-6}$ coulomb.

Soluzione

La distanza fra le due armature è di 20 mm.

Esercizio A.210

L'intercapedine esistente fra la guaina metallica di un cavo unipolare e l'unico conduttore interno cilindrico (di sezione 12,6 mm²) è riempita completamente con dielettrico omogeneo (spessore 4 mm). Sapendo che il cavo presenta una capacità per metro di 101 pF, si trovi: 1) il valore relativo della costante dielettrica del materiale isolante; 2) il valore più alto che il campo elettrico assume all'interno del cavo quando il conduttore è portato a 10 kV rispetto alla guaina.

Soluzione

1) $\varepsilon_r = 2$; 2) il campo elettrico è massimo sulla superficie del conduttore ove raggiunge il valore di 4,55 kV/mm.

Esercizio A.211

Tre condensatori di eguali dimensioni geometriche ($S = 986$ cm², $d = 1$ mm) ma di differente dielettrico sono collegati in serie (capacità totale 1000 pF). Si sa che se sottoposti a una tensione, questa si ripartisce in modo tale che ai capi del secondo condensatore la *d.d.p.* risulta di valore doppio rispetto alla tensione esistente ai capi del primo condensatore e che ai capi del terzo condensatore risulta una *d.d.p.* di valore doppio rispetto alla tensione esistente ai capi del secondo condensatore. Trovare i valori relativi delle costanti dielettriche dei tre condensatori.

Soluzione

$\varepsilon_{r1} = 8$, $\varepsilon_{r2} = 4$, $\varepsilon_{r3} = 2$.

Esercizio A.212

Trovare il valore da assegnare alla capacità C_4, facente parte del circuito riportato in fig. A. 212-2, affinché fra i punti A e B la *d.d.p.* assuma il valore di — 200 volt.

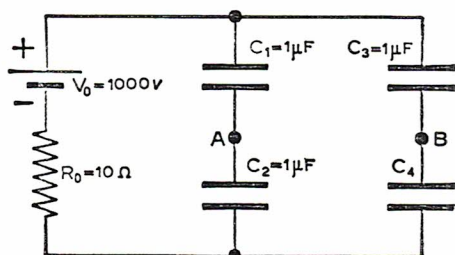



Fig. A.212-1

Soluzione

$$C_4 = 0{,}43\ \mu\text{F}.$$

Esercizio A.213

Tre condensatori ($C_1 = C_2 = 1200$ pF, C_3 è di capacità incognita) risultano collegati in serie e servono da partitore per una tensione continua di 20 kV. La tensione in uscita è quella ai capi del condensatore C_3 e vale 4 kV, che però risulta eccessiva. Dovendo ridurla a 3330 volt, si trovi quale deve essere il nuovo valore di C_2, fermo restando il valore delle altre due capacità.

Soluzione

La capacità C_2 deve raggiungere il valore di 800 pF.

Esercizio A.214

Due sfere conduttrici, di raggio rispettivamente $r_1 = 30$ cm e $r_2 = 20$ cm, vengono poste a contatto, successivamente, con una stessa sorgente di tensione (10 kV rispetto a massa), quindi allontanate di molto fra di loro e dalla sorgente. Trovare in quale rapporto stanno le quantità di elettricità possedute e le relative energie elettrostatiche.

Soluzione

I valori esprimenti le quantità di elettricità possedute e le relative energie elettrostatiche stanno fra di loro nel rapporto diretto dei raggi delle sfere.

Esercizio A.215

Un condensatore in aria con armature piane e parallele ($S = 2000$ cm^2, $d = 2$ mm) è stato caricato fino a immagazzinare un'energia pari a 443 microjoule. Dopodiché esso viene posto in parallelo ad un eguale condensatore, però completamente scarico. Calcolare l'energia che, alla fine, verrà a possedere quest' ultimo condensatore.

Soluzione

L'energia elettrostatica posseduta ammonta a 111 microjoule.

A.3 Elettromagnetismo

Esercizio A.31

Un solenoide rettilineo (lunghezza 20 cm, sezione retta 1×2 cm) si trova immerso nell'aria ed è percorso da una corrente di 800 mA. Si calcoli : 1) il numero di spire necessarie affinché il flusso magnetico nella zona centrale interna del solenoide ammonti a 1 μWb ; 2) il valore del flusso all' uscita del solenoide nelle condizioni determinate dalla precedente domanda.

Soluzione

1) Il numero di spire è di 995 ; 2) il flusso all' uscita del solenoide vale circa 0,5 μWb.

Esercizio A.32

Trovare il valore del flusso magnetico contenuto entro un toro in aria (raggio interno 1 cm, raggio esterno 6 cm) a sezione quadrata (5×5 cm) il quale è costituito da 1000 spire uniformemente distribuite e percorse da una corrente di 100 mA.

Soluzione

Il flusso magnetico ammonta a $1{,}78 \cdot 10^{-6}$ Wb.

Esercizio A.33

Relativamente al circuito rappresentato in fig. A. 33-1, circuito costituito con materiale ferromagnetico a permeabilità costante ($\mu = 2000\ \mu_0$) e di sezione costante (5 cm^2), si trovi il valore che assume l' induzione nel traferro ($\delta = 0{,}5$ mm) quando la corrente che percorre l'avvolgimento di eccitazione (1000 spire) ha l' intensità di 112 mA.

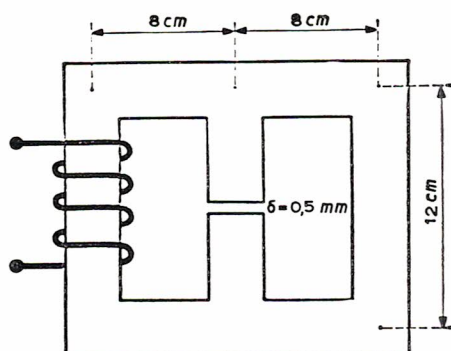



Fig. A.33-1

Soluzione

L' induzione magnetica nel traferro vale 0,111 Wb/m^2.

Esercizio A.34

Un nucleo magnetico di lunghezza media 50 cm e di larghezza 4 cm è stato realizzato con 200 lamierini (spessore 0,5 mm) di ferro-silicio a cristalli orientati la cui curva di magnetizzazione è riportata in fig. 4.23-4 (pag. 368). Il nucleo ha un traferro di 0,1 mm e porta uniformemente distribuito un avvolgimento di 400 spire. Calcolare il valore della corrente necessaria affinché l'avvolgimento determini nel nucleo un flusso di 6,4 mWb.

Soluzione

La corrente deve avere un' intensità di circa 0,52 ampere.

Esercizio A.35

Un solenoide tende a deformarsi quando è percorso da corrente?

Soluzione

Il solenoide tende ad accorciarsi, a causa delle forze di attrazione esistenti fra spira e spira.

Esercizio A.36

La forza portante di un elettromagnete nella condizione di àncora attratta, cui corrisponde un traferro di 0,1 mm, è di 40 kg. Quale sarà la forza attrattiva del suddetto elettromagnete quando il traferro risulta di 2 mm?

Soluzione

La forza attrattiva è di circa 0,1 kg.

Esercizio A.37

Un cilindro conduttore, la cui superficie esterna risulta in grado di emettere elettroni, è circondato da un altro cilindro conduttore, coassiale, e tale da risultare positivo rispetto al primo (tensione acceleratrice V_a). Il moto degli elettroni nello spazio compreso fra i due cilindri è perciò radiale. Che cosa succederà se verrà ad agire contemporaneamente al campo elettrico anche un campo magnetico avente le linee di forza parallele all'asse del cilindro emettitore, come appare in fig. A. 37-1*a*?

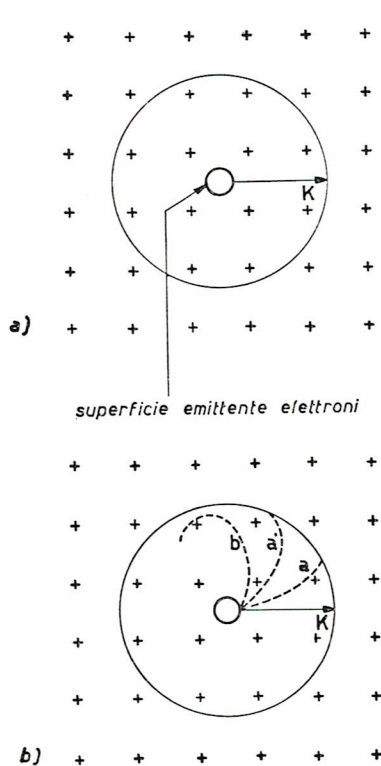



Fig. A.37-1

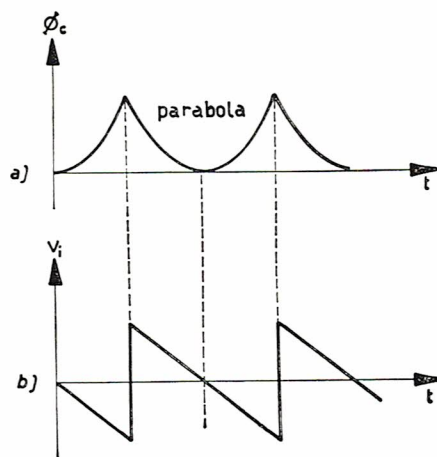



Fig. A.38-1

Soluzione

Ogni elettrone, abbandonato il cilindro emettitore, incomincerà a deviare sempre più dalla traiettoria radiale, perché sottoposto anche alla forza di Lorentz. I casi naturalmente sono due: o l'elettrone riesce a raggiungere egualmente il secondo cilindro (traiettoria tipo *a* di fig. A. 37-1*b*) oppure non vi riesce (traiettoria tipo *b*). Ciò dipenderà in particolare dal valore del potenziale acceleratore V_a e dall' intensità dell' induzione magnetica B.

Esercizio A.38

Il flusso concatenato con un circuito elettrico varia nel tempo come rappresentato in fig. A. 38-1*a*. Si tracci il relativo diagramma della *f.e.m.* indotta.

Soluzione

L'andamento appare nel diagramma di fig. A. 38-1*b*.

Esercizio A.39

Un circuito ferromagnetico ($\mu = 300\ \mu_0$) di lunghezza media 80 cm e sezione netta 2 cm^2 con traferro ($\delta = 0{,}4$ mm) porta uniformemente distribuiti due distinti avvolgimenti, ciascuno di 400 spire. Nell' ipotesi che nulli siano i flussi dispersi, calcolare: 1) il valore del coefficiente di autoinduzione di ciascun avvolgimento; 2) il valore del coefficiente di mutua induzione.

Soluzione

$L_1 = L_2 = M = 13,1$ millihenry.

Esercizio A.310

Trovare il valore da assegnare al traferro di un circuito magnetico torico (diametro medio 10 cm, sezione 2 cm^2) costituito da un materiale ferromagnetico a permeabilità costante ($\mu = 1000\ \mu_0$) affinché con un avvolgimento di 300 spire uniformemente distribuite l' induttanza di tale avvolgimento risulti di 54,6 millihenry.

Soluzione

Il traferro deve essere di 0,1 mm.

Esercizio A.311

Che cosa succede quando una lastrina di ferro oscilla fra le posizioni A e B esterne al traferro del circuito magnetico riportato in fig. A. 311-1, il cui avvolgimento è alimentato con una sorgente di tensione continua?

Soluzione

1) Si hanno delle correnti parassite nella lastrina di ferro; 2) varia il flusso magnetico nel nucleo; 3) nascono delle correnti parassite nel nucleo; 4) si sviluppano delle correnti indotte nel circuito di eccitazione.

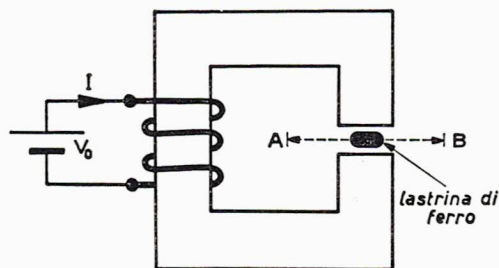
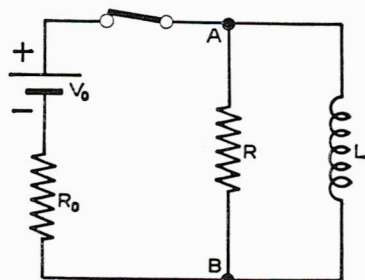



Fig. A.311-1 *Fig. A.312-1*

Esercizio A.312

Nel circuito riportato in fig. A. 312-1 l'interruttore, chiuso da diverso tempo, viene improvvisamente aperto. Si chiede: 1) il valore della tensione fra i punti A e B quando l'interruttore era chiuso; 2) il valore della stessa tensione un istante dopo che si è aperto l'interruttore.

Soluzione

1) $V_{AB} = 0$; 2) $V_{AB} = - V_0 R/R_0$.

Esercizio A.313

Quale valore ha il coefficiente di autoinduzione L di un filo conduttore rettilineo, di diametro 20 mm, lungo 50 km, immerso nell'aria?

Soluzione

Il conduttore rettilineo, così come è stato descritto, deve ritenersi un circuito aperto : non si può definire un coefficiente di autoinduzione. Se però la chiusura di detto circuito avviene come al solito mediante un conduttore di ritorno, allora il valore del coefficiente di autoinduzione dipenderà anche dalla posizione e dalle caratteristiche di quest' ultimo conduttore. Naturalmente L risulterà tanto più grande quanto più lontano si troverà il conduttore di ritorno da quello di andata.

Esercizio A.314

Due bobine in aria sono avvolte sullo stesso nucleo in modo da realizzare un ben definito accoppiamento magnetico ($K = 0{,}401$). Trovare i valori delle induttanze delle due bobine e del coefficiente di mutua induzione sapendo che se le due bobine sono collegate in serie concorde l' induttanza equivalente ammonta a 6,31 mH, se invece esse risultano in serie discorde l' induttanza equivalente vale 4,31 mH.

Soluzione

Le induttanze valgono rispettivamente 0,31 mH e 5 mH ; il coefficiente di mutua induzione ammonta di conseguenza a 0,50 mH.

Esercizio A.315

Una spira circolare (diametro 1 metro) è costituita da un conduttore (sezione circolare 50,2 mm^2) che si trova completamente immerso in olio minerale e percorso dalla corrente di 10 ampere. Calcolare 1) il valore del campo magnetico nel centro della spira ; 2) il valore del flusso magnetico prodotto dalla spira.

Soluzione

1) Il campo magnetico nel centro della spira vale 10 Asp/m ; 2) il flusso magnetico prodotto dalla spira ammonta a $32{,}3 \cdot 10^{-6}$ weber.

A.4 Correnti alternate

Esercizio A.41

Le seguenti grandezze espresse in forma simbolica: $\bar{A} = A\varepsilon^{j\alpha}$, $\bar{B} = B\varepsilon^{j\beta}$ rappresentano grandezze sinusoidali isofrequenziali; mentre le seguenti grandezze: $\bar{C} = C\varepsilon^{j\gamma}$, $D = D\varepsilon^{j\delta}$ rappresentano invece degli operatori vettoriali, cioè non rappresentano grandezze sinusoidali. Dire quali delle seguenti operazioni non sono possibili: 1) $\bar{A} \cdot \bar{D}$; 2) $\bar{B} \cdot \bar{A}$; 3) $\bar{A} \cdot \bar{C}$; 4) $\bar{C} \cdot \bar{D}$; 5) $\bar{A}/\bar{B}$; 6) $\bar{A}/\bar{C}$; 7) $(\bar{C})^2$; 8) $(\bar{B})^2$; 9) $\overline{D \cdot B / A}$.

Soluzione

Non sono possibili le operazioni espresse in 2) e in 8).

Esercizio A.42

Due grandezze sinusoidali isofrequenziali i_1 e i_2 sono così individuate: $i_1 = 60\sqrt{2}$ sen $(\omega t + \pi)$, $i_2 = 100\sqrt{2}$ sen $(\omega t + \pi/4)$. Trovare ampiezza e fase della grandezza somma e della grandezza differenza.

Soluzione

1) grandezza somma $71{,}5\sqrt{2}\ \underline{|81^0\,23'}$; 2) grandezza differenza $149\sqrt{2}\ \underline{|208^0\,25'}$.

Esercizio A.43

Le tensioni verso massa dei due generatori ideali di tensione agenti nel circuito riportato in fig. A. 43-1*a* hanno l'andamento riportato nel diagramma di fig. A. 43-1*b*. Trovare la forma d'onda della corrente che scorre nel circuito.

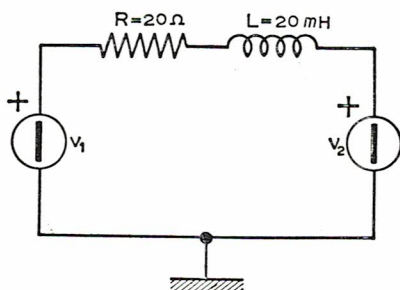
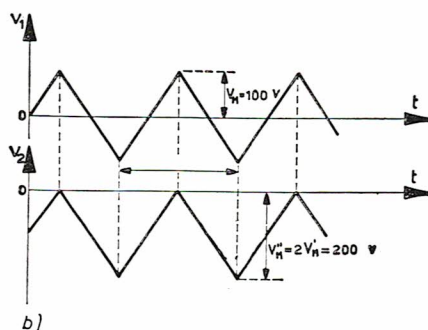



Fig. A.43-1

Soluzione

Nel circuito agisce la *f.e.m.* v_1-v_2, che risulta essere costante, precisamente del valore di 100 volt. La corrente nel circuito è quindi continua, fluisce nel carico da A verso B e vale 5 ampere.

Esercizio A.44

Calcolare il valore efficace della tensione alternata riportata in fig. A. 44-1.

Soluzione

Il valore efficace vale 30 volt. Si può calcolare con la formula $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^A v^2\,dt + \frac{1}{T}\int_A^B v^2\,dt}$, ove il primo integrale rappresenta l'area del rettangolo avente per base il segmento OA (0, 1T) e per altezza il quadrato di V' ($90^2 = 8100$) (l'area vale quindi 810 T) e il secondo integrale rappresenta l'area del rettangolo avente per base il segmento AB (0,9T) e per altezza il quadralo di V'' ($10^2 = 100$) (l'area vale perciò 90T).

Esercizio A.45

Calcolare l'ammettenza equivalente in forma binomia ed esponenziale dei tre rami in parallelo riportati in fig. A. 45-1.

Soluzione

$$\overline{Y} = (3{,}2 + j\,0{,}9)\,10^{-3} = 0{,}00332\ \varepsilon^{j\,15^\circ\,42'}.$$

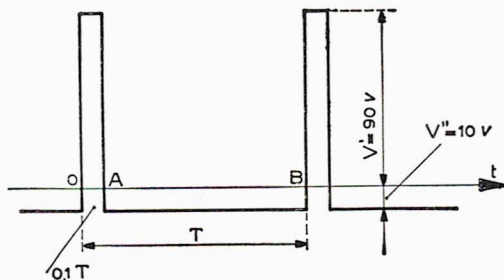



Fig. A.44-1

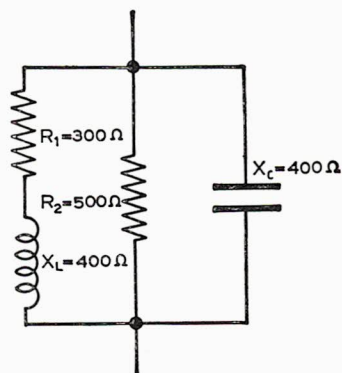



Fig. A.45-1

Esercizio A.46

Trovare l' intensità delle correnti che circolano nei tre rami in parallelo del circuito riportato in fig. A. 46-1*a*. Tracciare inoltre il relativo diagramma vettoriale.

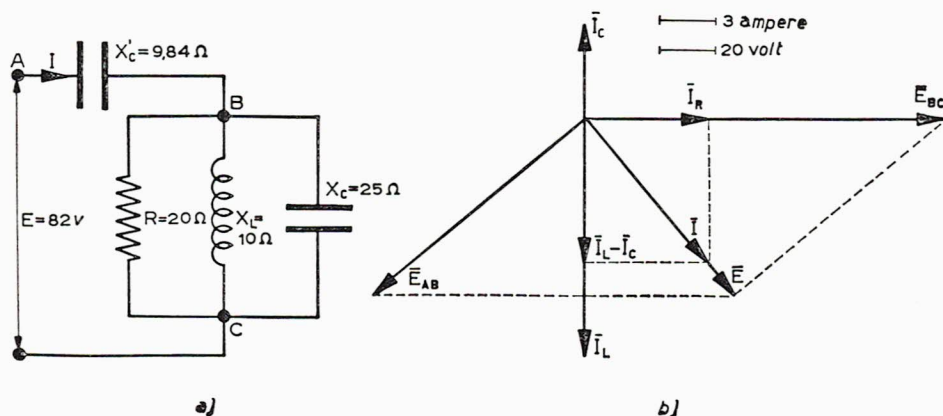



Fig. A.46-1

Soluzione

Le correnti risultano come segue : $I_R = 6{,}4$ ampere ; $I_L = 12{,}8$ ampere $I_C = 5{,}12$ ampere. Per il diagramma vettoriale si veda la fig. A. 46-1*b*.

Esercizio A.47

Si sa che applicando ai capi di un bipolo una tensione di 60 volt a 50 per/sec esso assorbe una corrente di 425 mA mentre se la tensione applicata, pur rimanendo a 60 volt, ha la frequenza di 60 per/sec la corrente assorbita dal bipolo ammonta a 461 mA. Dire quale tipo di bipolo è quello in oggetto e quali sono i suoi parametri.

Soluzione

1) Il bipolo è un' impedenza ohmico-capacitiva ; 2) la resistenza vale 100 ohm e la capacità ammonta a circa 32 μF.

Esercizio A.48

Un' induttanza ($X_L = 400$ ohm) è in serie con una resistenza R. Quando l' insieme risulta alimentato con una tensione di 220 volt ai capi dell' induttanza cadono 176 volt. Trovare il valore della resistenza.

Soluzione

La resistenza vale 300 ohm.

Esercizio A.49

Una reattanza capacitiva $X_c = 1000$ ohm è in parallelo con una resistenza R. Quest' ultima è tale da assorbire una corrente in ritardo di 35° rispetto alla corrente assorbita dal parallelo. Trovare il valore della resistenza R.

Soluzione

La resistenza R ammonta a 700 ohm.

Esercizio A.410

Una resistenza $R = 200$ ohm e una reattanza capacitiva X_c sono in parallelo e assorbono nell' insieme una corrente di 1,23 ampere sotto la differenza di potenziale di 220 volt. Trovare il valore di X_c.

Soluzione

La reattanza capacitiva vale 400 ohm.

Esercizio A.411

Un circuito elettrico, sotto l'azione della tensione sinusoidale $\overline{E} = 220 \underline{|-7^0}$, assorbe la corrente $\overline{I} = 12 \underline{|-22^0}$. Trovare di questa corrente le componenti in fase e in quadratura con la tensione applicata. Calcolare inoltre quale potenza reattiva sia necessario fare assorbire al circuito per eliminare la componente in quadratura della corrente.

Soluzione

1) Componente in fase con la tensione 11,6 ampere ; 2) componente in quadratura con la tensione 3,11 ampere ; 3) la componente in quadratura si elimina facendo assorbire al circuito una potenza reattiva capacitiva del valore di 684 VAR.

Esercizio A.412

Trovare l'ammettenza equivalente (modulo e argomento) di tre rami in parallelo così definiti : $\overline{Z}_1 = 300 + j\,400$, $\overline{Z}_2 = -j\,100$, $\overline{Z}_3 = 200 - j\,200$.

Soluzione

$\overline{Y}_{eq} = 11{,}5 \cdot 10^{-3} \underline{|\ 71^0\,16'}$.

Esercizio A.413

Calcolare, in tre modi differenti, la potenza attiva e reattiva assorbita dai tre rami in parallelo dell'esercizio precedente quando essi sono sottoposti ad una tensione sinusoidale del valore di 1000 volt.

Soluzione

1) $P = GE^2 = 3{,}7$ kW ; $Q = BE^2 = 10{,}9$ kVAR

2) $P = P_1 + P_3 = 1200 + 2500 = 3700$ W ; $Q = -Q_1 + Q_2 + Q_3 =$
$= -1600 + 10000 + 2500 = 10900$ VAR

3) $P = YE^2 \cos\varphi = 3{,}7$ kW ; $Q = YE^2 \operatorname{sen}\varphi = 10{,}9$ kVAR.

Esercizio A.414

Un generatore reale di tensione, di *f.e.m.* E_0 e impedenza interna $\overline{Z}_0 = R_0 + jX_0$, può alimentare separatamente due carichi. Quando alimenta il primo carico ($\overline{Z}'_u = 270 + j\,310$) la corrente è di 0,56 ampere in ritardo di $53^0\,8'$ sulla *f.e.m.* E_0, quando alimenta invece il secondo carico ($\overline{Z}''_u = 170 - j\,90$) la corrente è di 1,4 ampere e risulta in fase con la *f.e.m.* E_0. Trovare le caratteristiche del generatore.

Soluzione

La *f.e.m.* E_0 vale 280 volt ; l' impedenza interna $\overline{Z}_0 = 30 + j\,90$.

Esercizio A.415

Un circuito oscillatorio *RLC* parallelo ($R = 100\ \text{k}\Omega$, $L = 15{,}9\ \mu\text{H}$) presenta un coefficiente di risonanza del valore di 100 unità alla frequenza di 10 Mper/sec. Trovare il valore della capacità C e quello del carico, schematizzabile con una resistenza equivalente in parallelo alla capacità, sapendo che il coefficiente di risonanza a carico è di 10 unità.

Soluzione

1) $C = 15{,}9\ \text{pF}$; 2) resistenza equivalente di carico 11,1 kΩ.

A.5 Regime transitorio

Esercizio A.51

Si trovi quale valore dovrebbe avere la resistenza R affinché la corrente oscillatoria (smorzata) in un circuito *RLC* serie ($L = 10\ \text{mH}$, $C = 500\ \text{pF}$) si possa considerare con buona approssimazione sinusoidale entro l' intervallo di tempo eguale a 10 millisecondi.

Soluzione

La resistenza R deve risultare inferiore a 20 milliohm.

Esercizio A.52

Si trovi l'andamento della corrente nella resistenza R_2 prima e dopo la chiusura dell' interruttore facente parte del circuito riportato in fig. A. 52-1*a*. La capacità C è inizialmente scarica.

Soluzione

L'andamento della corrente nella resistenza R_2 appare nel diagramma di fig. A. 52-1*b*.

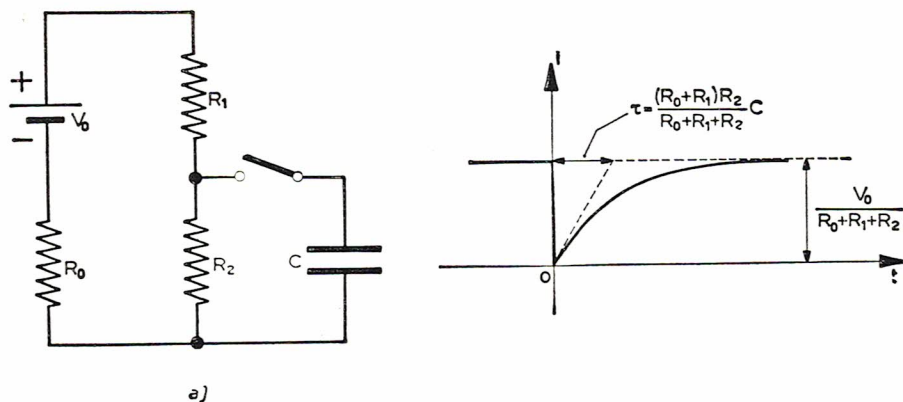



Fig. A.52-1

Esercizio A.53

Un condensatore ($C = 1\ \mu F$), inizialmente carico, lasciato a sè, impiega 1 ora per scaricarsi completamente ($1^\circ/_{oo}$). Trovare la resistenza di isolamento del condensatore.

Soluzione

La resistenza di isolamento vale circa 500 Mohm.

Esercizio A.54

Un condensatore ($C = 10\ \mu F$) viene caricato da una batteria di pile ($V_0 = 200$ volt) tramite un circuito che presenta complessivamente una resistenza di 100 kΩ. Trovare: 1) il valore della tensione ai capi del condensatore dopo 200 millisecondi; 2) il tempo necessario perchè la tensione ai capi del condensatore salga a 60 volt.

Soluzione

1) Dopo 200 msec la tensione vale 36,2 volt; 2) il tempo è di 356 msec.

Esercizio A.55

Dire se le correnti nei vari rami della rete riportata in fig. A. 55-1*a* rispettivamente in fig. A. 55-1*b* variano quando si apre e quando si chiude il relativo interruttore.

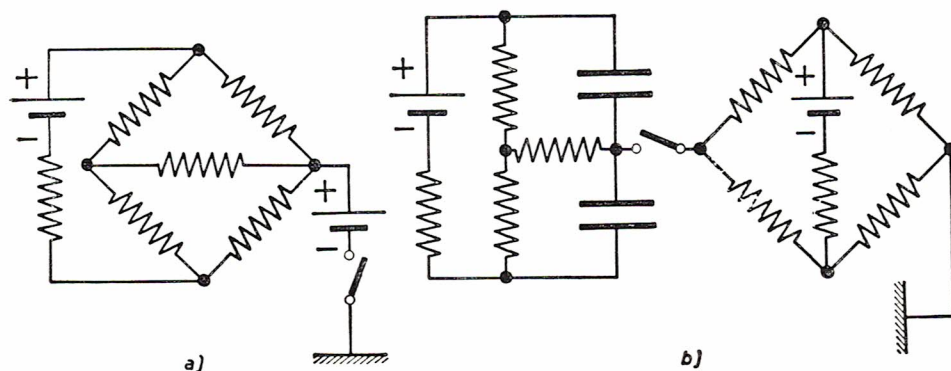



Fig. A.55-1

Soluzione

Le correnti non possono variare in seguito alla chiusura e alla apertura dell' interruttore.

Esercizio A.56

Trovare il valore assunto, a transitorio estinto, dalla tensione fra i punti A e B della rete riportata rispettivamente in fig. A. 56-1*a*, *b*, *c*, ove $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = C_4 = 6\ \mu F$, $C_3 = 2\ \mu F$.

Soluzione

1) Rete di fig. A. 56-1*a* : $V_{AB} = -4{,}77$ volt ; 2) rete di fig. A. 56-1*b* e A. 56-1*c* : $V_{AB} = 0$.

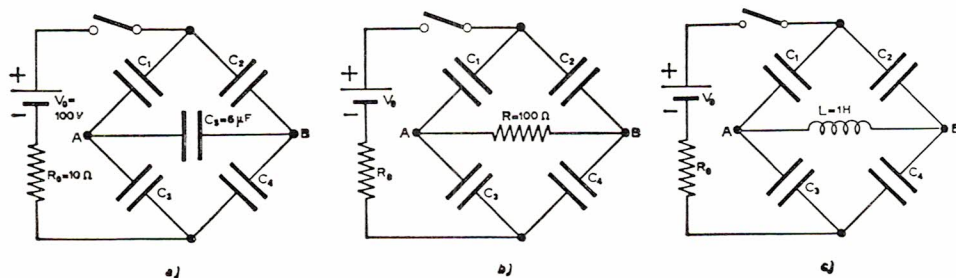



Fig. A.56-1

A.6 Sistemi trifasi

Esercizio A.61

Un carico costituito da tre resistori eguali ($R = 10$ ohm) collegati a stella, alimentati con un sistema di tensioni simmetriche di frequenza 50 per/sec, assorbe 12 ampere. Per diminuire l' intensità di questa corrente al valore di 10 ampere si è deciso di porre in serie, a ciascun resistore, un condensatore. Quale valore di capacità dovrà avere ognuno dei tre condensatori e quale sarà il nuovo fattore di potenza del carico ?

Soluzione

1) La capacità deve essere di 480 μF ; 2) il fattore di potenza risulta essere 0,83.

Esercizio A.62

Le tre tensioni concatenate di un sistema trifase dissimmetrico sono rispettivamente 250, 220, 200 volt. Trovare i valori delle tensioni di fase, con riferimento al centro astratto.

Soluzione

Le tensioni di fase risultano essere rispettivamente di 132, 142, 112,5 volt.

Esercizio A.63

Tre impedenze collegate a triangolo assorbono le seguenti correnti di linea : 12, 8, 14 ampere. Trovare le correnti che percorrono le singole impedenze sapendo che queste non danno luogo a componenti omopolari.

Soluzione

Le correnti di fase hanno le seguenti intensità : 6,45, 8,3 , 5 ampere.

Esercizio A.64

Tre bobine eguali, collegate a triangolo, assorbono 3kW con un fattore di potenza di 0,72. Trovare i parametri (R e X_L) di ogni bobina sapendo che, ponendo in parallelo a ciascuna di esse una capacità di reattanza $X_c = 141$ ohm, il fattore di potenza passa al valore di 0,85.

Soluzione

$R = 25$ ohm ; $X_L = 24{,}1$ ohm.

Esercizio A.65

Ognuno dei tre gruppi (eguali) di condensatori, costituenti una batteria trifase per rifasamento a 380 volt, sono attraversati da una corrente di 50 ampere. Sapendo che la potenza della batteria di condensatori, nelle condizioni citate sopra, è di 57 kVAR dire se i tre gruppi di condensatori sono collegati a stella o a triangolo.

Soluzione

I condensatori sono collegati a triangolo, poiché la batteria assorbe dalla linea una corrente di 86,6 ampere.

Esercizio A.66

Una stufa elettrica della potenza di 3 kW è costituita da tre resistori eguali collegati fra di loro a stella ed è alimentata con tensioni simmetriche. Durante il funzionamento uno dei tre resistori si interrompe. Quale sarà la potenza assorbita dalla stufa nella nuova situazione?

Soluzione

La potenza assorbita risulta essere la metà di quella assorbita quando tutti e tre i resistori erano in funzione.

INDICE ANALITICO

d

e

f

g

h

i

j

k

l

m

n

o

p

q

r

s